

Cours 2 – Homogénéisation de problèmes unidimensionnels

Sonia Fliss¹ and François Alouges²

¹POEMS, UMA, Ensta Paris; ²ENS Paris Saclay

✉ **Contact:**
sonia.fliss@ensta-paris.fr

Cours: Homogénéisation
périodique – Master AMS

Résumé

On étudie l'homogénéisation d'équations elliptiques unidimensionnelles à coefficients ε -périodiques, $-(a_\varepsilon u'_\varepsilon)' + \rho_\varepsilon u_\varepsilon = f$ sur $]0, 1[$ avec conditions de Dirichlet. L'outil de base est la convergence faible des fonctions périodiques oscillantes $g(x/\varepsilon)$ vers leur moyenne. On l'applique d'abord à un problème sans dérivée, puis, après quelques rappels sur les convergences faible et forte et le théorème de Rellich, à un cas où la solution se calcule explicitement. On démontre enfin le résultat général : u_ε converge vers la solution d'un problème homogène dont les coefficients sont la moyenne *harmonique* $a^* = \langle 1/a \rangle^{-1}$ et la moyenne arithmétique $\rho^* = \langle \rho \rangle$.

Table des matières

1	Présentation du problème monodimensionnel modèle.	1
2	Cas 0-D ou problème sans dérivée	1
3	Rappels sur les convergences faibles et fortes	3
4	Problème monodimensionnel particulier	3
5	Problème monodimensionnel général	5

1 Présentation du problème monodimensionnel modèle.

Dans ce cours, on étudie l'homogénéisation de problèmes unidimensionnels :

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \quad \begin{cases} -(a_\varepsilon(x) u'_\varepsilon(x))' + \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = f(x) & \text{dans }]0, 1[, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \end{cases}$$

où

- $f \in L^2(]0, 1[)$;
- $a_\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$, où a est une fonction 1-périodique, L^∞ :

$$a(x+1) = a(x) \quad \text{et} \quad 0 < a^- \leq a(x) \leq a^+ \quad \text{p.p. } x;$$

- $\rho_\varepsilon(x) = \rho(\frac{x}{\varepsilon})$, où ρ est une fonction 1-périodique, L^∞ :

$$\rho(x+1) = \rho(x) \quad \text{et} \quad 0 < \rho^- \leq \rho(x) \leq \rho^+ \quad \text{p.p. } x.$$

2 Cas 0-D ou problème sans dérivée

Supposons $\rho_\varepsilon = 0$ et oublions les opérateurs différentiels :

$$-a_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = f(x) \quad \text{dans }]0, 1[\quad \implies \quad u_\varepsilon(x) = -\frac{f(x)}{a_\varepsilon(x)}.$$

Est-ce que u_ε a une limite ?

Théorème .1: Convergence faible des fonctions périodiques oscillantes

Soit $g \in L^\infty(\mathbb{R})$ une fonction 1-périodique. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit $g_\varepsilon(x) = g(\frac{x}{\varepsilon})$. Alors, pour tout segment $I \subset \mathbb{R}$ et tout $h \in L^1(I)$,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_I g_\varepsilon(x) h(x) dx = \langle g \rangle \int_I h(x) dx, \quad \text{où} \quad \langle g \rangle = \int_0^1 g(t) dt.$$

Remarque .2

On dit que g_ε converge dans L^∞ faible-* vers $\langle g \rangle$.

Preuve 1. — Supposons tout d'abord h constante par morceaux : $h(x) = h_i$ sur $]\alpha_i, \alpha_{i+1}[$, avec $\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_N$ et $I = (\alpha_0, \alpha_N)$. On note E la partie entière.

$$\begin{aligned} \int_I g_\varepsilon(x) h(x) dx &= \sum_{i=0}^{N-1} h_i \int_{\alpha_i}^{\alpha_{i+1}} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx = \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} h_i \int_{\alpha_i/\varepsilon}^{\alpha_{i+1}/\varepsilon} g(y) dy \\ &= \varepsilon \sum_{i=0}^{N-1} h_i \left[\underbrace{\int_{\alpha_i/\varepsilon}^{E(\alpha_i/\varepsilon)+1} g(y) dy}_{|\cdot| \leq \|g\|_{L^\infty}} + \underbrace{\int_{E(\alpha_i/\varepsilon)+1}^{E(\alpha_{i+1}/\varepsilon)} g(y) dy}_{= \langle g \rangle [E(\alpha_{i+1}/\varepsilon) - E(\alpha_i/\varepsilon) - 1]} + \underbrace{\int_{E(\alpha_{i+1}/\varepsilon)}^{\alpha_{i+1}/\varepsilon} g(y) dy}_{|\cdot| \leq \|g\|_{L^\infty}} \right]. \end{aligned}$$

Or $E\left(\frac{\alpha_{i+1}}{\varepsilon}\right) - E\left(\frac{\alpha_i}{\varepsilon}\right) - 1 = \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{\varepsilon} + O(1)$. Donc

$$\int_I g_\varepsilon(x) h(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{N-1} h_i (\alpha_{i+1} - \alpha_i) \langle g \rangle = \langle g \rangle \int_I h(x) dx.$$

— On conclut par densité des fonctions constantes par morceaux dans L^1 : $\forall h \in L^1(I)$, $\exists (h_k)$ constantes par morceaux, $h_k \rightarrow h$ dans L^1 , et

$$\int_I g_\varepsilon h - \langle g \rangle \int_I h = \left[\int_I g_\varepsilon h_k - \langle g \rangle \int_I h_k \right] + \left[\int_I g_\varepsilon (h - h_k) - \langle g \rangle \int_I (h - h_k) \right].$$

Le second crochet est majoré par $2\|g\|_{L^\infty} \|h - h_k\|_{L^1(I)}$, uniformément en ε : on choisit k_0 pour le rendre assez petit. Dès que k_0 est fixé, on sait d'après la première étape, qu'il existe ε_0 telle que pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$, le premier crochet est aussi petit que l'on veut. □

Preuve 2. En écrivant $g_\varepsilon - \langle g \rangle$, on peut se ramener au cas où g est à moyenne nulle. Soit $I = (\alpha, \beta)$. On pose $G(x) = \int_\alpha^x g(t) dt$. Comme $\langle g \rangle = 0$, G est 1-périodique. Soit $h \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$:

$$\int_\alpha^\beta g_\varepsilon(t) h(t) dt = \int_\alpha^\beta G'\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) h(t) dt = \int_\alpha^\beta \frac{d}{dt} \left[\varepsilon G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \right] h(t) dt = -\varepsilon \int_\alpha^\beta G\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) h'(t) dt \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0,$$

car G est périodique donc bornée, et h' est bornée aussi. On conclut ensuite, comme dans la preuve 1, par densité de $\mathcal{C}_0^\infty(I)$ dans $L^1(I)$. □

Application au problème 0-D

$$u_\varepsilon(x) = -\frac{f(x)}{a_\varepsilon(x)} \xrightarrow{L^2} -\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle f(x),$$

c'est-à-dire

$$\forall v \in L^2(0,1), \quad \int_I \frac{1}{a_\varepsilon(x)} \underbrace{f(x) v(x)}_{\in L^1} dx \longrightarrow \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \int_I f(x) v(x) dx.$$

Soit $u^*(x) = -\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle f(x) \in L^2(0,1)$. Alors $u_\varepsilon \rightharpoonup u^*$, et u^* est solution d'un problème 0-D du même type :

$$-\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1} u^*(x) = f(x).$$

Ce qui apparaît est donc $\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1}$ et pas $\langle a \rangle$!

3 Rappels sur les convergences faibles et fortes

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition .3: Convergences faible et forte dans L^2

- $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f_0$ ssi $\forall \varphi \in L^2(\Omega), \int_\Omega f_\varepsilon \varphi \rightarrow \int_\Omega f_0 \varphi$;
- $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f_0$ ssi $\int_\Omega |f_\varepsilon - f_0|^2 \rightarrow 0$.

Proposition .4

Si $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f_0$ alors $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f_0$.

Preuve : Soit $\varphi \in L^2(\Omega) : \left| \int_\Omega (f_\varepsilon - f_0) \varphi \right| \leq \underbrace{\|f_\varepsilon - f_0\|_{L^2}}_{\rightarrow 0} \|\varphi\|_{L^2}.$ □

Proposition .5

Si $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f_0$ et $\|f_\varepsilon\|_{L^2} \rightarrow \|f_0\|_{L^2}$, alors $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f_0$.

Preuve :

$$\int_\Omega |f_\varepsilon - f_0|^2 d\Omega = \underbrace{\int_\Omega |f_\varepsilon|^2}_{\rightarrow \int |f_0|^2} + \int_\Omega |f_0|^2 - 2 \underbrace{\int_\Omega f_\varepsilon f_0}_{\rightarrow \int |f_0|^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

□

Théoreme .6: Banach–Steinhaus

Si (f_ε) converge faiblement vers f_0 , alors (f_ε) est bornée.

Théoreme .7: Banach–Anaoglu

Si (f_ε) est une suite bornée de L^2 , alors on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans L^2 .

On peut remplacer L^2 par H^1 .

Remarque .8: Exercice

Si $u_\varepsilon \xrightarrow{H^1} u$, alors $u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u$ et $\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} \nabla u$.

Théoreme .9: Rellich

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière suffisamment régulière. Si (f_ε) est bornée dans $H^1(\Omega)$, alors on peut extraire une sous-suite qui converge (fortement) dans $L^2(\Omega)$.

Remarque .10: Exercices

- Si $u_\varepsilon \xrightarrow{H^1} u$, alors $u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u$ et $\nabla u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} \nabla u$.
- Si $u_\varepsilon \xrightarrow{H^1} u$ et $u_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$, alors $u \in H_0^1(\Omega)$.

4 Problème monodimensionnel particulier

On considère maintenant le problème : trouver $u_\varepsilon \in H^1(]0, 1[)$ solution de

$$\begin{cases} -(a_\varepsilon(x) u'_\varepsilon(x))' = f(x) & \text{dans }]0, 1[, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \end{cases}$$

où $a_\varepsilon(x) = a_p(\frac{x}{\varepsilon})$ avec a_p 1-périodique vérifie les hypothèses du début du cours, et $f \in L^2(]0, 1[)$. Pour ce problème, on peut trouver une expression explicite de la solution. En intégrant une première fois l'EDP, on trouve qu'il existe $c_\varepsilon^{(1)} \in \mathbb{R}$ telle que

$$u'_\varepsilon(x) = -\frac{1}{a_\varepsilon(x)} \int_0^x f(t) dt + \frac{c_\varepsilon^{(1)}}{a_\varepsilon(x)}$$

puis en intégrant une deuxième fois, on trouve qu'il existe $c_\varepsilon^{(2)} \in \mathbb{R}$ telle que

$$\Rightarrow u_\varepsilon(x) = -\int_0^x \frac{1}{a_\varepsilon(y)} \int_0^y f(t) dt dy + c_\varepsilon^{(1)} \int_0^x \frac{dy}{a_\varepsilon(y)} + c_\varepsilon^{(2)};$$

Il suffit d'utiliser les conditions aux limites pour trouver les constantes $c_\varepsilon^{(1)}$ et $c_\varepsilon^{(2)}$:

$$u_\varepsilon(0) = 0 \Rightarrow c_\varepsilon^{(2)} = 0;$$

$$u_\varepsilon(1) = 0 \Rightarrow c_\varepsilon^{(1)} = \left[\int_0^1 \frac{1}{a_\varepsilon(y)} \int_0^y f(t) dt dy \right] \left[\int_0^1 \frac{dy}{a_\varepsilon(y)} \right]^{-1}.$$

Passage à la limite

(1) La fonction $y \mapsto \int_0^y f(t) dt$ est dans $L^1(]0, 1[)$, donc, d'après le théorème .1,

$$c_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \left[\int_0^1 \int_0^y f(t) dt dy \right] \left(\int_0^1 1 \right)^{-1} \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1}, \quad \text{soit} \quad c_\varepsilon^{(1)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 \int_0^y f(t) dt dy =: c_0^{(1)}.$$

De la même façon,

$$u_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} -\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \int_0^x \int_0^y f(t) dt dy + c_0^{(1)} \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \int_0^x 1 dt =: u^*(x).$$

On montre que $u^* \in H^1(]0, 1[)$ est solution de

$$\begin{cases} -a^* u^{*''}(x) = f(x) & \text{dans }]0, 1[, \\ u^*(0) = u^*(1) = 0, \end{cases} \quad \text{avec} \quad a^* = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1}.$$

La convergence simple $u_\varepsilon(x) \rightarrow u^*(x)$, $\forall x \in [0, 1]$, implique une convergence forte L^2 d'après le théorème de convergence dominée :

$$u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u^* \quad (L^2 \text{ fort}),$$

la domination venant de $a_\varepsilon \geq a^- : |u_\varepsilon(x)| \leq \frac{1}{a^-} (\|f\|_{L^1} + |c_\varepsilon^{(1)}|)$, et $(c_\varepsilon^{(1)})$ est bornée puisqu'elle converge.

(2) Quant à $u'_\varepsilon(x)$:

$$u'_\varepsilon(x) = -\frac{1}{a_\varepsilon(x)} \int_0^x f(t) dt + \frac{c_\varepsilon^{(1)}}{a_\varepsilon(x)} \quad \text{ne converge pas fortement dans } L^2.$$

Mais, pour tout $\varphi \in L^2(]0, 1[)$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 u'_\varepsilon(x) \varphi(x) dx &= - \int_0^1 \frac{1}{a_\varepsilon(x)} \underbrace{\int_0^x f(t) dt}_{\in L^2} \underbrace{\varphi(x)}_{\in L^2} dx + c_\varepsilon^{(1)} \int_0^1 \frac{1}{a_\varepsilon(x)} \underbrace{\varphi(x)}_{\varphi \in L^1} dx \\ &\rightarrow -\left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right) \varphi(x) dx + c_0^{(1)} \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_0^1 u^{*'}(x) \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Donc

$$u'_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u^{*'} \quad \text{dans } L^2 \text{ faible.}$$

Enfin, en utilisant que

$$a_\varepsilon u'_\varepsilon(x) = - \int_0^x f + c_\varepsilon^{(1)} \quad \text{et} \quad a^* u^{*'}(x) = - \int_0^x f + c_0^{(1)}$$

et que $c_\varepsilon^{(1)} - c_0^{(1)} \rightarrow 0$, on déduit facilement que

$$a_\varepsilon u'_\varepsilon \xrightarrow{L^2} a^* u^{*'} \quad \text{dans } L^2 \text{ fort.}$$

5 Problème monodimensionnel général

On considère maintenant le problème de départ : trouver $u_\varepsilon \in H^1(]0, 1[)$ solution de

$$(\mathcal{P}_\varepsilon) \quad \begin{cases} - (a_\varepsilon(x) u'_\varepsilon(x))' + \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon(x) = f(x) & \text{dans }]0, 1[, \\ u_\varepsilon(0) = u_\varepsilon(1) = 0, \end{cases}$$

où f , a_ε et ρ_ε vérifient les hypothèses de la section 1.

Théorème .11: Homogénéisation du problème 1D

Soit (u_ε) l'unique solution de $(\mathcal{P}_\varepsilon)$. Alors $u_\varepsilon \rightharpoonup u^*$ dans $H^1(]0, 1[)$, où u^* est l'unique solution dans $H^1(]0, 1[)$ de

$$\begin{cases} -a^* u^{*''} + \rho^* u^* = f & \text{dans }]0, 1[, \\ u^*(0) = u^*(1) = 0, \end{cases} \quad \text{où } a^* = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle^{-1} \quad \text{et } \rho^* = \langle \rho \rangle.$$

Preuve. On rappelle que $a_\varepsilon(x) = a(\frac{x}{\varepsilon})$, avec a 1-périodique telle que $0 < a^- \leq a(y) \leq a^+$ p.p. y , et $\rho_\varepsilon(x) = \rho(\frac{x}{\varepsilon})$, avec ρ 1-périodique telle que $0 < \rho^- \leq \rho(y) \leq \rho^+$.

On montre que le problème $(\mathcal{P}_\varepsilon)$ est bien posé et que

$$\exists C > 0, \forall \varepsilon > 0, \quad \|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq C \|f\|_{L^2}$$

(la constante C est indépendante de ε). C'est en effet le problème de Dirichlet du cours 1 avec $A = a_\varepsilon$, de constante d'ellipticité $c = a^- > 0$; le terme $\rho_\varepsilon u_\varepsilon$, avec $\rho_\varepsilon \geq 0$, ne fait qu'augmenter la coercivité. On peut prendre $C = (1 + C_P)/a^-$, qui est bien indépendant de ε .

Ceci implique que $v_\varepsilon = a_\varepsilon(x) u'_\varepsilon(x)$ est bornée aussi dans $H^1(]0, 1[)$, uniformément en ε , puisque

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_{L^2} &= \|a_\varepsilon(x) u'_\varepsilon(x)\|_{L^2} \leq a^+ \|u_\varepsilon\|_{H^1} \leq a^+ C \|f\|_{L^2}, \\ \|(a_\varepsilon(x) u'_\varepsilon(x))'\|_{L^2} &= \|f - \rho_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} + \rho^+ \|u_\varepsilon\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} (1 + C\rho^+). \end{aligned}$$

① Comme $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $H^1(]0, 1[)$, quitte à extraire une sous-suite, on a

$$u_\varepsilon \rightharpoonup_{H^1} u^* \quad \text{et} \quad u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u^*.$$

Ceci nous donne que u^* est dans $H^1(]0, 1[)$. Caractérisons la limite.

② Pour tout $v \in L^2(]0, 1[)$,

$$\int_0^1 (\rho_\varepsilon u_\varepsilon - \rho^* u^*) v = \underbrace{\int_0^1 \rho_\varepsilon (u_\varepsilon - u^*) v}_{\rightarrow 0 \text{ car } u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} u^*} + \underbrace{\int_0^1 (\rho_\varepsilon - \rho^*) u^* v}_{\rightarrow 0 \text{ (théorème .1)}}.$$

où on utilise pour traiter le premier terme du membre de droite le fait que ρ_ε est bornée. On en déduit que

$$\rho_\varepsilon u_\varepsilon \xrightarrow{L^2} \rho^* u^*.$$

③ Comme (v_ε) est bornée dans $H^1(]0, 1[)$, quitte à extraire une sous-suite, on a

$$v_\varepsilon \rightharpoonup_{H^1} v^* \quad \text{et} \quad v_\varepsilon \xrightarrow{L^2} v^*.$$

Ceci nous donne que $v^* \in H^1(]0, 1[)$.

④ On a

$$\left. \begin{aligned} u_\varepsilon \rightharpoonup_{H^1} u^* &\implies u'_\varepsilon \rightharpoonup_{L^2} u^{*'} \\ v_\varepsilon \xrightarrow{L^2} v^* &\implies \text{même preuve que ②} \end{aligned} \right| \frac{1}{a_\varepsilon} v_\varepsilon \xrightarrow{L^2} \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle v^* \implies u^{*'} = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle v^* \text{ par unicité de la limite..}$$

⑤ On a également

$$\left. \begin{aligned} v_\varepsilon \rightharpoonup_{H^1} v^* &\implies v'_\varepsilon \rightharpoonup_{L^2} v^{*'} \\ v'_\varepsilon = \rho_\varepsilon u_\varepsilon - f &\xrightarrow{L^2} \rho^* u^* - f \end{aligned} \right| \implies v^{*'} = \rho^* u^* - f \text{ par unicité de la limite..}$$

- ⑥ En combinant les 2 dernières étapes, on en déduit que $u^* \in H^1(]0, 1[)$ est solution de

$$(\mathcal{P}^*) \quad -a^* \partial_x^2 u^* + \rho^* u^* = f \quad \text{dans }]0, 1[.$$

De plus $u^* \in H_0^1(]0, 1[)$ car H_0^1 est fermé pour la convergence faible (i.e. si $u_\varepsilon \in H_0^1$ et $u_\varepsilon \rightharpoonup u$, alors $u \in H_0^1$).

- ⑦ Il existe une unique solution de $(\mathcal{P}^*)$ d'après le théorème de Lax–Milgram car $a^* \geq a^- > 0$, $\rho^* \geq 0$.
- ⑧ On montre que toute sous-suite extraite qui converge, converge vers une solution de $(\mathcal{P}^*)$. En effet, si la suite entière ne convergeait pas faiblement vers u^* , on trouverait une sous-suite restant loin de u^* , dont on extrairait, par ①–⑥, une sous-sous-suite convergeant vers u^* : contradiction. Par unicité de la solution, toutes les limites sont égales et donc toute la suite converge.

□