

Cours 1 – Outils mathématiques : espaces de Sobolev, traces, formules de Green et problèmes modèles

Sonia Fliss¹ and François Alouges²

¹POEMS, UMA, Ensta Paris; ²ENS Paris Saclay

✉ **Contact:**
sonia.fliss@ensta-paris.fr

Cours: Homogénéisation
périodique – Master AMS

Résumé

Ce premier cours rassemble les outils d'analyse fonctionnelle utilisés dans la suite : espaces de Sobolev H^1 et $H(\text{div})$ et leurs versions périodiques, résultats de densité, théorèmes de trace, formules de Green (y compris dans le cadre périodique) et inégalités de Poincaré, théorème de Lax–Milgram. Ces outils sont ensuite mis en œuvre sur deux problèmes modèles : le problème de Dirichlet, et le problème de cellule périodique, qui n'admet de solution que sous une condition de compatibilité et dont la solution est unique à une constante près.

Table des matières

1	Espaces de Sobolev	1
2	Théorèmes de trace	2
3	Formules de Green	4
4	Inégalités de Poincaré	5
5	Théorème de Lax–Milgram	6
6	Problèmes modèles	6
6.1	Problème de Dirichlet	6
6.2	Problème de cellule périodique	8

On suppose dans tout le cours que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$, à frontière suffisamment régulière.

1 Espaces de Sobolev

On rappelle la définition des espaces de Sobolev suivants.

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &:= \left\{ f \text{ mesurable t.q. } \int_{\Omega} f^2 \, d\Omega < +\infty \right\}, & \|f\|_{L^2}^2 &= \int_{\Omega} f^2 \, d\Omega, \\ H^1(\Omega) &:= \left\{ f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \underbrace{\nabla f}_{(*)} \in [L^2(\Omega)]^d \right\}, & \|f\|_{H^1}^2 &= \|f\|_{L^2}^2 + \|\nabla f\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

où $(*)$: le gradient est défini au sens des distributions.

Théorème .1: Espaces de Hilbert

$(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2})$ et $(H^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ sont des espaces de Hilbert.

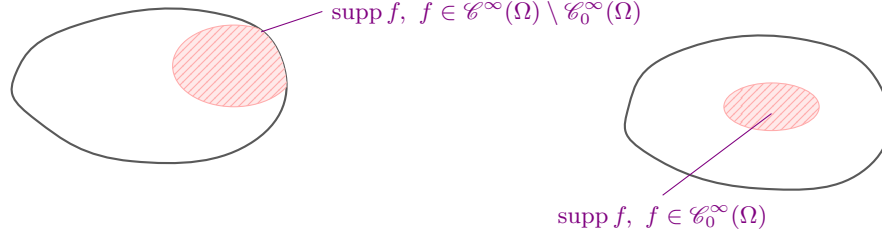
$$\begin{aligned} H^k(\Omega) &:= \left\{ f \in H^{k-1}(\Omega), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in H^{k-1}(\Omega) \quad \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket \right\}, \\ H(\text{div}, \Omega) &:= \left\{ \mathbf{U} \in [L^2(\Omega)]^d, \underbrace{\text{div } \mathbf{U}}_{(**)} \in L^2(\Omega) \right\}, & \|\mathbf{U}\|_{H(\text{div}, \Omega)}^2 &= \|\mathbf{U}\|_{L^2}^2 + \|\text{div } \mathbf{U}\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

où (**): la divergence $\operatorname{div} \mathbf{U} := \sum_{i=1}^d \frac{\partial U_i}{\partial x_i}$ est définie au sens des distributions.

Résultats de densité

On introduit les espaces suivants

$$\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty \text{ dans } \overline{\Omega}\}, \quad \mathcal{D}(\Omega) \equiv \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}^\infty, \operatorname{supp} f \text{ compact dans } \Omega\}.$$



- $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ sont denses dans $L^2(\Omega)$.
- $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, resp. $[\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})]^d$ dans $H(\operatorname{div}, \Omega)$, mais $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ n'est pas dense dans $H^1(\Omega)$, resp. $[\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)]^d$ n'est pas dense dans $H(\operatorname{div}, \Omega)$.

Définition .2: Espaces $H_0^1(\Omega)$ et $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$

$$H_0^1(\Omega) := \overline{\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)}^{H^1(\Omega)}, \quad H_0(\operatorname{div}, \Omega) := \overline{[\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)]^d}^{H(\operatorname{div}, \Omega)}.$$

Espaces de Sobolev périodiques

Soit $Y = (0, 1)^d$. Commençons par introduire l'opérateur d'extension périodique

$$\begin{aligned} E_\# : L^2(Y) &\longrightarrow L_{\operatorname{loc}}^2(\mathbb{R}^d), \\ u &\longmapsto E_\# u, \end{aligned}$$

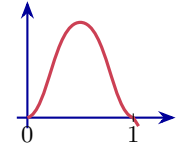
où

$$\forall y \in Y, \quad \forall n \in \mathbb{Z}^d, \quad E_\# u(y + n) = u(y).$$

On peut maintenant introduire l'espace des fonctions de $C^\infty(Y)$ dont l'extension périodique reste C^∞ :

$$\mathcal{C}_\#^\infty(Y) := \{u \in \mathcal{C}^\infty(Y), E_\# u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)\}.$$

Notons que la fonction ci-contre est telle que $u(0) = u(1)$, mais $u \notin \mathcal{C}_\#^\infty(0, 1)$ car $E_\# u \notin \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Pour qu'une fonction $\mathcal{C}^\infty(0, 1)$ soit $\mathcal{C}_\#^\infty(0, 1)$, il faut que toutes les dérivées en 0 et 1 coïncident.



- $\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$ est dense dans $L^2(Y)$ (car $\mathcal{C}_0^\infty(Y) \subset \mathcal{C}_\#^\infty(Y)$).
- $\mathcal{C}_\#^\infty(Y)$ n'est dense ni dans $H^1(Y)$, ni dans $H(\operatorname{div}, Y)$.

Définition .3: Espaces périodiques $H_\#^1(Y)$ et $H_\#(\operatorname{div}, Y)$

$$H_\#^1(Y) := \overline{\mathcal{C}_\#^\infty(Y)}^{H^1(Y)}, \quad H_\#(\operatorname{div}, Y) := \overline{[\mathcal{C}_\#^\infty(Y)]^d}^{H(\operatorname{div}, Y)}.$$

2 Théorèmes de trace

On montre que l'application

$$\begin{aligned} \gamma_0 : \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega), \\ u &\longmapsto u|_{\partial\Omega} \end{aligned}$$

est bien définie et continue :

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

En utilisant un raisonnement de prolongement par densité, $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ étant dense dans $H^1(\Omega)$, on peut définir

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\partial\Omega), \quad u \longmapsto u|_{\partial\Omega},$$

et cette application est continue :

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad \|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

où la constante C_0 est la même que précédemment.

Théoreme .4: Noyau de l'application trace

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Preuve de $\subset$. Soit $u \in H_0^1(\Omega)$, $\exists (u_n)_n \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)^\mathbb{N}$ t.q. $\|u_n - u\|_{H^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Or

$$\|\gamma_0(u_n - u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|u_n - u\|_{H^1} \rightarrow 0,$$

donc $\gamma_0(u_n)$ converge vers $\gamma_0(u)$ dans $L^2(\partial\Omega)$. Comme $\gamma_0(u_n) = 0 \forall n$, donc $\gamma_0(u) = 0$. □

Preuve de $\supset$. Elle est plus technique et se fait en plusieurs étapes. Soit $u \in \text{Ker } \gamma_0$.

- *Extension par 0* : soit $\tilde{u} = u$ dans Ω , $\tilde{u} = 0$ dans $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. On montre que $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^d)$.
- On utilise une technique de *régularisation par convolution*. Soit $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\text{supp } \rho \subset B(0, 1)$, $\|\rho\|_{L^1} = 1$. On introduit $\rho_\varepsilon = \varepsilon^{-d} \rho(x/\varepsilon)$. On a $\text{supp } \rho_\varepsilon \subset B(0, \varepsilon)$ et $\|\rho_\varepsilon\|_{L^1} = 1$. On montre

$$\|\rho_\varepsilon * \tilde{u} - \tilde{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{avec } \rho_\varepsilon * \tilde{u} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d).$$

- Comme $\rho_\varepsilon * \tilde{u}$ n'est pas à support compact dans Ω , ce n'est pas terminé : on utilise une fonction *cut-off*. Soit $\eta_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,

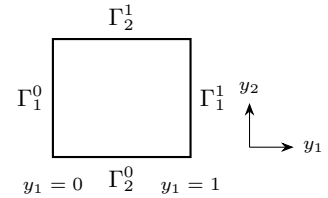
$$\eta_\varepsilon = 1 \text{ dans } \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) > 2\varepsilon\}, \quad \|\nabla \eta_\varepsilon\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\varepsilon},$$

$$\text{supp } \eta_\varepsilon \subset \{x \in \Omega, \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}.$$

On montre que

$$\|\eta_\varepsilon \rho_\varepsilon * \tilde{u} - \tilde{u}\|_{H^1(\Omega)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \eta_\varepsilon \rho_\varepsilon * \tilde{u} \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega).$$

On introduit $\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $\forall j \in \{0, 1\}$, $\Gamma_i^j = \{y \in \bar{Y}, y_i = j\}$.



Théoreme .5: Caractérisation de $H_\#^1(Y)$

$$H_\#^1(Y) = \{u \in H^1(Y), \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, u|_{\Gamma_i^0} = u|_{\Gamma_i^1}\}.$$

Remarque .6

$u|_{\Gamma_i^0} \in L^2(\Gamma_i^0)$ et $u|_{\Gamma_i^1} \in L^2(\Gamma_i^1)$, donc quand on écrit $u|_{\Gamma_i^0} = u|_{\Gamma_i^1}$, c'est dans $L^2(\Gamma_i)$ où l'on identifie $\Gamma_i^0 = \Gamma_i^1 = \Gamma_i$.

Preuve de $\subset$. Soit $u \in H_\#^1(Y)$, $\exists (u_n) \in (\mathcal{C}_\#^\infty(Y))^\mathbb{N}$ t.q. $\|u_n - u\|_{H^1} \rightarrow 0$. De plus $\forall n, \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket$, $u_n(y) = u_n(y + \mathbf{e}_i)$ par définition. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad u_n|_{\Gamma_i^0} = u_n|_{\Gamma_i^1}.$$

D'où

$$\begin{aligned} \|u|_{\Gamma_i^0} - u|_{\Gamma_i^1}\|_{L^2(\Gamma_i)} &\leq \|u|_{\Gamma_i^0} - u_n|_{\Gamma_i^0}\|_{L^2(\Gamma_i^0)} + \|u|_{\Gamma_i^1} - u_n|_{\Gamma_i^1}\|_{L^2(\Gamma_i^1)} + \|u_n|_{\Gamma_i^0} - u_n|_{\Gamma_i^1}\|_{L^2(\Gamma_i^0)} \\ &\leq \|u|_{\Gamma_i^0} - u_n|_{\Gamma_i^0}\|_{L^2(\Gamma_i^0)} + \|u|_{\Gamma_i^1} - u_n|_{\Gamma_i^1}\|_{L^2(\Gamma_i^1)} \\ &\leq 2C_0 \|u - u_n\|_{H^1(Y)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

Remarque .7

On a une autre caractérisation de $H^1_{\#}(Y)$:

$$H^1_{\#}(Y) = \{u \in H^1(Y), E_{\#}u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)\}.$$

3 Formules de Green

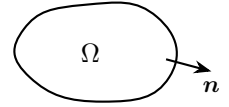
On rappelle la formule de Stokes

$$\forall f \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} f|_{\partial\Omega} n_i d\Gamma.$$

et la formule de Green-Ostrogradsky

$$\forall f \in H^1(\Omega), \mathbf{U} \in [H^1(\Omega)]^d, \quad \int_{\Omega} [\nabla f \cdot \mathbf{U} + f \operatorname{div} \mathbf{U}] d\Omega = \int_{\partial\Omega} f|_{\partial\Omega} \mathbf{U}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} d\Gamma.$$

On va étendre cette dernière formule de Green à $f \in H^1$, $\mathbf{U} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$.

Définition .8: Espace des traces des fonctions de $H^1(\Omega)$

On introduit

$$H^{1/2}(\partial\Omega) := \operatorname{Im} \gamma_0$$

que l'on munit de la norme quotient :

$$\forall \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} := \inf_{u \in H^1, u|_{\partial\Omega} = \varphi} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Comme $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert et $H^1_0(\Omega)$ est un sous espace fermé, on a $H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus [H^1_0(\Omega)]^\perp$. On montre que l'application γ_0 est une bijection isométrique sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Ainsi, pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, il existe un unique $u_\varphi \in [H^1_0(\Omega)]^\perp$ de trace φ . Ceci nous permet de montrer le lemme suivant.

Lemme .9: Relèvement continu

Pour tout $\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)$, il existe $u_\varphi \in H^1(\Omega)$ telle que

$$u_\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi \quad \text{et} \quad \|u_\varphi\|_{H^1} \leq \|\varphi\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)}.$$

Théoreme .10: Trace normale dans $H(\operatorname{div}, \Omega)$

$\forall \mathbf{U} \in H(\operatorname{div}, \Omega)$, on introduit $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ définie par

$$\forall \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega), \quad {}_{H^{-1/2}} \langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}, \varphi \rangle_{H^{1/2}} := \int_{\Omega} [\nabla u_\varphi \cdot \mathbf{U} + u_\varphi \operatorname{div} \mathbf{U}] d\Omega,$$

où u_φ est un relèvement continu de φ . Alors défini ainsi $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ est une forme linéaire continue de $H^{1/2}(\partial\Omega)$. On dit que $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} \in [H^{1/2}(\partial\Omega)]' =: H^{-1/2}(\partial\Omega)$.

Notons que le terme de droite dans l'expression de $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ est bien indépendant du choix du relèvement. En effet, d'après la définition de la divergence au sens des distributions

$$\forall u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \forall \mathbf{U} \in [\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})]^d, \quad \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \mathbf{U} + u \operatorname{div} \mathbf{U}] d\Omega = 0,$$

qui s'étend par un raisonnement de densité à

$$\forall u \in H^1_0(\Omega), \forall \mathbf{U} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \mathbf{U} + u \operatorname{div} \mathbf{U}] d\Omega = 0. \quad (1)$$

Si u_1 et u_2 sont deux relèvements de φ alors $u_1 - u_2$ est dans $H^1_0(\Omega)$ et on peut appliquer la formule précédente à $u = u_1 - u_2$. Ainsi, ${}_{H^{-1/2}} \langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}, \varphi \rangle_{H^{1/2}}$ est indépendant du choix du relèvement.

On déduit facilement du théorème précédent la formule de Green générale

$$\forall u \in H^1(\Omega), \forall \mathbf{U} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad \int_{\Omega} [\nabla u \cdot \mathbf{U} + u \operatorname{div} \mathbf{U}] \, d\Omega = {}_{H^{-1/2}} \langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}, u|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{1/2}}. \quad (G)$$

Preuve. C'est bien une forme linéaire continue d'après les propriétés des relèvements continus. $\square$

Remarque .11

La forme linéaire est notée $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ car c'est bien une extension de $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ pour les champs de vecteurs de $H(\operatorname{div}, \Omega) \setminus [H^1(\Omega)]^d$, qui coïncide avec $\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = \mathbf{U}|_{\partial\Omega} \cdot \mathbf{n}$ pour les champs de vecteurs de $[H^1(\Omega)]^d$.

On a également

$$\forall f \in H^1(\Omega), \quad \forall \mathbf{U} \in [\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)]^d, \quad \int_{\Omega} \nabla f \cdot \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{U} f = 0,$$

donc par densité de $[\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)]^d$ dans $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$, l'égalité est vraie pour tout $f \in H^1(\Omega)$ et $\mathbf{U} \in H_0(\operatorname{div}, \Omega)$. On en déduit facilement la caractérisation de $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$ suivante.

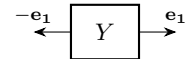
Corollaire .12: Caractérisation de $H_0(\operatorname{div}, \Omega)$

$$H_0(\operatorname{div}, \Omega) = \left\{ \mathbf{U} \in H(\operatorname{div}, \Omega), \quad \underbrace{\mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}}_{\in H^{-1/2}(\partial\Omega)} = 0 \right\}.$$

Concentrons nous maintenant sur les formules de Green avec des fonctions périodiques. On a $\forall f \in H_{\#}^1(Y)$, $\forall \mathbf{U} \in [\mathcal{C}_{\#}^\infty(Y)]^d$,

$$\begin{aligned} \int_Y \nabla f \cdot \mathbf{U} + \operatorname{div} \mathbf{U} f &= \int_{\partial Y} f|_{\partial Y} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial Y} = \sum_{i=1}^d \left(\int_{\Gamma_i^0} f|_{\Gamma_i^0} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i^0} + \int_{\Gamma_i^1} f|_{\Gamma_i^1} \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\Gamma_i^1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\int_{\Gamma_i^0} f|_{\Gamma_i^0} \mathbf{U} \cdot (-\mathbf{e}_i)|_{\Gamma_i^0} + \int_{\Gamma_i^1} f|_{\Gamma_i^1} \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^1} \right) \\ &= \sum_{i=1}^d \left(\int_{\Gamma_i^0} f|_{\Gamma_i^0} \mathbf{U} \cdot (-\mathbf{e}_i)|_{\Gamma_i^0} + \int_{\Gamma_i^0} f|_{\Gamma_i^0} \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^0} \right) = 0, \end{aligned}$$

car $f|_{\Gamma_i^0} = f|_{\Gamma_i^1}$ et $\mathbf{U}|_{\Gamma_i^0} = \mathbf{U}|_{\Gamma_i^1}$.



Par densité de $[\mathcal{C}_{\#}^\infty(Y)]^d$ dans $H_{\#}(\operatorname{div}, Y)$, on en déduit que

$$\forall f \in H_{\#}^1(Y), \quad \forall \mathbf{U} \in H_{\#}(\operatorname{div}, Y), \quad \int_Y \nabla f \cdot \mathbf{U} + f \operatorname{div} \mathbf{U} = 0. \quad (G_{\#})$$

On peut enfin montrer la caractérisation :

$$H_{\#}(\operatorname{div}, Y) = \left\{ \mathbf{U} \in H(\operatorname{div}, Y), \quad \forall f \in H_{\#}^1(Y), \quad {}_{H^{-1/2}(\partial Y)} \langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{n}|_{\partial Y}, f|_{\partial Y} \rangle_{H^{1/2}(\partial Y)} = 0 \right\}$$

En fait, en utilisant des fonctions $f \in \mathcal{C}_{\#}^\infty(Y)$ qui s'annulent sur tous les bords sauf sur Γ_i^0 et Γ_i^1 et en utilisant que l'ensemble des traces de telles fonctions est dense dans $H_{\#}^{1/2}(\Gamma_i) = \{f|_{\Gamma_i}, f \in H_{\#}^1(Y)\}$, on montre que

$$H_{\#}(\operatorname{div}, Y) = \left\{ \mathbf{U} \in H(\operatorname{div}, Y), \quad \forall f \in H_{\#}^1(Y), \quad \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad {}_{H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_i)} \langle \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^0} - \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^1}, f|_{\Gamma_i} \rangle_{H_{\#}^{1/2}(\Gamma_i)} = 0 \right\}$$

où $H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_i) := [H_{\#}^{1/2}(\Gamma_i)]'$ soit

$$H_{\#}(\operatorname{div}, Y) = \left\{ \mathbf{U} \in H(\operatorname{div}, Y), \quad \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket, \quad \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^0} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^1} \quad \text{dans } H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_i) \right\}$$

On retrouve la condition naturelle pour les champs de vecteurs réguliers, mais cette condition est écrite faiblement pour les champs de vecteurs qui sont moins réguliers.

4 Inégalités de Poincaré

Théoreme .13: Inégalité de Poincaré

Il existe une constante $C_P > 0$ qui ne dépend que du domaine Ω telle que

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad \|u\|_{L^2}^2 \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

Il faut ici que Ω soit en plus *connexe*.

Théoreme .14: Inégalité de Poincaré de Wirtinger

Il existe une constante $C_{PW} > 0$ qui ne dépend que du domaine Ω telle que

$$\forall u \in \left\{ v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v = 0 \right\}, \quad \|u\|_{L^2}^2 \leq C_{PW} \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

5 Théorème de Lax–Milgram

Théoreme .15: Lax–Milgram

Soit $(V, \|\cdot\|_V)$ un espace de Hilbert, $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire qui est *continue* c'est-à-dire

$$\exists M_a > 0, \forall u, v \in V, \quad |a(u, v)| \leq M_a \|u\|_V \|v\|_V$$

et *coercive* c'est-à-dire

$$\exists \alpha > 0, \forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

et $\ell \in V'$, c'est-à-dire une forme linéaire continue :

$$\exists M_\ell > 0, \forall v \in V, \quad |\ell(v)| \leq M_\ell \|v\|_V.$$

Il existe un unique $u \in V$ tel que

$$a(u, v) = \ell(v) \quad \forall v \in V,$$

On a dans ce cas

$$\|u\|_V \leq \frac{\|\ell\|_{V'}}{\alpha}.$$

6 Problèmes modèles

6.1 Problème de Dirichlet

Théoreme .16: Problème de Dirichlet

Le problème : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (\mathcal{P}_D)$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$, $A_{ij} \in L^\infty(\Omega)$,

$$\exists c > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \text{ p.p. tout } x \quad {}^t \xi A(x) \xi \geq c \|\xi\|_{\mathbb{R}^d}^2 \quad (A \text{ est dite uniformément elliptique}),$$

admet une unique solution. En particulier, la solution dépend continûment de f :

$$\|\nabla u\|_{L^2} \leq \frac{\sqrt{C_P}}{c} \|f\|_{L^2}, \quad \|u\|_{H^1} \leq \frac{1 + C_P}{c} \|f\|_{L^2}.$$

Le problème est bien posé au sens d'Hadamard.

Preuve

On prouve ce résultat en 3 étapes.

1. on écrit la formulation variationnelle (FV) en utilisant une formule de Green.

2. on montre l'équivalence entre $(\mathcal{P}_D)$ et (FV) .
3. on applique le théorème de Lax–Milgram en établissant la coercivité de la forme bilinéaire à partir de l'uniforme ellipticité de A et l'inégalité de Poincaré.

Étape 1 : Construction de la formulation variationnelle La condition « $u = 0$ sur $\partial\Omega$ » s'entend au sens des traces, $\gamma_0(u) = 0$; d'après le théorème .4, elle équivaut à $u \in H_0^1(\Omega)$. Le problème s'écrit donc

$$(\mathcal{P}_D) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ -\operatorname{div}(A\nabla u) = f \quad \text{dans } L^2(\Omega). \end{array} \right.$$

Soit u une solution de $(\mathcal{P}_D)$. Posons $\mathbf{U} := A\nabla u$.

- $\mathbf{U} \in [L^2(\Omega)]^d$ car $A_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ et $\partial_j u \in L^2(\Omega) : \|U_i\|_{L^2} \leq \sum_j \|A_{ij}\|_{L^\infty} \|\partial_j u\|_{L^2}$.
- $\operatorname{div} \mathbf{U} = -f \in L^2(\Omega)$.

Donc $A\nabla u \in H(\operatorname{div}, \Omega)$. Soit $v \in H_0^1(\Omega)$. On multiplie l'équation par v et on intègre :

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(A\nabla u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

D'après (1) appliquée à $\mathbf{U} = A\nabla u \in H(\operatorname{div}, \Omega)$ et $v \in H_0^1(\Omega)$

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(A\nabla u) v = \int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v,$$

d'où

$$(FV) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(\Omega) \text{ telle que} \\ a(u, v) := \int_{\Omega} A(x) \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega =: \ell(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right.$$

Étape 2 : Équivalence entre $(\mathcal{P}_D)$ et (FV) . L'étape (1) montre $(\mathcal{P}_D) \Rightarrow (FV)$. Réciproquement, soit u une solution de (FV) .

- Soit $v \in \mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. Comme $A\nabla u \in [L^2(\Omega)]^d \subset [\mathcal{D}'(\Omega)]^d$ et $f \in L^2(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} A\nabla u \cdot \nabla v = {}_{[\mathcal{D}']^d} \langle A\nabla u, \nabla v \rangle_{[\mathcal{D}]^d} = {}_{\mathcal{D}'} \langle -\operatorname{div}(A\nabla u), v \rangle_{\mathcal{D}}, \quad \int_{\Omega} f v = {}_{\mathcal{D}'} \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}}.$$

Donc ${}_{\mathcal{D}'} \langle -\operatorname{div}(A\nabla u) - f, v \rangle_{\mathcal{D}} = 0$ pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega)$, c'est-à-dire $-\operatorname{div}(A\nabla u) = f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$. Comme $f \in L^2(\Omega)$, on a $\operatorname{div}(A\nabla u) \in L^2(\Omega)$ et l'égalité a lieu presque partout dans Ω .

- $u \in H_0^1(\Omega) = \operatorname{Ker} \gamma_0$, donc $u|_{\partial\Omega} = 0$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

Donc $(FV) \Rightarrow (\mathcal{P}_D)$.

Remarque .17

Contrairement au problème de cellule, il n'y a pas de condition « naturelle » à retrouver : la condition de Dirichlet est *essentielle*, elle est imposée par l'espace $H_0^1(\Omega)$.

Étape 3 : Caractère bien posé de (FV) par le théorème de Lax–Milgram.

- $(H_0^1(\Omega), \|\cdot\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert : c'est un sous-espace fermé (par définition, une adhérence) de l'espace de Hilbert $H^1(\Omega)$.
- a est bilinéaire continue. La bilinéarité est claire. Pour presque tout x et tous $\xi, \eta \in \mathbb{R}^d$, par Cauchy–Schwarz dans $\mathbb{R}^{d \times d}$ (appliqué à $(A_{ij}(x))$ et $(\xi_j \eta_i)$),

$$|A(x)\xi \cdot \eta| = \left| \sum_{i,j} A_{ij}(x) \xi_j \eta_i \right| \leq \left(\sum_{i,j} |A_{ij}(x)|^2 \right)^{1/2} |\xi| |\eta| \leq M |\xi| |\eta|,$$

avec $M := (\sum_{i,j} \|A_{ij}\|_{L^\infty}^2)^{1/2}$. Donc, pour $u, v \in H_0^1(\Omega)$, par Cauchy–Schwarz dans $L^2(\Omega)$,

$$|a(u, v)| \leq M \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \leq M \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

- a est coercive. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$, l'uniforme ellipticité appliquée avec $\xi = \nabla v(x)$ pour presque tout x donne

$$a(v, v) = \int_{\Omega} A(x) \nabla v \cdot \nabla v \, dx \geq c \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx = c \|\nabla v\|_{L^2}^2.$$

Cette minoration ne contrôle que le gradient ; c'est l'inégalité de Poincaré qui contrôle $\|v\|_{L^2}$:

$$\|v\|_{H^1}^2 = \|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq (C_P + 1) \|\nabla v\|_{L^2}^2,$$

d'où

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_{H^1}^2, \quad \alpha := \frac{c}{C_P + 1}.$$

— ℓ est linéaire continue. Pour $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$|\ell(v)| \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} \|v\|_{H^1}, \quad \text{donc } \|\ell\|_{(H_0^1)'} \leq \|f\|_{L^2}.$$

Le théorème de Lax–Milgram donne l'existence et l'unicité de $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de (FV) , donc, par l'étape (2), de $(\mathcal{P}_D)$.

Pour établir la stabilité, on prend $v = u$ dans (FV) :

$$\alpha \|u\|_{H^1}^2 \leq a(u, u) = \ell(u) \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{H^1} \implies \|u\|_{H^1} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\alpha} = \frac{1 + C_P}{c} \|f\|_{L^2}.$$

On obtient une meilleure estimation du gradient en utilisant Poincaré dans le second membre :

$$c \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq a(u, u) = \int_{\Omega} f u \leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \sqrt{C_P} \|f\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2},$$

$$\text{donc } \|\nabla u\|_{L^2} \leq \frac{\sqrt{C_P}}{c} \|f\|_{L^2}.$$

Remarque .18

- Les constantes ne dépendent de A que par c (et M pour la continuité, qui n'apparaît pas dans l'estimation). C'est ce qui rend ces estimations utiles en homogénéisation : pour $A_{\varepsilon}(x) = A(x/\varepsilon)$, la constante c ne dépend pas de ε , donc (u_{ε}) est bornée dans $H_0^1(\Omega)$ uniformément en ε .
- Le résultat reste vrai pour $f \in H^{-1}(\Omega) := (H_0^1(\Omega))'$ en remplaçant $\int_{\Omega} f v$ par ${}_{H^{-1}}\langle f, v \rangle_{H_0^1}$, avec l'estimation $\|u\|_{H^1} \leq \|f\|_{H^{-1}}/\alpha$; par exemple $f = \operatorname{div} \mathbf{G}$ avec $\mathbf{G} \in [L^2(\Omega)]^d$.

6.2 Problème de cellule périodique

On étudie ici le problème :

Théorème .19: Problème de cellule périodique

Le problème : Trouver $u \in H^1(Y)$ telle que

$$(\mathcal{P}_{\#}) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(A(y)\nabla u) = f & \text{dans } Y, \\ \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad u|_{\Gamma_i^0} = u|_{\Gamma_i^1}, \\ \forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad A(y)\nabla u \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^0} = A(y)\nabla u \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^1}. \end{cases}$$

où $f \in L^2(Y)$, $A = (A_{ij})_{1 \leq i, j \leq d}$, $A_{ij} \in L^{\infty}(Y)$, et A est uniformément elliptique, admet une solution ssi

$$\int_Y f = 0 \quad [\text{condition de compatibilité}]$$

et dans ce cas, la solution est unique à une constante près. Dit autrement, il existe une unique solution telle que $\int_Y u = 0$. Cette solution dépend continument des données.

Remarque .20

- Notons que la première équation et la troisième équation (qui est une égalité dans $H_{\#}^{-1/2}(\Gamma_i)$) de $(\mathcal{P}_{\#})$ impliquent d'après la caractérisation de $H_{\#}(\operatorname{div}, Y)$ que $A(y)\nabla u \in H_{\#}(\operatorname{div}, Y)$.
- Si u est solution de $(\mathcal{P}_{\#})$, $u + \text{constante}$ est aussi solution donc la solution ne peut être unique qu'à une constante près.
- On a

$$\int_Y f = - \int_Y \operatorname{div}(A(y)\nabla u) \stackrel{(\dagger)}{=} \int_Y A(y)\nabla u \cdot \nabla(1) = 0,$$

(†) d'après la formule de Green ($G_\#$) car $A(y)\nabla u \in H_\#(\text{div}, Y)$ et $1 \in H_\#^1(Y)$. Donc la condition $\int_Y f = 0$ est nécessaire !

Preuve

On prouve ce résultat avec les mêmes 3 étapes que précédemment.

Étape 1 : Construction de la formulation variationnelle dans $H_\#^1(Y)$. Soit u solution de $(\mathcal{P}_\#)$. Soit $v \in H_\#^1(Y)$, on a

$$-\int_Y \text{div}(A(y)\nabla u) v \, dy = \int_Y f v \, dy.$$

Or $A(y)\nabla u \in H_\#(\text{div}, Y)$ et $v \in H_\#^1(Y)$; d'après ($G_\#$) on a

$$(FV_\#) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_\#^1(Y) \text{ telle que} \\ \int_Y A(y)\nabla u \cdot \nabla v \, dy = \int_Y f v \, dy \quad \forall v \in H_\#^1(Y). \end{array} \right.$$

Étape 1 bis : Construction d'une FV dans $V_\# := \{u \in H_\#^1(Y), \int_Y u = 0\}$. Comme il n'y a pas unicité de la solution dans $H_\#^1(Y)$, on ne peut pas espérer appliquer le théorème de Lax–Milgram dans $H_\#^1(Y)$. On va plutôt chercher une solution dans $V_\#$. On considère la formulation variationnelle

$$(FV_\#^0) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in V_\# \text{ telle que} \\ \int_Y A(y)\nabla u \cdot \nabla v \, dy = \int_Y f v \, dy \quad \forall v \in V_\#. \end{array} \right.$$

On a évidemment $(FV_\#) \Rightarrow (FV_\#^0)$. Montrons que si $\int_Y f = 0$ alors $(FV_\#^0) \Rightarrow (FV_\#)$.

Soit $v \in H_\#^1(Y)$; $v - \int_Y v \in V_\#$ donc on peut appliquer $(FV_\#^0)$:

$$\int_Y A(y)\nabla u \cdot \underbrace{\nabla \left(v - \int_Y v \right)}_{\nabla v} \, dy = \int_Y f \left(v - \int_Y v \right) \, dy = \int_Y f v \, dy - \underbrace{\int_Y f \int_Y v}_{0} = \int_Y f v \, dy.$$

Donc

$$\int_Y A(y)\nabla u \cdot \nabla v = \int_Y f v, \quad \forall v \in H_\#^1(Y)$$

et on retrouve $(FV_\#)$.

Étape 2 : Équivalence entre $(FV_\#^0)$ et $(\mathcal{P}_\#)$. Comme $(FV_\#) \Leftrightarrow (FV_\#^0)$, il suffit de montrer que $(FV_\#) \Rightarrow (\mathcal{P}_\#)$.

— Soit $v \in \mathcal{D}(Y) \subset H_\#^1(Y)$. Comme $A\nabla u \in [L^2(Y)]^d \subset [\mathcal{D}'(Y)]^d$ et $f \in L^2(Y) \subset \mathcal{D}'(Y)$,

$$\int_Y A\nabla u \cdot \nabla v = {}_{[\mathcal{D}']^d} \langle A\nabla u, \nabla v \rangle_{{[\mathcal{D}]}^d} = \mathcal{D}' \langle -\text{div}(A\nabla u), v \rangle_{\mathcal{D}}, \quad \int_Y f v = \mathcal{D}' \langle f, v \rangle_{\mathcal{D}}.$$

Donc $\mathcal{D}' \langle -\text{div}(A\nabla u) - f, v \rangle_{\mathcal{D}} = 0$ pour tout $v \in \mathcal{D}(Y)$, c'est-à-dire $-\text{div}(A\nabla u) = f$ dans $\mathcal{D}'(Y)$. Comme $f \in L^2(Y)$, on a $\text{div}(A\nabla u) \in L^2(Y)$ et l'égalité a lieu presque partout dans Y .

— $u \in H_\#^1(Y)$, donc d'après la caractérisation donnée dans le théorème .5, on a

$$\forall i \in \llbracket 1, d \rrbracket \quad u|_{\Gamma_i^0} = u|_{\Gamma_i^1}.$$

— Enfin, comme $\text{div}(A\nabla u) \in L^2(Y)$, pour tout $v \in H_\#^1(Y)$, on peut utiliser la formule de Green (G) à partir de $(FV_\#)$:

$$\int_Y -\text{div}(A\nabla u) v + {}_{H^{-1/2}(\partial Y)} \langle A(y)\nabla u \cdot \mathbf{n}, v \rangle_{H^{1/2}(\partial Y)} = \int_Y f v,$$

donc

$$\forall v \in H_\#^1(Y), \quad {}_{H^{-1/2}(\partial Y)} \langle A(y)\nabla u \cdot \mathbf{n}, v \rangle_{H^{1/2}(\partial Y)} = 0.$$

En utilisant la caractérisation de $H_\#(\text{div}, Y)$, on trouve

$$A(y)\nabla u \in H_\#(\text{div}, Y) \quad \text{et} \quad A(y)\nabla u \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^0} = A(y)\nabla u \cdot \mathbf{e}_i|_{\Gamma_i^1} \quad \text{dans } H_\#^{-1/2}(\Gamma_i), \quad \forall i.$$

Étape 3 : Caractère bien posé de $(FV_{\#}^0)$. On va appliquer le théorème de Lax–Milgram :

- $(V_{\#}, \|\cdot\|_{H^1})$ est un espace de Hilbert en tant que sous-espace fermé de H^1 .
- la continuité de la forme bilinéaire se montre comme pour le problème de Dirichlet.
- Pour $v \in H_{\#}^1(Y)$: $\left| \int_Y A(y) \nabla v \cdot \nabla v \right| \geq c \int_Y \|\nabla v\|_{\mathbb{R}^d}^2 dy$.

Pour $v \in V_{\#}$, on peut utiliser l'inégalité de Poincaré–Wirtinger :

$$\int_Y v^2 \leq C_{PW} \int_Y \|\nabla v\|^2 \implies \|v\|_{H^1}^2 \leq (C_{PW} + 1) \int_Y \|\nabla v\|^2,$$

donc

$$\forall v \in V_{\#}, \quad \left| \int_Y A(y) \nabla v \cdot \nabla v \right| \geq \frac{c}{C_{PW} + 1} \|v\|_{H^1}^2.$$

- La continuité de ℓ se démontre comme pour le problème de Dirichlet.

On peut donc appliquer le théorème de Lax–Milgram et on montre comme pour le problème de Dirichlet, la continuité par rapport aux données.

Pour montrer l'unicité à une constante près, il suffit de prendre deux solutions $u_1 - u_2$ et d'observer que le problème que vérifie $u_1 - u_2 - \int_Y (u_1 - u_2)$ est $(\mathcal{P}_{\#})$ sans terme source. De plus cette fonction est à moyenne nulle. D'après ce que nous venons de démontrer $u_1 - u_2 = \int_Y (u_1 - u_2)$. La solution est donc bien unique à une constante près.

Remarque .21

Le résultat s'applique aussi si $f \in (H_{\#}^1(Y))'$, c'est-à-dire s'il existe $w_f \in H_{\#}^1(Y)$ t.q. $\langle f, v \rangle = (w_f, v)_{H^1}$.

- *Ex. 1* : $f \in L^2 \subset (H_{\#}^1(Y))'$; $v \mapsto \int_Y f v$ est linéaire continue dans $H_{\#}^1(Y)$.
- *Ex. 2* : $\mathbf{G} \in [L^2(Y)]^d$; $\operatorname{div} \mathbf{G} : v \mapsto - \int_Y \mathbf{G} \cdot \nabla v$ est linéaire continue dans $H_{\#}^1(Y)$, donc $\operatorname{div} \mathbf{G} \in (H_{\#}^1(Y))'$.

Si $f \in (H_{\#}^1(Y))'$, la condition de compatibilité s'écrit $\langle f, 1 \rangle = 0$, ou encore $\int_Y w_f = 0$.

Notons enfin que pour l'exemple 2, $\operatorname{div} \mathbf{G}$ vérifie la condition de compatibilité.