Cours 6 – Γ-convergence et convergence de l'énergie

Sonia Fliss[1] **and François Alouges**[2]

[1]POEMS, UMA, Ensta Paris; [2]ENS Paris Saclay

✉ **Contact:**
sonia.fliss@ensta-paris.fr

Cours: Homogénéisation périodique – Master AMS

Résumé

Lorsque le tenseur A est symétrique, le problème d'homogénéisation s'écrit comme une famille de problèmes de minimisation. On présente la notion de Γ-convergence de De Giorgi, adaptée à la convergence des problèmes de minimisation, et on montre qu'elle entraîne la convergence des minimiseurs et des valeurs minimales. On démontre ensuite, à l'aide de la convergence double échelle, que les énergies $\mathcal{J}_\varepsilon$ associées au problème oscillant Γ-convergent vers l'énergie homogénéisée $\mathcal{J}_0$.

Table des matières

1 Γ-convergence 1

2 Application à l'homogénéisation 2

1 Γ-convergence

Ce cours propose un autre point de vue sur le problème, dans le cas important où l'on suppose de plus que A est symétrique. En effet, le problème que nous avons étudié jusqu'ici peut également s'écrire comme un problème de minimisation, en utilisant le principe de Dirichlet :

$$(\mathscr{P}_\varepsilon) \qquad \min_{u\in H^1_0(\Omega)} \frac{1}{2}\int_\Omega A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\,u(x)\,\mathrm{d}x, \tag{1}$$

dont u_ε est la solution.

En effet, lorsque A symétrique, si u_ε est la solution de la formulation variationnelle, on a pour tout $v\in H^1_0(\Omega)$, en notant $\mathcal{J}_\varepsilon$ la fonctionnelle de (1),

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon+v) = \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) + \underbrace{\int_\Omega A_\varepsilon\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega fv\,\mathrm{d}x}_{=0} + \frac{1}{2}\underbrace{\int_\Omega A_\varepsilon\nabla v\cdot\nabla v\,\mathrm{d}x}_{\geq 0} \;\geq\; \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Il serait utile de disposer d'une notion de convergence des problèmes de minimisation compatible avec la convergence des minimiseurs (ici, la convergence à deux échelles). C'est précisément le cadre fourni par la Γ-convergence de De Giorgi. La théorie est naturellement beaucoup plus riche que ce que nous présentons ici pour les besoins de ce cours.

Définition 1: Γ-convergence

Soit (X,d) un espace métrique. On considère, pour $\varepsilon>0$, une famille de fonctionnelles $\mathcal{J}_\varepsilon : X\to\mathbb{R}$, une fonctionnelle limite $\mathcal{J}_0 : X\to\mathbb{R}$, et les problèmes de minimisation associés

$$(\mathscr{P}_\varepsilon) \quad \min_{u\in X}\mathcal{J}_\varepsilon(u), \qquad (\mathscr{P}_0) \quad \min_{u\in X}\mathcal{J}_0(u). \tag{2}$$

On dit que la famille de problèmes $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ $\Gamma(d)$-*converge* vers $(\mathscr{P}_0)$ si, pour tout $u_0\in X$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

— Γ-lim inf. Pour toute suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge vers u_0 (pour la métrique d), on a

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon)\geq\mathcal{J}_0(u_0); \tag{3}$$

— Γ-lim sup. Il existe une suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge vers u_0 (pour la métrique d) telle que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \mathcal{J}_0(u_0). \tag{4}$$

La principale motivation de cette définition est le théorème suivant.

Théorème 2

Soient (X,d) un espace métrique et une suite de problèmes de minimisation $(\mathscr{P}_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ qui $\Gamma(d)$-converge vers le problème de minimisation $(\mathscr{P}_0)$ défini en (2). Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite de solutions des problèmes $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ qui converge vers u_0 pour la métrique d. Alors u_0 est une solution du problème de minimisation $(\mathscr{P}_0)$ et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{J}_0(u_0).$$

Preuve. Puisque $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ converge vers u_0 pour la métrique d, la première propriété de la Γ-convergence entraîne

$$\mathcal{J}_0(u_0) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Considérons maintenant $v_0 \in X$ et une suite $(v_\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge vers v_0 et telle que

$$\mathcal{J}_0(v_0) \geq \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(v_\varepsilon).$$

Une telle suite existe grâce à la seconde propriété de la Γ-convergence. Comme u_ε est un minimiseur de $\mathcal{J}_\varepsilon$, on a $\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \mathcal{J}_\varepsilon(v_\varepsilon)$. On en déduit

$$\mathcal{J}_0(u_0) \leq \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq \mathcal{J}_0(v_0),$$

ce qui montre que u_0 est une solution de $(\mathscr{P}_0)$. En prenant $v_0 = u_0$ dans les inégalités précédentes, on obtient la dernière assertion du théorème. □

Remarque 3

La Γ-convergence fournit un cadre particulièrement adapté à la convergence des problèmes de minimisation. Fait remarquable, sa définition ne fait intervenir aucune propriété de minimisation de la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ ni de sa limite u_0. La minimisation et la convergence des minimiseurs apparaissent ainsi comme des *conséquences* des propriétés générales énoncées dans la définition.

Dans la définition de la Γ-convergence, (4) peut être remplacée par une assertion plus faible, pour laquelle le théorème 2 reste valable :
Pour tout $\eta > 0$, il existe une suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ qui converge vers u_0 (pour la métrique d) telle que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \mathcal{J}_0(u_0) + \eta. \tag{5}$$

Remarque 4: Exercice

Vérifier que, sous les hypothèses (3) et (5), le théorème 2 reste valable.

2 Application à l'homogénéisation

Compte tenu de ce qui précède, nous posons, pour $u \in X = H^1_0(\Omega)$,

$$\mathcal{J}_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\,u(x)\,\mathrm{d}x, \tag{6}$$

tandis que le problème limite fait intervenir le tenseur homogénéisé A^* (défini au cours 3) :

$$\mathcal{J}_0(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega A^*\nabla u(x)\cdot\nabla u(x)\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\,u(x)\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

On suppose, comme dans les cours précédents, $f \in L^2(\Omega)$, A symétrique, Y-périodique et qu'il existe $c>0$ et $C>0$ telles que

$$\forall y \in Y,\ \ c\,|\xi|^2 \leq A(y)\xi\cdot\xi \leq C\,|\xi|^2.$$

Il reste à choisir une métrique sur X. La convergence démontrée dans les cours précédents n'est que faible dans $H^1(\Omega)$, dont la topologie faible n'est pas métrisable en général. Nous munissons donc X de la distance associée à la convergence forte dans L^2 (voir la remarque 8 ci-dessous).
L'objectif principal de cette section est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 5

Soient $\mathcal{J}_\varepsilon$ (resp. $\mathcal{J}_0$) définies par (6) (resp. (7)), et considérons les problèmes de minimisation associés $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ et $(\mathscr{P}_0)$ donnés par (2). La suite de problèmes de minimisation $(\mathscr{P}_\varepsilon)_\varepsilon$ $\Gamma(L^2)$-converge vers $(\mathscr{P}_0)$ dans $H^1_0(\Omega)$.

Preuve. La démonstration consiste à établir les deux propriétés de la Γ-convergence. Comme nous allons le voir, cela éclaire le problème sous un angle nouveau. Nous décomposons donc la preuve en deux étapes.

Γ-lim inf. Soit $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite de $H^1_0(\Omega)$ qui converge vers $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ pour la topologie de L^2. Posons $\ell = \liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon)$. Si $\ell = +\infty$, il n'y a rien à démontrer. Sinon, quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer de plus que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \ell.$$

Par coercivité de A et par l'inégalité de Poincaré, $\mathcal{J}_\varepsilon(u) \geq \frac{c}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2} - C_P\|f\|_{L^2}\|\nabla u\|_{L^2}$ pour tout $u \in H^1_0(\Omega)$. Nous en déduisons que la suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans H^1 ; comme elle converge vers u_0 dans L^2, elle converge également faiblement vers u_0 dans $H^1_0(\Omega)$. En appliquant le théorème de convergence double échelle des suites bornées dans H^1 (cours 4), il existe $u_1 \in L^2(\Omega, H^1_\#(Y))$ tel que, à une extraction près,

$$\nabla u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup \nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y) \text{ deux échelles.}$$

Considérons maintenant une fonction $\psi \in \mathscr{C}^\infty_0\big(\Omega, \mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big)$ et développons l'expression positive ou nulle

$$\begin{aligned}
0 \leq & \int_\Omega A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big(\nabla u_\varepsilon - \nabla u_0 - \nabla_y\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\cdot\Big(\nabla u_\varepsilon - \nabla u_0 - \nabla_y\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x \\
= & \int_\Omega A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon\cdot\nabla u_\varepsilon\,\mathrm{d}x - 2\int_\Omega A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon\cdot\Big(\nabla u_0 + \nabla_y\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x \\
& + \int_\Omega A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big(\nabla u_0 + \nabla_y\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\cdot\Big(\nabla u_0 + \nabla_y\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

(on a utilisé la symétrie de A pour regrouper les deux termes croisés). Les résultats et hypothèses précédents permettent d'obtenir

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big(\nabla u_0 + \nabla_y\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\cdot\Big(\nabla u_0 + \nabla_y\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x & \\
= \int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y\psi(x,y)\big)\cdot\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y\psi(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &
\end{aligned}$$

(en développant, chaque terme est de la forme $\int_\Omega g(\frac{x}{\varepsilon})\,\phi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,\mathrm{d}x$ avec $g \in L^\infty_\#(Y)$ et $\phi \in L^1(\Omega; C_\#(Y))$, car $\nabla u_0 \in L^2(\Omega)$ et $\nabla_y\psi$ est continue et bornée et on applique le lemme de convergence des fonctions oscillantes du cours 4). D'autre part

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\nabla u_\varepsilon\cdot\Big(\nabla u_0 + \nabla_y\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \nabla u_\varepsilon\cdot{}^t A\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big(\nabla u_0 + \nabla_y\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega\times Y}\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1(x,y)\big)\cdot{}^t A(y)\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y\psi(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1(x,y)\big)\cdot\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y\psi(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

(la fonction $(x,y)\mapsto {}^t A(y)\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y\psi(x,y)\big)$ est admissible d'après le corollaire sur les fonctions admissibles du cours 4, et on applique le théorème de passage à la limite avec une fonction test admissible). Puisque, de plus,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f(x)\,u_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega f(x)\,u_0(x)\,\mathrm{d}x,$$

on en déduit

$$\begin{aligned}
\liminf_{\varepsilon\to 0}\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq & \int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\big)\cdot\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y\psi(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
& - \frac{1}{2}\int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y\psi(x,y)\big)\cdot\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y\psi(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_\Omega f(x)\,u_0(x)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

En choisissant pour ψ une suite de fonctions convergeant vers u_1 dans $L^2(\Omega, H^1_\#(Y))$ (c'est possible par densité de $\mathscr{C}^\infty_0\big(\Omega, \mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big)$ dans cet espace), nous obtenons

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \frac{1}{2}\int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big)\cdot\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_\Omega f(x)\,u_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour terminer la démonstration, remarquons que le membre de droite peut être minoré puisque

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{\Omega\times Y} & A(y)\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big)\cdot\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &\geq \min_{v_1\in L^2(\Omega,H^1_\#(Y))} \frac{1}{2}\int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0 + \nabla_y v_1\big)\cdot\big(\nabla u_0 + \nabla_y v_1\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_\Omega A^*\nabla u_0\cdot\nabla u_0\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Cette dernière égalité vient de la caractérisation variationnelle de A^* vue au cours 3 : pour tout $\xi\in\mathbb{R}^d$,

$$A^*\xi\cdot\xi = \min_{\chi\in H^1_\#(Y)}\int_Y A(y)(\xi+\nabla_y\chi)\cdot(\xi+\nabla_y\chi)\,\mathrm{d}y,$$

le minimum étant atteint pour $\chi = \boldsymbol{w}\cdot\xi = \sum_i \xi_i w_i$. On l'applique pour presque tout x avec $\xi = \nabla u_0(x)$, puis on intègre en x ; le minimum en v_1 est atteint pour $v_1(x,y) = \nabla u_0(x)\cdot\boldsymbol{w}(y)$.
Nous obtenons ainsi

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq \frac{1}{2}\int_\Omega A^*\nabla u_0\cdot\nabla u_0\,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x)\,u_0(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{J}_0(u_0).$$

Cette inégalité a été obtenue pour une sous-suite réalisant la limite inférieure : elle vaut donc pour la suite initiale.

Γ-lim sup. La démonstration de cette partie de la Γ-convergence est parfois appelée *construction d'une suite de recouvrement* (recovery sequence). Il s'agit en effet, pour un $u_0\in H^1_0(\Omega)$ donné, de trouver une suite appropriée $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ dans $H^1_0(\Omega)$ qui converge vers u_0 dans L^2 et telle que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq \mathcal{J}_0(u_0).$$

Au vu des résultats précédents, nous construisons à partir des problèmes de cellule la structure microscopique $u_1(x,y) = \nabla u_0(x)\cdot\boldsymbol{w}(y)$, et une suite de recouvrement naturelle serait

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon\, u_1\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big).$$

Cependant, comme u_1 n'est pas nécessairement une fonction admissible (et u_ε n'est pas nécessairement dans $H^1_0(\Omega)$), nous devons légèrement affiner l'argument. Prenons une fonction $\psi_1\in\mathscr{C}^\infty_0\big(\Omega,\mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big)$ et considérons

$$u_\varepsilon(x) = u_0(x) + \varepsilon\,\psi_1\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\ \in H^1_0(\Omega).$$

On vérifie facilement que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2} = 0$$

(en effet $\|u_\varepsilon - u_0\|_{L^2}\leq \varepsilon\,|\Omega|^{1/2}\|\psi_1\|_{L^\infty}$). De plus, puisque $\nabla u_\varepsilon = \nabla u_0(x) + (\nabla_y\psi_1)\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \varepsilon(\nabla_x\psi_1)\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)$, les résultats de convergence à deux échelles donnent

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0 + \nabla_y\psi_1\big)\cdot\big(\nabla u_0 + \nabla_y\psi_1\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_\Omega f(x)\,u_0(x)\,\mathrm{d}x.$$

En choisissant maintenant ψ_1 convergeant vers u_1 dans $L^2(\Omega, H^1_\#(Y))$ et en remarquant que

$$\mathcal{J}_0(u_0) = \frac{1}{2}\int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big)\cdot\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_\Omega f(x)\,u_0(x)\,\mathrm{d}x,$$

(c'est l'égalité du minimum ci-dessus, atteint en $u_1 = \nabla u_0\cdot\boldsymbol{w}$), nous obtenons

$$\forall\eta>0,\ \exists(u_\varepsilon)_\varepsilon \text{ dans } H^1_0(\Omega) \text{ telle que } u_\varepsilon \xrightarrow[L^2]{} u_0 \text{ et } \lim_{\varepsilon\to 0}\mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon)\leq \mathcal{J}_0(u_0)+\eta,$$

ce qui est exactement (5) et suffit donc à établir la propriété de Γ-convergence. □

Corollaire 6

Soit u_ε la solution de $(\mathscr{P}_\varepsilon)$. Alors $u_\varepsilon \to u_0$ dans $L^2(\Omega)$, où u_0 est l'unique minimiseur de $\mathcal{J}_0$, c'est-à-dire la solution du problème homogénéisé $-\operatorname{div}(A^*\nabla u_0) = f$ dans Ω, $u_0 = 0$ sur $\partial\Omega$, et

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{J}_\varepsilon(u_\varepsilon) = \mathcal{J}_0(u_0).$$

Preuve. La suite (u_ε) est bornée dans $H^1_0(\Omega)$; par le théorème de Rellich, toute sous-suite admet une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$. D'après les théorèmes 5 et 2, la limite est un minimiseur de $\mathcal{J}_0$, qui est unique ($\mathcal{J}_0$ est strictement convexe car A^* est définie positive). Toute la suite converge donc vers u_0, et les énergies convergent. □

Remarque 7

La démonstration précédente utilise de manière essentielle le fait que le problème de cellule peut également être considéré comme un problème de minimisation. Plus précisément, pour un u_0 macroscopique donné, la structure microscopique représentée par u_1 est *celle* qui minimise

$$\int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big)\cdot\big(\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

On vérifie en effet facilement que le problème de cellule est la formulation variationnelle associée à ce problème de minimisation.

Remarque 8

Comme nous l'avons déjà signalé, la convergence n'a lieu qu'au sens fort dans L^2 ou au sens faible dans H^1. Bien que la topologie faible de H^1 ne soit pas métrisable en général, remarquons que la définition de la Γ-convergence n'exige pas que la topologie soit métrisable, mais seulement que l'on dispose d'une notion de convergence des suites. Nous pourrions donc (comme le font certains auteurs) utiliser à la place la topologie faible de H^1 pour démontrer tous les résultats précédents.