Cours 4 – Convergence double échelle

Sonia Fliss[1] **and François Alouges**[2]

[1]POEMS, UMA, Ensta Paris; [2]ENS Paris Saclay

✉ **Contact:**
sonia.fliss@ensta-paris.fr

Cours: Homogénéisation périodique – Master AMS

Abstract

On introduit dans ce cours la *convergence double échelle* (Nguetseng, Allaire), qui permet de capter à la fois les échelles 1 et ε. On énonce ensuite un certain nombre de propriétés importantes : résultat de compacité, fonctions test admissibles, et caractérisation de la limite double échelle des gradients d'une suite bornée dans H^1. On l'applique enfin pour justifier rigoureusement le passage à la limite vers le problème homogénéisé $-\operatorname{div}(A^*\nabla u_0) = f$.

Contents

1 Quelques résultats préliminaires 1

2 Définition et premières propriétés 4

3 Fonctions test moins régulières dans la convergence double échelle 6

4 Convergence double échelle de suites bornées dans $H^1(\Omega)$ 8

5 Homogénéisation par convergence double échelle 11
5.1 Passage à la limite dans la formulation variationnelle 11
5.2 Le problème homogénéisé à deux échelles 12
5.3 Conclusion : identification de la limite 13

La convergence double échelle permet

- de retrouver les équations limites en partant du problème original ;
- de justifier la convergence.

Comme nous l'avons vu dans les développements multi-échelles, il y a deux échelles dans le problème :

- une lente, la variable x : échelle 1 ;
- une rapide, la variable $\frac{x}{\varepsilon}$: échelle ε.

La convergence L^2 (faible) ne suffit pas pour capter ces deux échelles, car on a vu que pour $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ Y-périodique,

$$f_\varepsilon(x) = f\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \underset{L^2}{\rightharpoonup} \int_Y f = \langle f \rangle. \tag{1}$$

On a donc perdu l'échelle ε. La convergence double échelle capte les phénomènes aux échelles 1 et ε (mais elle filtre toutes les autres échelles).

1 Quelques résultats préliminaires

Commençons par démontrer le résultat précédent (1) en dimension quelconque.

Théorème 1: Convergence faible des fonctions périodiques oscillantes

Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ une fonction Y-périodique. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $g_\varepsilon(x) = g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Alors, pour tout domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et tout $h \in L^1(\Omega)$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega g_\varepsilon(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x = \langle g\rangle \int_\Omega h(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \text{où} \quad \langle g\rangle = \int_Y g(t)\, \mathrm{d}t.$$

Preuve. En écrivant $g_\varepsilon - \langle g\rangle$, on peut se ramener au cas où g est à moyenne nulle. On introduit l'unique fonction $G \in H^1_\#(Y)$ telle que $\nabla G \in H_\#(\mathrm{div}, Y)$, $-\triangle G = g$ et $\langle G\rangle = 0$. Comme $\langle g\rangle = 0$, G est bien définie et $\|G\|_{H^1(Y)} \le C\|g\|_{L^2(Y)} \le C\|g\|_{L^\infty(Y)}$ (c'est une application du dernier résultat du cours 1 avec $A = \mathrm{Id}$).

Soit $h \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega g_\varepsilon(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega [-\triangle G]\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) h(x)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega -\mathrm{div}\Big[\varepsilon\, [\nabla G]\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big] h(x)\, \mathrm{d}x = \varepsilon \int_\Omega [\nabla G]\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \cdot \nabla h(x)\, \mathrm{d}x.$$

On va montrer que $\|\nabla G(\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)}$ est uniformément borné (indépendamment de ε donc). Pour $\varepsilon \le 1$, on note $I_\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}^d : \varepsilon(k+Y) \cap \Omega \neq \emptyset\}$ et on obtient

$$\int_\Omega \Big|[\nabla G]\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^2 \mathrm{d}x \le \sum_{k\in I_\varepsilon} \int_{\varepsilon(k+Y)} \Big|[\nabla G]\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^2 \mathrm{d}x = \sum_{k\in I_\varepsilon} \varepsilon^d \int_Y |\nabla G(y)|^2\, \mathrm{d}y = \varepsilon^d\, \#I_\varepsilon\, \|\nabla G\|^2_{L^2(Y)}$$

où on a posé $x = \varepsilon(k+y)$ et utilisé la Y-périodicité de ∇G. Comme Ω est borné, il existe $R > 0$ tel que $\Omega \subset (-R, R)^d$. Pour $\varepsilon \le 1$, toute cellule $\varepsilon(k+Y)$ qui rencontre Ω est incluse dans $(-R-1, R+1)^d$; ces cellules étant disjointes et de mesure ε^d, on a $\varepsilon^d\, \#I_\varepsilon \le (2R+2)^d$. Par Cauchy–Schwarz, on obtient finalement

$$\Big|\varepsilon \int_\Omega [\nabla G]\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \cdot \nabla h(x)\, \mathrm{d}x\Big| \le \varepsilon\, (2R+2)^{d/2}\, \|\nabla G\|_{L^2(Y)}\, \|\nabla h\|_{L^2(\Omega)} \le C\, \varepsilon\, \|g\|_{L^\infty(Y)}\, \|\nabla h\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0.$$

On conclut enfin par densité de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$, grâce à la borne uniforme $\big|\int_\Omega g_\varepsilon h\, \mathrm{d}x\big| \le \|g\|_{L^\infty} \|h\|_{L^1(\Omega)}$: si $h_n \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ converge vers h dans $L^1(\Omega)$, alors $\limsup_{\varepsilon\to 0} \big|\int_\Omega g_\varepsilon h - \langle g\rangle \int_\Omega h\big| \le 2\|g\|_{L^\infty} \|h - h_n\|_{L^1(\Omega)}$ pour tout n. □

Lemme 2

Pour tout $\psi \in L^1\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, \mathrm{d}x = \int_{\Omega\times Y} \psi(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$

Preuve. Si $\psi(x,y) = \sum_{i=1}^N h_i(x) g_i(y)$ avec $h_i \in L^1(\Omega)$ et $g_i \in C_\#(Y)$, c'est le théorème 1 appliqué à chaque terme. Ces fonctions sont denses dans $L^1(\Omega; C_\#(Y))$ (voir le lemme 3), et

$$\Big|\int_\Omega \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, \mathrm{d}x\Big| \le \int_\Omega \sup_{y\in Y} |\psi(x,y)|\, \mathrm{d}x, \qquad \Big|\int_{\Omega\times Y} \psi\Big| \le \int_\Omega \sup_{y\in Y} |\psi(x,y)|\, \mathrm{d}x,$$

uniformément en ε.

On conclut par un argument classique. On note

$$I_\varepsilon(\psi) = \int_\Omega \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})\, \mathrm{d}x, \quad I(\psi) = \int_{\Omega\times Y} \psi$$

et $\|\psi\| = \int_\Omega \sup_{y\in Y} |\psi(x,y)|\, \mathrm{d}x$. Soit $\delta > 0$ et $\psi_\delta(x,y) = \sum_{i=1}^N h_i(x) g_i(y)$ tel que $\|\psi - \psi_\delta\| \le \delta$. Par linéarité,

$$|I_\varepsilon(\psi) - I(\psi)| \le |I_\varepsilon(\psi - \psi_\delta)| + |I_\varepsilon(\psi_\delta) - I(\psi_\delta)| + |I(\psi_\delta - \psi)| \le 2\delta + |I_\varepsilon(\psi_\delta) - I(\psi_\delta)|.$$

D'après le théorème 1, le dernier terme tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, donc $\limsup_{\varepsilon\to 0} |I_\varepsilon(\psi) - I(\psi)| \le 2\delta$, et ce pour tout $\delta > 0$. □

Dans la preuve du lemme précédent, nous avons utilisé un résultat de densité que nous démontrons ici.

Lemme 3: Densité des fonctions à variables séparées

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ et

$$\mathcal{T} = \Big\{ \psi(x,y) = \sum_{i=1}^{N} h_i(x)\, g_i(y) \ : \ N \in \mathbb{N},\ h_i \in L^\infty(\Omega),\ g_i \in C_\#(Y) \Big\}.$$

(i) Pour tout $\psi \in C\big(\overline{\Omega}; C_\#(Y)\big)$ et tout $\delta > 0$, il existe $\psi_\delta \in \mathcal{T}$ telle que

$$\sup_{x\in\Omega} \sup_{y\in Y} |\psi(x,y) - \psi_\delta(x,y)| \le \delta.$$

(ii) Pour $1 \le p < \infty$, $\mathcal{T}$ est dense dans $L^p\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$.

Proof. (i) L'application $x \mapsto \psi(x,\cdot)$ est continue de $\overline{\Omega}$, compact, dans $C_\#(Y)$; elle y est donc uniformément continue : il existe $\eta > 0$ tel que

$$|x - x'| \le \eta \implies \sup_{y\in Y} |\psi(x,y) - \psi(x',y)| \le \delta.$$

On choisit R tel que $\Omega \subset (-R,R)^d$, et on découpe $(-R,R)^d$ en cubes disjoints Q_i de côté $\rho = \eta/\sqrt{d}$ (donc de diamètre η). On note $\Omega_i = Q_i \cap \Omega$ (en nombre fini) et, pour chaque $\Omega_i \neq \emptyset$, on choisit $x_i \in \Omega_i$. On pose

$$\psi_\delta(x,y) = \sum_i \mathbf{1}_{\Omega_i}(x)\, \psi(x_i,y) \in \mathcal{T}.$$

Pour $x \in \Omega_i$, on a $|x - x_i| \le \eta$, d'où $\sup_y |\psi(x,y) - \psi_\delta(x,y)| = \sup_y |\psi(x,y) - \psi(x_i,y)| \le \delta$.

(ii) Comme dans le cas scalaire, $C\big(\overline{\Omega}; C_\#(Y)\big)$ est dense dans $L^p\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$ pour $1 \le p < \infty$. Soit $\psi \in L^p(\Omega; C_\#(Y))$ et $\delta > 0$; on choisit $\tilde{\psi} \in C(\overline{\Omega}; C_\#(Y))$ avec $\|\psi - \tilde{\psi}\|_{L^p(\Omega; C_\#(Y))} \le \delta$, puis $\psi_\delta \in \mathcal{T}$ donnée par (i) pour $\tilde{\psi}$. Alors

$$\|\psi - \psi_\delta\|_{L^p(\Omega; C_\#(Y))} \le \delta + |\Omega|^{1/p}\, \delta.$$

□

Lemme 4

Soit $\Omega \subset (-R,R)^d$ borné et g une fonction Y-périodique. On a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\Omega g\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, \mathrm{d}x = \int_{\Omega\times Y} g(y)\psi(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

dans chacun des deux cas suivants :

(i) $g \in L^\infty(Y)$ et $\psi \in L^1\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$;
(ii) $g \in L^1(Y)$ et $\psi \in C\big(\overline{\Omega}; C_\#(Y)\big)$.

Preuve. (i) C'est la preuve du lemme 2 : pour $\psi = \sum_i h_i(x) g_i(y)$, on applique le théorème 1 à $g\, g_i \in L^\infty(Y)$ et $h_i \in L^1(\Omega)$; on conclut par densité, avec la borne uniforme $\big|\int_\Omega g(\frac{x}{\varepsilon})\psi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,\mathrm{d}x\big| \le \|g\|_{L^\infty} \int_\Omega \sup_Y |\psi(x,\cdot)|\,\mathrm{d}x$.

(ii) Pour $\varepsilon \le 1$, en recouvrant Ω par les cellules $\varepsilon(k+Y)$ qui le rencontrent (incluses dans $(-R-1, R+1)^d$),

$$\int_\Omega \Big|g\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|\, \mathrm{d}x \le (2R+2)^d\, \|g\|_{L^1(Y)}.$$

Soit $g_k \in L^\infty(Y)$ avec $\|g - g_k\|_{L^1(Y)} \to 0$. Alors, uniformément en ε,

$$\Big| \int_\Omega (g - g_k)\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big) \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\, \mathrm{d}x \Big| \le (2R+2)^d\, \|\psi\|_\infty\, \|g - g_k\|_{L^1(Y)},$$

et de même pour la limite. On applique (i) à g_k (car $C(\overline{\Omega}; C_\#(Y)) \subset L^1(\Omega; C_\#(Y))$) et on conclut par continuité (comme précédemment). □

Remarque 5

Le lemme 2 est faux dans $L^2(\Omega \times Y)$. Les sommes $\sum_i h_i(x) g_i(y)$ restent denses dans $L^2(\Omega; L^2_\#(Y)) = L^2(\Omega \times Y)$; ce qui fait défaut est la majoration uniforme en ε

$$\left| \int_\Omega \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) \, \mathrm{d}x \right| \leq C \, \|\psi\|,$$

qui n'a lieu que pour la norme $\int_\Omega \sup_{y \in Y} |\psi(x,y)| \, \mathrm{d}x$. En fait, l'application $\psi \mapsto \psi(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon})$ n'est même pas définie sur $L^2(\Omega \times Y)$. Soit $\varepsilon_n = 1/n$ et

$$N = \bigcup_{n \geq 1} \left\{ \Big(x, \Big\{ \frac{x}{\varepsilon_n} \Big\}\Big) \ : \ x \in \Omega \right\} \subset \Omega \times Y,$$

où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire composante par composante. N est une réunion dénombrable de graphes, donc de mesure nulle dans $\Omega \times Y$. La fonction $\psi = \mathbf{1}_N$ est nulle dans $L^2(\Omega \times Y)$, mais

$$\int_\Omega \left| \psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\Big) \right|^2 \mathrm{d}x = |\Omega| \neq 0 = \int_{\Omega \times Y} |\psi|^2 \qquad \forall n.$$

C'est pourquoi on impose de la régularité dans l'une des deux variables : continuité en y ($\psi \in L^1(\Omega; C_\#(Y))$, lemme 2) ou continuité en x ($\psi \in C(\overline{\Omega}; L^1_\#(Y))$: le résultat reste vrai dans ce cas, ce que nous admettrons ; le cas (ii) du lemme 4 en est un cas particulier).

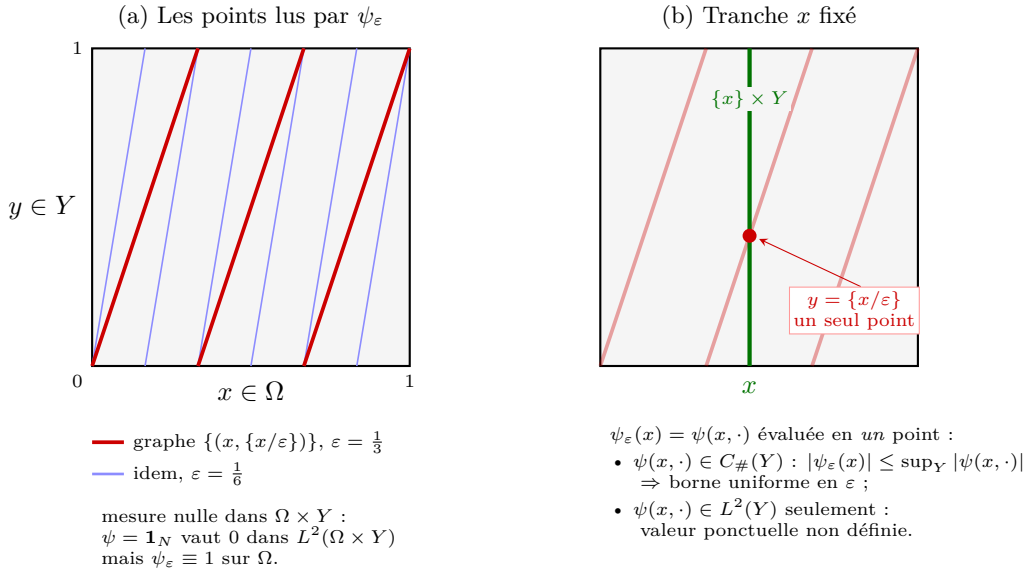


Figure 1. La fonction $\psi_\varepsilon(x) = \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ ne lit ψ que sur un graphe de mesure nulle de $\Omega \times Y$ (a), c'est-à-dire en un seul point y de chaque tranche $\{x\} \times Y$ (b). Sans régularité en y, cette lecture ponctuelle n'est pas contrôlée par $\|\psi\|_{L^2(\Omega \times Y)}$.

2 Définition et premières propriétés

Nous pouvons maintenant introduire la convergence double échelle.

Définition 6: Convergence double échelle

Soient $(u_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ une famille de fonctions bornées dans $L^2(\Omega)$ et $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$. On dit que u_ε *converge double échelle* vers u_0, et on note $u_\varepsilon \rightsquigarrow u_0$, si

$$\forall \varphi \in \mathscr{C}^\infty_0\big(\Omega, \mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big), \qquad \int_\Omega u_\varepsilon(x) \, \varphi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) \, \mathrm{d}x \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega \times Y} u_0(x,y) \, \varphi(x,y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Notons que dans cette définition u_ε dépend d'une variable $x \in \Omega$, alors que sa limite deux échelles u_0 dépend de deux variables $(x, y) \in \Omega \times Y$.

Théorème 7: Résultat de compacité

Soit $\varepsilon_n \to 0$ et (v_{ε_n}) une suite bornée dans $L^2(\Omega)$; alors il existe une sous-suite (encore notée ε_n) et une fonction $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ telles que v_{ε_n} converge à deux échelles vers v_0.

Preuve du théorème. Les étapes sont celles de la preuve du résultat suivant : "Si E est un espace de Banach séparable, de toute suite bornée de E' on peut extraire une sous-suite faible-$*$ convergente." (Dans un espace de Hilbert séparable, on en déduit avec le théorème de Riesz que toute suite bornée admet une sous-suite faiblement convergente.) On note $(h_p)_p$ une famille dénombrable dense dans E et $(\mu_n)_n$ une suite bornée de E'.

① par extraction diagonale, on construit une sous-suite telle que $\big(\mu_{\sigma(n)}(h_p)\big)_n$ converge pour tout p ;
② par densité et bornitude uniforme, $\big(\mu_{\sigma(n)}(h)\big)_n$ converge pour tout $h \in E$, vers $\mu(h)$ avec $\mu \in E'$;
③ on identifie μ (ici à l'aide du théorème de Riesz).

Détaillons la preuve pour la convergence double échelle. On introduit $E = L^2\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$ muni de la norme

$$\|\varphi\|_E \coloneqq \Big(\int_\Omega \sup_{y\in Y} |\varphi(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x \Big)^{1/2}.$$

C'est un espace de Banach séparable : $C_\#(Y)$ est séparable (les polynômes trigonométriques à coefficients rationnels y sont denses, par Stone–Weierstrass), donc $L^2(\Omega; C_\#(Y))$ l'est aussi.

Pour $\varphi \in E$, on pose

$$\mu_n(\varphi) = \int_\Omega v_{\varepsilon_n}(x)\, \varphi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon_n}\Big)\,\mathrm{d}x.$$

Par Cauchy–Schwarz, avec $C = \sup_n \|v_{\varepsilon_n}\|_{L^2(\Omega)}$,

$$|\mu_n(\varphi)| \le C \left\| \varphi\Big(\cdot, \frac{\cdot}{\varepsilon_n}\Big) \right\|_{L^2(\Omega)} \le C\, \|\varphi\|_E, \tag{2}$$

donc (μ_n) est bornée dans E'.

① *Extraction diagonale.* Soit $(h_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable dense de E. La suite réelle $(\mu_n(h_0))_n$ est bornée : il existe une extraction σ_0 telle que $\big(\mu_{\sigma_0(n)}(h_0)\big)_n$ converge. Par récurrence, on construit des extractions σ_p telles que $\big(\mu_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_p(n)}(h_p)\big)_n$ converge. On pose $\sigma(n) = \sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_n(n)$. Pour $n \ge p$, $(\sigma(n))_{n\ge p}$ est extraite de $(\sigma_0 \circ \cdots \circ \sigma_p(n))_n$, donc $\big(\mu_{\sigma(n)}(h_p)\big)_n$ converge pour tout p.

② *Convergence sur tout E.* Soit $\varphi \in E$ et $\delta > 0$; on choisit p tel que $\|\varphi - h_p\|_E \le \delta$. Alors

$$|\mu_{\sigma(n)}(\varphi) - \mu_{\sigma(m)}(\varphi)| \le 2C\delta + |\mu_{\sigma(n)}(h_p) - \mu_{\sigma(m)}(h_p)|,$$

donc $\big(\mu_{\sigma(n)}(\varphi)\big)_n$ est de Cauchy et converge vers une limite notée $\mu(\varphi)$. L'application μ est linéaire.

③ *Identification de la limite.* Comme $|\varphi|^2 \in L^1(\Omega; C_\#(Y))$, le lemme 2 donne

$$\int_\Omega \Big|\varphi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^2 \,\mathrm{d}x \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \int_{\Omega\times Y} |\varphi(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

En passant à la limite dans (2), on obtient

$$|\mu(\varphi)| \le C\, \|\varphi\|_{L^2(\Omega\times Y)} \qquad \forall \varphi \in E.$$

Comme E est dense dans $L^2(\Omega \times Y)$ (il contient $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega; C_\#^\infty(Y))$), μ se prolonge de manière unique en une forme linéaire continue sur $L^2(\Omega \times Y)$. Le théorème de Riesz fournit alors $v_0 \in L^2(\Omega \times Y)$ tel que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega v_{\varepsilon_{\sigma(n)}}(x)\, \varphi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon_{\sigma(n)}}\Big)\,\mathrm{d}x = \mu(\varphi) = \int_{\Omega\times Y} v_0(x,y)\, \varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad \forall \varphi \in E,$$

c'est-à-dire que $v_{\varepsilon_{\sigma(n)}}$ converge à deux échelles vers v_0. □

Théorème 8

Si $u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup u_0$, alors $u_\varepsilon \underset{L^2}{\rightharpoonup} \int_Y u_0(x,y)\,\mathrm{d}y =: \bar{u}(x)$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, et

$$\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega\times Y)}.$$

Preuve. On sait que, $\forall \varphi \in \mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)$,

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\varphi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\,\varphi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Si on prend $\varphi(x,y)=\psi(x)$ avec $\psi\in\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$:

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\psi(x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Omega \bar{u}(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x.$$

On conclut par densité de $\mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$. En effet, soit $\psi\in L^2$ et $\psi_n\in\mathscr{C}_0^\infty$ avec $\psi_n\to\psi$. On a

$$\Big|\int (u_\varepsilon-\bar{u})\psi\Big| \leq \Big|\int (u_\varepsilon-\bar{u})\psi_n\Big| + \big(\sup_\varepsilon \|u_\varepsilon\| + \|\bar{u}\|\big)\|\psi-\psi_n\|,$$

et on utilise que (u_ε) est bornée. Enfin,

$$\|\bar{u}\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \Big|\int_Y u_0(x,y)\,\mathrm{d}y\Big|^2\,\mathrm{d}x \underset{\text{C.S.}}{\leq} \int_\Omega\int_Y |u_0(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \|u_0\|^2_{L^2(\Omega\times Y)}$$

où on a utilisé une inégalité de Cauchy–Schwarz sur Y, avec $|Y|=1$. □

Proposition 9: Semi-continuité inférieure de la norme

Si $u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup u_0$, alors

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} \;\geq\; \|u_0\|_{L^2(\Omega\times Y)}.$$

Preuve. Soit $\varphi\in\mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega,\mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)$. Par Cauchy–Schwarz,

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\,\varphi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x \leq \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\,\Big\|\varphi\Big(\cdot,\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big\|_{L^2(\Omega)}.$$

Le membre de gauche tend vers $\int_{\Omega\times Y} u_0\varphi$ et, d'après le lemme 2 appliqué à $|\varphi|^2$, $\|\varphi(\cdot,\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{L^2(\Omega)}\to\|\varphi\|_{L^2(\Omega\times Y)}$. Donc

$$\int_{\Omega\times Y} u_0\,\varphi\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \leq \Big(\liminf_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\Big)\|\varphi\|_{L^2(\Omega\times Y)}.$$

On prend alors une suite $\varphi_n\in\mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega,\mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)$ qui converge vers u_0 dans $L^2(\Omega\times Y)$ et on passe à la limite : $\|u_0\|^2_{L^2(\Omega\times Y)} \leq \big(\liminf_\varepsilon\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}\big)\|u_0\|_{L^2(\Omega\times Y)}$. □

Remarque 10

Comme pour la convergence faible, la norme ne peut que « diminuer » à la limite. Le cas d'égalité $\lim_{\varepsilon\to 0}\|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} = \|u_0\|_{L^2(\Omega\times Y)}$ correspond à une convergence double échelle « forte » : c'est exactement l'hypothèse faite sur (ψ_ε) dans le théorème 11 ci-dessous.

3 Fonctions test moins régulières dans la convergence double échelle

Dans la suite, on aura besoin d'autres fonctions test pour la convergence double échelle, qui sont moins régulières que celles de $\mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega,\mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)$.

Théorème 11

Soit (ψ_ε) une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$ qui converge à deux échelles vers $\psi_0 \in L^2(\Omega \times Y)$. Si de plus

$$\int_\Omega |\psi_\varepsilon(x)|^2 \,\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times Y} |\psi_0(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

alors pour toute suite (u_ε) qui converge double échelle vers $u_0 \in L^2(\Omega \times Y)$, on a

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x \;\longrightarrow\; \int_{\Omega\times Y} u_0(x,y)\psi_0(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Preuve. ① Par densité de $\mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)$ dans $L^2(\Omega\times Y)$, il existe une suite $\varphi_n \in \mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)$ telle que $\varphi_n \to \psi_0$ fortement dans $L^2(\Omega\times Y)$. On a :

$$\int_\Omega \Big(\psi_\varepsilon(x) - \varphi_n\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)^2 \,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_\Omega \psi_\varepsilon^2 \,\mathrm{d}x}_{\substack{\downarrow \text{ par hyp.}\\ \int_{\Omega\times Y}\psi_0^2}} - 2\underbrace{\int_\Omega \psi_\varepsilon(x)\varphi_n\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x}_{\substack{\downarrow \text{ car } \psi_\varepsilon \rightharpoonup \psi_0\\ \int_\Omega\int_Y \psi_0\varphi_n}} + \underbrace{\int_\Omega \varphi_n\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)^2 \,\mathrm{d}x}_{\downarrow\ ②}.$$

② Comme $\varphi_n \in \mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big) \subset L^2\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$, on a $\varphi_n^2 \in L^1\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$, et le lemme 2 donne

$$\int_\Omega \varphi_n\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)^2 \,\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times Y} \varphi_n(x,y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ainsi d'après ① et ②,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \big(\psi_\varepsilon(x) - \varphi_n(x,\tfrac{x}{\varepsilon})\big)^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{\Omega\times Y}\psi_0^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - 2\int_{\Omega\times Y}\psi_0\,\varphi_n\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_{\Omega\times Y}\varphi_n^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \|\psi_0 - \varphi_n\|^2_{L^2(\Omega\times Y)}.\end{aligned}$$

③ On a

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)\psi_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_\Omega u_\varepsilon(x)\varphi_n\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x}_{\substack{\downarrow\ \varepsilon\to 0\\ \int_\Omega\int_Y u_0(x,y)\varphi_n(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}} + \underbrace{\int_\Omega u_\varepsilon(x)\Big(\psi_\varepsilon(x) - \varphi_n\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big)\,\mathrm{d}x}_{|\cdot| \,\le\, \|\psi_\varepsilon - \varphi_n(\cdot,\frac{\cdot}{\varepsilon})\|_{L^2}\,\|u_\varepsilon\|_{L^2}},$$

Plus précisément, pour tout n,

$$\limsup_{\varepsilon\to 0}\Big|\int_\Omega u_\varepsilon\psi_\varepsilon - \iint u_0\psi_0\Big| \le \|u_0\|_{L^2}\|\varphi_n - \psi_0\|_{L^2} + \sup_\varepsilon\|u_\varepsilon\|_{L^2}\ \limsup_{\varepsilon\to 0}\Big\|\psi_\varepsilon - \varphi_n\Big(\cdot,\frac{\cdot}{\varepsilon}\Big)\Big\|_{L^2},$$

et le membre de droite tend vers 0 quand $n\to\infty$. □

Corollaire 12: Version locale

Sous les hypothèses du théorème 11, pour toute suite (u_ε) qui converge double échelle vers u_0,

$$u_\varepsilon\,\psi_\varepsilon \;\longrightarrow\; \int_Y u_0(\cdot,y)\,\psi_0(\cdot,y)\,\mathrm{d}y \qquad \text{dans } \mathscr{D}'(\Omega).$$

Preuve. Soit $\phi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$. La suite $(\phi\,u_\varepsilon)$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ et converge à deux échelles vers $\phi\,u_0$: pour $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)$, $\int_\Omega \phi\,u_\varepsilon\,\varphi(x,\frac{x}{\varepsilon})\,\mathrm{d}x = \int_\Omega u_\varepsilon\,(\phi\varphi)(x,\frac{x}{\varepsilon})\,\mathrm{d}x$ avec $\phi\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)$. Le théorème 11 appliqué à (ϕu_ε) donne $\int_\Omega u_\varepsilon\psi_\varepsilon\,\phi\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \Big(\int_Y u_0\psi_0\,\mathrm{d}y\Big)\phi\,\mathrm{d}x$. □

Définition 13: Fonction admissible

On dit qu'une fonction $\psi \in L^2(\Omega\times Y)$, définie en tout point (et non à un ensemble de mesure nulle près, voir la remarque 15), est *admissible* si $\psi_\varepsilon(x) = \psi\big(x,\frac{x}{\varepsilon}\big)$ définit une fonction mesurable de $L^2(\Omega)$

telle que ψ_ε converge à deux échelles vers ψ et

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega |\psi_\varepsilon(x)|^2\,\mathrm{d}x = \int_\Omega\int_Y |\psi(x,y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Corollaire 14: Exemples de fonctions admissibles

Soit Ω un ouvert borné. Les fonctions suivantes sont admissibles :

① $\psi \in L^2\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$ (en particulier $\psi \in \mathscr{C}_0^0\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$ ou $\psi \in C\big(\overline{\Omega}; C_\#(Y)\big)$) ;
② $\psi(x,y) = \psi_1(x)\psi_2(y)$ avec
  (a) $\psi_1 \in L^2(\Omega)$ et $\psi_2 \in L^\infty_\#(Y)$, ou
  (b) $\psi_1 \in C(\overline{\Omega})$ et $\psi_2 \in L^2_\#(Y)$.

De plus, si ψ est de l'un des types ci-dessus et $\theta \in C\big(\overline{\Omega}; C_\#(Y)\big)$, alors $\theta\psi$ est admissible. Enfin, une somme finie de fonctions admissibles est admissible.

Proof. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big)$. Pour chacun des cas, il faut établir

$$\int_\Omega \psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\varphi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega\times Y}\psi\varphi \quad\text{et}\quad \int_\Omega \Big|\psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big|^2\,\mathrm{d}x \to \int_{\Omega\times Y}|\psi|^2.$$

Pour $\theta \in C(\overline{\Omega}; C_\#(Y))$ (avec $\theta = 1$ pour les cas ①–②), on traite directement $\theta\psi$.

① $\theta\psi\varphi$ et $|\theta\psi|^2$ appartiennent à $L^1\big(\Omega; C_\#(Y)\big)$ (Ω est borné et θ, φ sont bornées) : on applique le lemme 2.

②(a) On applique le lemme 4 (i) avec $g = \psi_2$ et $\theta\psi_1\varphi \in L^1(\Omega; C_\#(Y))$, puis avec $g = \psi_2^2 \in L^\infty_\#(Y)$ et $|\theta|^2\psi_1^2 \in L^1(\Omega; C_\#(Y))$.

②(b) On applique le lemme 4 (ii) avec $g = \psi_2 \in L^1_\#(Y)$ et $\theta\psi_1\varphi \in C(\overline{\Omega}; C_\#(Y))$, puis avec $g = \psi_2^2 \in L^1_\#(Y)$ et $|\theta|^2\psi_1^2 \in C(\overline{\Omega}; C_\#(Y))$.

Somme. Si $\psi = \psi^1 + \psi^2$ avec ψ^1, ψ^2 admissibles, la convergence double échelle de ψ_ε vers ψ découle de la linéarité, et $\int_\Omega |\psi_\varepsilon|^2 = \int_\Omega |\psi^1_\varepsilon|^2 + 2\int_\Omega \psi^1_\varepsilon\psi^2_\varepsilon + \int_\Omega |\psi^2_\varepsilon|^2$, où le terme croisé converge vers $2\int_{\Omega\times Y}\psi^1\psi^2$ d'après le théorème 11 (appliqué avec $u_\varepsilon = \psi^1_\varepsilon$ et la suite ψ^2_ε). □

Remarque 15

Une fonction quelconque de $L^2(\Omega\times Y)$ n'est pas admissible en général : la trace $x \mapsto \psi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ n'est même pas bien définie, puisque $\{(x, x/\varepsilon)\}$ est de mesure nulle dans $\Omega\times Y$. C'est pourquoi on demande de la régularité en y (cas ①), ou une structure produit (cas ②). En revanche, l'ensemble des fonctions admissibles est dense dans $L^2(\Omega\times Y)$, puisqu'il contient $\mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big)$.

4 Convergence double échelle de suites bornées dans $H^1(\Omega)$

On passe maintenant à la convergence double échelle de suites de fonctions bornées dans $H^1(\Omega)$.

Théorème 16

Soit (u_ε) une suite de fonctions de $H^1(\Omega)$ telle que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u_0 \quad \text{faiblement dans } H^1(\Omega).$$

Alors $u_\varepsilon \overset{2}{\rightharpoonup} u_0$ et il existe une fonction $u_1 \in L^2\big(\Omega, H^1_\#(Y)\big)$ (unique si on impose $u_1 \in L^2\big(\Omega, \dot{H}^1_\#(Y)\big)$, c'est-à-dire $\int_Y u_1(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ p.p. x) telle que

$$\nabla u_\varepsilon \overset{2}{\rightharpoonup} \nabla u_0 + \nabla_y u_1 \qquad \text{(à une extraction près)}.$$

Preuve. Si $u_\varepsilon \rightharpoonup u_0$ dans H^1, alors (u_ε) est bornée dans H^1. Donc, d'après le théorème 7, à extraction près

$$u_\varepsilon \overset{2}{\rightharpoonup} \tilde{u}_0 \in L^2(\Omega\times Y), \qquad \nabla u_\varepsilon \overset{2}{\rightharpoonup} \boldsymbol{U}_0 \in L^2(\Omega\times Y)^d,$$

et $u_0(x) = \int_Y \tilde{u}_0(x,y)\,\mathrm{d}y$ d'après le théorème 8.

① *Montrons que $\tilde{u}_0$ ne dépend pas de y.* Par définition de la dérivation au sens des distributions, $\forall \Psi \in \mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)^d$,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot \Psi\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x &= -\int_\Omega u_\varepsilon(x)\ \mathrm{div}\left(\Psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_\Omega u_\varepsilon(x)\Big[(\mathrm{div}_x\,\Psi)\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big) + \frac{1}{\varepsilon}(\mathrm{div}_y\,\Psi)\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

D'où

$$\int_\Omega u_\varepsilon(x)(\mathrm{div}_y\,\Psi)\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x = \underbrace{-\varepsilon\int_\Omega \nabla u_\varepsilon\cdot\Psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x}_{\downarrow 0}\ \underbrace{-\ \varepsilon\int_\Omega u_\varepsilon(x)(\mathrm{div}_x\,\Psi)\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x}_{\downarrow 0}$$

car chaque intégrale est un $O(1)$ puisque $\|u_\varepsilon\|_{H^1}$ est bornée et Ψ, $\mathrm{div}_x\,\Psi$ sont bornées. Ainsi

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega u_\varepsilon(x)(\mathrm{div}_y\,\Psi)\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x = 0 \ \Rightarrow\ \int_{\Omega\times Y}\tilde{u}_0(x,y)\,(\mathrm{div}_y\,\Psi)(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0.$$

En prenant $\Psi(x,y) = \varphi_1(x)\Phi_2(y)$ avec $\varphi_1 \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ et $\Phi_2 \in \big[\mathscr{C}_0^\infty(Y)\big]^d \subset \big[\mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big]^d$:

$$\int_\Omega\Big[\int_Y \nabla_y\tilde{u}_0(x,y)\cdot\Phi_2(y)\,\mathrm{d}y\Big]\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = 0,\quad \forall\varphi_1\in\mathscr{C}_0^\infty(\Omega),\ \Phi_2\in\big[\mathscr{C}_0^\infty(Y)\big]^d$$

donc, pour chaque Φ_2, $\int_Y \nabla_y\tilde{u}_0(x,y)\cdot\Phi_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$ pour presque tout x. L'ensemble négligeable dépendant a priori de Φ_2, on applique ceci à une famille dénombrable $(\Phi_2^k)_k$ dense dans $\big[\mathscr{C}_0^\infty(Y)\big]^d$: en dehors d'un ensemble négligeable (réunion dénombrable d'ensembles négligeables), on a

$$\int_Y \nabla_y\tilde{u}_0(x,y)\cdot\Phi_2(y)\,\mathrm{d}y = 0\quad \forall\Phi_2\in\big[\mathscr{C}_0^\infty(Y)\big]^d.$$

Ceci implique que $\nabla_y\tilde{u}_0(x,\cdot) = 0$ dans $\mathscr{D}'(Y)$ p.p. x et donc, Y étant connexe, $\tilde{u}_0$ est indépendant de y.

② *Identification de $\boldsymbol{U}_0$.* Soit $\Psi\in\mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega,\mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)^d$ telle que $\mathrm{div}_y\,\Psi(x,y) = 0$. Alors d'après le calcul précédent

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon\cdot\Psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x + \int_\Omega u_\varepsilon(x)(\mathrm{div}_x\,\Psi)\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x = 0,$$

et donc en passant à la limite

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \nabla u_\varepsilon\cdot\Psi\Big(x,\frac{x}{\varepsilon}\Big)\,\mathrm{d}x = -\int_{\Omega\times Y} u_0(x)\ \mathrm{div}_x\,\Psi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\int_{\Omega\times Y}\boldsymbol{U}_0(x,y)\cdot\Psi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\int_{\Omega\times Y}u_0(x)\ \mathrm{div}_x\,\Psi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\Omega\times Y}\nabla u_0(x)\cdot\Psi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

soit

$$\int_{\Omega\times Y}\big(\boldsymbol{U}_0(x,y) - \nabla u_0(x)\big)\cdot\Psi(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0\qquad \forall\Psi,\ \mathrm{div}_y\,\Psi = 0.$$

Lemme 17: Décomposition de Helmholtz

Soient

$$E = \big\{\Psi\in L^2(\Omega\times Y)^d,\ \mathrm{div}_y\,\Psi = 0 \text{ dans } \mathscr{D}'\big\}\qquad \text{(champs à divergence nulle)},$$
$$F = \big\{\Phi\in L^2(\Omega\times Y)^d,\ \exists p\in L^2\big(\Omega,H^1_\#(Y)\big),\ \Phi = \nabla_y p\big\}\qquad \text{(champs de gradient)}.$$

Alors $L^2(\Omega\times Y)^d = E \overset{\perp}{\oplus} F$ c'est à dire $\forall \boldsymbol{f}\in L^2(\Omega\times Y)^d$, $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}_E + \boldsymbol{f}_F$ avec

$$\boldsymbol{f}_E\in E,\quad \int_{\Omega\times Y}\boldsymbol{f}_E\cdot\Psi = \int_{\Omega\times Y}\boldsymbol{f}\cdot\Psi\quad\forall\Psi\in E,$$
$$\boldsymbol{f}_F\in F,\quad \int_{\Omega\times Y}\boldsymbol{f}_F\cdot\nabla_y p = \int_{\Omega\times Y}\boldsymbol{f}\cdot\nabla_y p\quad\forall p\in L^2\big(\Omega,H^1_\#(Y)\big).$$

Éléments de preuve. Ici, « $\operatorname{div}_y \Psi = 0$ » s'entend au sens périodique :

$$\int_{\Omega\times Y} \Psi \cdot \nabla_y p = 0 \quad \text{pour tout} \quad p \in L^2(\Omega, H^1_\#(Y));$$

ainsi $E = F^\perp$ par définition. De plus, F est fermé : si $\nabla_y p_n \to \Phi$, on peut supposer $\int_Y p_n(x,\cdot) = 0$, et l'inégalité de Poincaré–Wirtinger en y montre que (p_n) est de Cauchy dans $L^2(\Omega, H^1_\#(Y))$. Donc $L^2 = F \oplus F^\perp = F \oplus E$.

Retour à la preuve du théorème. Pour appliquer le lemme, on utilise aussi (admis) que les $\Psi \in \mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big)^d$ à divergence (en y) nulle sont denses dans E : l'orthogonalité obtenue pour les champs réguliers s'étend alors à tout E, d'où $\boldsymbol{U}_0 - \nabla u_0 \in E^\perp = F$.

Ici, on a donc $\boldsymbol{U}_0(x,y) - \nabla u_0(x) \in F$: c'est un champ de gradient,

$$\exists u_1 \in L^2\big(\Omega, H^1_\#(Y)\big), \qquad \boldsymbol{U}_0(x,y) - \nabla u_0(x) = \nabla_y u_1(x,y). \qquad \square$$

Une preuve sans résultat admis : décomposition de Helmholtz dans la cellule

On peut éviter le résultat de densité admis ci-dessus en travaillant à x fixé et en utilisant les séries de Fourier sur Y. Pour $u \in L^2_\#(Y)$ (à valeurs complexes), on écrit

$$u(y) = \sum_{N\in\mathbb{Z}^d} u_N\, e^{2i\pi N\cdot y}, \qquad \|u\|^2_{L^2(Y)} = \sum_{N\in\mathbb{Z}^d} |u_N|^2 \quad \text{(Parseval)},$$

$$u \in H^1_\#(Y) \iff \sum_{N\in\mathbb{Z}^d} (1 + 4\pi^2|N|^2)|u_N|^2 < +\infty.$$

Lemme 18: Helmholtz dans la cellule

Soit $E_Y = \big\{\psi \in L^2_\#(Y)^d,\ \operatorname{div}_y \psi = 0\big\}$. Alors

(i) $E_Y^\perp = \nabla_y \dot H^1_\#(Y)$, l'orthogonal étant pris dans $L^2(Y)^d$;
(ii) les polynômes trigonométriques à divergence nulle sont denses dans E_Y.

Preuve. Pour $\psi = \sum_N \psi_N e^{2i\pi N\cdot y}$, on a $\operatorname{div}_y \psi = \sum_N 2i\pi\,(N\cdot\psi_N)\, e^{2i\pi N\cdot y}$, donc

$$\psi \in E_Y \iff N\cdot\psi_N = 0 \quad \forall N \in \mathbb{Z}^d.$$

(ii) Les sommes partielles $\sum_{|N|\le M} \psi_N e^{2i\pi N\cdot y}$ de $\psi \in E_Y$ vérifient encore cette condition et convergent vers ψ dans $L^2(Y)^d$.

(i) Si $u \in \dot H^1_\#(Y)$, une intégration par parties (sans terme de bord, par périodicité) donne $(\nabla_y u, \psi)_{L^2(Y)} = 0$ pour tout $\psi \in E_Y$, donc $\nabla_y \dot H^1_\#(Y) \subset E_Y^\perp$. Réciproquement, soit $\phi = \sum_N \phi_N e^{2i\pi N\cdot y} \in E_Y^\perp$. En testant avec $\psi = c\, e^{2i\pi N\cdot y}$, où $c \in \mathbb{C}^d$ vérifie $N\cdot c = 0$, on obtient $\phi_N \cdot \overline{c} = 0$. Comme N est réel, $\overline{c}$ décrit aussi l'hyperplan $\{d \in \mathbb{C}^d,\ N\cdot d = 0\}$: on a donc $\phi_N \cdot d = 0$ pour tout d de cet hyperplan, ce qui signifie que ϕ_N est colinéaire à N. Pour $N = 0$, tout c est autorisé, donc $\phi_0 = 0$. On peut donc écrire $\phi_N = 2i\pi\,\theta_N\, N$ pour $N \neq 0$, avec

$$\sum_{N\neq 0} 4\pi^2|N|^2|\theta_N|^2 = \sum_N |\phi_N|^2 < +\infty.$$

En posant $u = \sum_{N\neq 0} \theta_N\, e^{2i\pi N\cdot y}$, on a $u \in \dot H^1_\#(Y)$ et $\nabla_y u = \phi$. Si ϕ est à valeurs réelles, $\phi_{-N} = \overline{\phi_N}$, donc $\theta_{-N} = \overline{\theta_N}$ et u est à valeurs réelles. $\square$

Application à l'étape ② de la preuve du théorème 16. Prenons $\Psi(x,y) = \varphi_1(x)\Phi_2(y)$, où $\varphi_1 \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$ et Φ_2 est un polynôme trigonométrique réel à divergence nulle (c'est bien un élément de $\mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big)^d$ tel que $\operatorname{div}_y \Psi = 0$). On obtient

$$\int_\Omega \Big[\int_Y \big(\boldsymbol{U}_0(x,y) - \nabla u_0(x)\big)\cdot \Phi_2(y)\,\mathrm{d}y\Big]\varphi_1(x)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall \varphi_1 \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega),$$

donc $\int_Y (\boldsymbol{U}_0(x,y) - \nabla u_0(x))\cdot\Phi_2(y)\,\mathrm{d}y = 0$ pour presque tout x. Les polynômes trigonométriques à divergence nulle et à coefficients rationnels forment une famille dénombrable, dense dans E_Y d'après le lemme 18 (ii)

(parties réelle et imaginaire comprises). En dehors d'un ensemble négligeable, on a donc $\boldsymbol{U}_0(x,\cdot)-\nabla u_0(x) \in E_Y^\perp$, et le lemme 18 (i) donne un unique $u_1(x,\cdot) \in \dot{H}^1_\#(Y)$ tel que

$$\boldsymbol{U}_0(x,y) - \nabla u_0(x) = \nabla_y u_1(x,y).$$

Enfin, les coefficients de Fourier

$$\theta_N(x) = \frac{\big(\boldsymbol{U}_0(x,\cdot) - \nabla u_0(x)\big)_N \cdot N}{2i\pi|N|^2}$$

sont mesurables en x et $\|\nabla_y u_1(x,\cdot)\|_{L^2(Y)} = \|\boldsymbol{U}_0(x,\cdot) - \nabla u_0(x)\|_{L^2(Y)}$: on a bien $u_1 \in L^2\big(\Omega, \dot{H}^1_\#(Y)\big)$.

5 Homogénéisation par convergence double échelle

On revient au problème

$$(\mathscr{P}_\varepsilon) \qquad \begin{cases} -\operatorname{div}\big(A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon\big) = f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

(u_ε) est bornée dans $H^1_0(\Omega)$.

On rappelle qu'en écrivant la formulation variationnelle avec u_ε comme fonction test,

$$c\,\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}^2 \le \int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla u_\varepsilon = \int_\Omega f\, u_\varepsilon \le \|f\|_{L^2}\|u_\varepsilon\|_{L^2} \le C_P \|f\|_{L^2}\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2},$$

d'où $\|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2} \le C_P\|f\|_{L^2}/c$ (d'après l'inégalité de Poincaré) et donc, à extraction près,

$$u_\varepsilon \underset{H^1_0}{\rightharpoonup} u_0 \qquad \text{et} \qquad u_\varepsilon \underset{L^2}{\longrightarrow} u_0 \text{ (d'après le théorème de Rellich).}$$

On applique le théorème 16 : il existe $u_1 \in L^2(\Omega, H^1_\#(Y))$ tel que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup u_0, \qquad \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\!\rightharpoonup \nabla u_0 + \nabla_y u_1.$$

5.1 Passage à la limite dans la formulation variationnelle

Montrons que u_0 vérifie l'équation homogénéisée. Pour cela, on teste la formulation variationnelle de $(\mathscr{P}_\varepsilon)$ avec

$$v_0(x) + \varepsilon\, v_1\big(x, \tfrac{x}{\varepsilon}\big), \text{ où } v_0 \in \mathscr{C}^\infty_0(\Omega) \text{ et } v_1 \in \mathscr{C}^\infty_0\big(\Omega, \mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big).$$

Comme

$$\nabla\big[v_1(x, \tfrac{x}{\varepsilon})\big] = (\nabla_x v_1)(x, \tfrac{x}{\varepsilon}) + \frac{1}{\varepsilon}(\nabla_y v_1)(x, \tfrac{x}{\varepsilon})$$

ceci nous donne :

$$\int_\Omega A_\varepsilon \nabla u_\varepsilon(x) \cdot \Big[\nabla v_0 + \varepsilon \nabla_x v_1\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) + \nabla_y v_1\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\,\mathrm{d}x = \langle f, v_0 + \varepsilon v_1\rangle,$$

soit

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot {}^t A_\varepsilon \Big[\nabla v_0 + \varepsilon \nabla_x v_1\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big) + \nabla_y v_1\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\,\mathrm{d}x = \langle f, v_0 + \varepsilon v_1\rangle.$$

On remarque que $(x,y) \mapsto {}^t A(y)\big[\nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x,y)\big]$ est une fonction admissible (chaque composante est une somme de produits d'une fonction de $L^\infty_\#(Y)$ et d'une fonction de $\mathscr{C}^\infty_0\big(\Omega, \mathscr{C}^\infty_\#(Y)\big)$, il suffit d'utiliser le corollaire 14). Par le théorème 11,

$$\int_\Omega \nabla u_\varepsilon(x) \cdot {}^t A_\varepsilon \Big[\nabla v_0 + \nabla_y v_1\Big(x, \frac{x}{\varepsilon}\Big)\Big]\,\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \int_{\Omega\times Y} \big[\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big] \cdot {}^t A(y)\big[\nabla v_0 + \nabla_y v_1(x,y)\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

$$\langle f, v_0 + \varepsilon v_1\rangle \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} (f, v_0).$$

où on a utilisé que le terme restant

$$\Big|\varepsilon \int_\Omega \nabla u_\varepsilon \cdot {}^t A_\varepsilon \nabla_x v_1(x, \tfrac{x}{\varepsilon})\,\mathrm{d}x\Big| \le \varepsilon\, C\, \|\nabla u_\varepsilon\|_{L^2}\|\nabla_x v_1\|_\infty |\Omega|^{1/2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0;$$

et de même,

$$\big|\langle f, \varepsilon v_1(\cdot, \tfrac{\cdot}{\varepsilon})\rangle\big| \le \varepsilon \|f\|_{L^2}\|v_1\|_\infty |\Omega|^{1/2} \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

On a donc, $\forall v_0 \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, $\forall v_1 \in \mathscr{C}_0^\infty\big(\Omega, \mathscr{C}_\#^\infty(Y)\big)$,

$$\int_{\Omega\times Y} A(y)\big[\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big]\cdot\big[\nabla v_0 + \nabla_y v_1\big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Omega f\,v_0.$$

On peut faire la même chose avec des fonctions admissibles ou conclure par densité : l'égalité s'étend à $v_0 \in H_0^1(\Omega)$ et $v_1 \in L^2(\Omega, H_\#^1(Y))$.

① Si on choisit $v_0 = 0$, $v_1 = \varphi(x)\psi(y)$, $\varphi \in \mathscr{C}_0^\infty(\Omega)$, on obtient

$$\int_\Omega \varphi(x)\int_Y A(y)\big[\nabla u_0 + \nabla_y u_1\big]\cdot\nabla_y\psi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 0.$$

ce qui donne, pour chaque ψ, une égalité pour presque tout x. En l'appliquant à une famille dénombrable dense de fonctions $\psi \in \mathscr{C}_\#^\infty(Y)$ (l'ensemble négligeable dépend a priori de ψ), puis par densité de $\mathscr{C}_\#^\infty(Y)$ dans $H_\#^1(Y)$, on obtient

$$\int_Y A(y)\big[\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\big]\cdot\nabla_y\psi(y)\,\mathrm{d}y = 0,\ \text{p.p. } x\in\Omega \qquad \forall\psi\in H_\#^1(Y).$$

② On choisit ensuite $v_1 = 0$:

$$\int_\Omega\int_Y A(y)\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\big)\cdot\nabla v_0\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \langle f, v_0\rangle.$$

5.2 Le problème homogénéisé à deux échelles

Quitte à retrancher à u_1 sa moyenne en y (ce qui ne change pas $\nabla_y u_1$), on peut supposer $u_1 \in L^2(\Omega, \dot H_\#^1(Y))$. L'égalité obtenue ci-dessus dit alors que le couple (u_0, u_1) est solution du problème suivant, posé dans l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega)\times L^2\big(\Omega, \dot H_\#^1(Y)\big), \qquad \|(v_0,v_1)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|\nabla v_0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_y v_1\|_{L^2(\Omega\times Y)}^2$$

(c'est bien une norme, grâce aux inégalités de Poincaré dans $H_0^1(\Omega)$ et de Poincaré–Wirtinger dans $\dot H_\#^1(Y)$) :

$$\text{trouver } (u_0,u_1)\in\mathcal{H} \text{ tel que}\quad a\big((u_0,u_1),(v_0,v_1)\big) = \int_\Omega f\,v_0\,\mathrm{d}x \qquad \forall (v_0,v_1)\in\mathcal{H}, \tag{3}$$

où

$$a\big((u_0,u_1),(v_0,v_1)\big) = \int_{\Omega\times Y} A(y)\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\big)\cdot\big(\nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x,y)\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Proposition 19: Problème homogénéisé à deux échelles

Le problème (3) admet une unique solution $(u_0, u_1) \in \mathcal{H}$.

Preuve. La continuité de a et de la forme linéaire est immédiate. Pour la coercivité, on utilise l'ellipticité de A puis le fait que $\int_Y \nabla_y v_1(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ (par périodicité) :

$$\begin{aligned} a\big((v_0,v_1),(v_0,v_1)\big) &\geq c\int_{\Omega\times Y}\big|\nabla v_0(x) + \nabla_y v_1(x,y)\big|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= c\Big(\int_\Omega |\nabla v_0|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_\Omega \nabla v_0(x)\cdot\underbrace{\int_Y \nabla_y v_1(x,y)\,\mathrm{d}y}_{=0}\,\mathrm{d}x + \int_{\Omega\times Y}|\nabla_y v_1|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\Big) \\ &= c\,\|(v_0,v_1)\|_{\mathcal{H}}^2. \end{aligned}$$

On conclut par le théorème de Lax–Milgram. □

Remarque 20

Cette proposition donne directement l'unicité du couple limite (u_0, u_1), sans passer par les problèmes de cellule ni par la coercivité de A^*. Comme toute sous-suite de (u_ε) admet une sous-suite qui converge

vers ce même couple, c'est toute la suite qui converge :

$$u_\varepsilon \underset{H_0^1}{\rightharpoonup} u_0, \qquad u_\varepsilon \underset{L^2}{\longrightarrow} u_0, \qquad \nabla u_\varepsilon \rightharpoonup\!\!\!\!\rightharpoonup \nabla u_0 + \nabla_y u_1.$$

Les choix $(v_0, v_1) = (0, v_1)$ et $(v_0, 0)$ dans (3) redonnent respectivement les équations ① et ② ci-dessus, c'est-à-dire le problème de cellule et le problème homogénéisé. Avec la normalisation $u_1 \in L^2(\Omega, \dot{H}^1_\#(Y))$, on a $\hat{u}_1 = 0$ ci-dessous.

5.3 Conclusion : identification de la limite

Identification de u_1. L'équation ① dit que, pour presque tout x, $u_1(x,\cdot) \in H^1_\#(Y)$ est solution du problème de cellule avec $\xi = \nabla u_0(x)$: $-\operatorname{div}_y\big(A(y)(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,\cdot))\big) = 0$ dans Y. Par linéarité et unicité (à une constante près), on retrouve

$$u_1(x,y) = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} u_0(x)\, w_j(y) + \hat{u}_1(x) = \nabla u_0(x) \cdot \boldsymbol{w}(y) + \hat{u}_1(x).$$

Équation homogénéisée. En reportant dans ② :

$$\int_Y A(y)\big(\nabla u_0(x) + \nabla_y u_1(x,y)\big)\,\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{d} \partial_{x_j} u_0(x) \int_Y A(y)\big(\vec{e}_j + \nabla_y w_j(y)\big)\,\mathrm{d}y = A^* \nabla u_0(x),$$

puisque la i-ème composante de $\int_Y A(\vec{e}_j + \nabla_y w_j)$ est exactement A^*_{ij} (voir le cours 3). Ainsi

$$\int_\Omega A^* \nabla u_0 \cdot \nabla v_0 \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f\, v_0 \qquad \forall v_0 \in H^1_0(\Omega),$$

c'est-à-dire que $u_0 \in H^1_0(\Omega)$ est solution de $(\mathscr{P}^*)$: on retrouve l'équation homogénéisée et le terme $\varepsilon\, \nabla u_0 \cdot \boldsymbol{w}(\frac{x}{\varepsilon})$ du développement à deux échelles.

Convergence de toute la suite. Comme A^* est coercive (d'après le cours 3), $(\mathscr{P}^*)$ admet une unique solution (Lax–Milgram). La limite ne dépend donc pas de la sous-suite extraite, et c'est toute la suite (u_ε) qui converge:

$$u_\varepsilon \underset{H_0^1}{\rightharpoonup} u_0 \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \underset{L^2}{\longrightarrow} u_0.$$