

Séance 3 : Théorème de Lax-Milgram

Dans l'exercice 1, nous montrons que la coercivité implique le caractère défini positif d'une forme bilinéaire et que, dans le cas de la dimension infinie, il n'y a pas équivalence.

Dans les exercices 2, 3 et 4, nous étudions le laplacien avec des conditions de type Dirichlet, Fourier et Neumann. Dans chacune de ces situations, nous cherchons à appliquer le théorème de Lax-Milgram. Pour cela nous utilisons des inégalités de type Poincaré que nous démontrons dans des configurations simples.

Dans l'exercice 5, qui est considéré comme hors programme mais qui peut être fait pour aller plus loin, nous démontrons des inégalités de type Poincaré dans des ouverts bornés connexes Ω de $\mathbb{R}^n$. On utilise pour cela un théorème important d'analyse (admis), le théorème de Rellich.

Exercice 1 Etude élémentaire de la coercivité

Soit V muni de la norme $\|\cdot\|_V$ un espace de Hilbert réel, et a une forme bilinéaire et continue de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$.

Question 0. On dit que a est *coercive* si

- (a) $\forall v \in V \setminus \{0\}, \quad a(v, v) > 0$
- (b) $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$
- (c) $\exists \alpha > 0$ tel que $\forall u, v \in V, \quad a(u, v) \geq \alpha \|u\|_V \|v\|_V$.

Question 1. En dimension finie. Si $V = \mathbb{R}^N$, établir que a définie-positive équivaut à a coercive.

Indication : on pourra utiliser que la sphère unité de V : $\mathbb{S} := \{u \in V \text{ tel que } \|u\|_V = 1\}$ est fermée et bornée donc compacte (car V est un espace vectoriel de dimension finie).

Question 2. En dimension infinie.

- (a) Que se passe-t-il si V est de dimension infinie? On pourra construire un contre-exemple quand V est un espace de Hilbert admet une base hilbertienne $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$
- (b) Montrer notamment que pour $V = H^1(]0, 1[)$, la forme bilinéaire a définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx$$

est définie positive mais n'est pas coercive.

1. On suppose ici que l'espace de Hilbert V est séparable, c'est-à-dire qu'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense. Comme V est en particulier un espace métrique, on peut montrer qu'il existe une famille dénombrable qui en constitue une base. Et, pour finir, on peut orthogonaliser celle-ci...

Question 3. Soit $V = H^1(]0, 1[)$ et la forme bilinéaire a continue de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \omega^2 \int_0^1 u(x)v(x) dx$$

avec $\omega \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que ni a ni $-a$ ne sont coercives.

Indication pour Q2-(b) et Q3 : utiliser comme fonction test $u = \cos(n\pi x)$ pour différentes valeurs de n

Exercice 2 Inégalités de Poincaré et laplacien avec conditions de Dirichlet

Question 1. Montrer qu'il existe une constante $C_1 > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C_1 \{ \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + |v(0)| \}.$$

Question 2. On considère le domaine $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$. En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une constante $C_p > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p [\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}]. \quad (1)$$

Question 3. On admet que cette inégalité est vraie quel que soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. Que devient cette inégalité dans $H_0^1(\Omega)$? En déduire que la semi-norme H^1 définie par

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |v|_{H^1} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$$

est équivalente à la norme H^1 dans $H_0^1(\Omega)$, c'est-à-dire qu'il existe $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ telles que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |v|_{H^1}^2 \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (2)$$

Question 4. Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière" et un terme source $f \in L^2(\Omega)$.

On considère le problème aux limites

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \quad (3)$$

Construire la formulation variationnelle de ce problème et montrer que le théorème de Lax Milgram s'applique. Pour varier par rapport à ce qui a été fait en cours, on vous propose de munir l'espace $H_0^1(\Omega)$ de la semi-norme H^1 .

Question 5. Montrer que l'unique solution u de (3) dépend continument des données.

Exercice 3 Laplacien avec conditions de Fourier

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est “régulière”, des termes sources $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$ et $\lambda > 0$.

On considère le problème aux limites

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} . \quad (4)$$

Question 0. Quelle assertion est fausse

- (a) $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ est un espace de Hilbert.
- (b) $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert.
- (c) $H_0^1(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert..

Question 1. Construire la formulation variationnelle de ce problème et en utilisant l’inégalité (1) (admise pour un domaine Ω général), montrer que le problème est bien posé.

Question 2. Montrer que l’unique solution u de (4) dépend continument des données.

Exercice 4 Inégalités de Poincaré-Wirtinger et Laplacien avec conditions de Neumann

Question 1. Montrer qu’il existe une constante $C_2 > 0$ telle que

$$\forall v \in H^1([0, 1]), \quad \|v\|_{L^2([0, 1])} \leq C_2 \left\{ \|v'\|_{L^2([0, 1])} + |m(v)| \right\},$$

avec $m(v) = \int_0^1 v(y) dy$ la moyenne de v .

On admettra dans la suite que pour tout Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, on a l’inégalité de Poincaré-Wirtinger :

$$\exists C > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \left| \int_{\Omega} v(x) dx \right| \right). \quad (5)$$

Soient Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est “régulière” et des termes sources $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

On considère le problème aux limites

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} . \quad (6)$$

Question 2. Montrer que pour que (6) admette au moins une solution, il est nécessaire que f et g vérifient

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega + \int_{\Gamma} g \, d\Gamma = 0. \quad (7)$$

On suppose dans toute la suite que f et g vérifient (7).

Question 3. Démontrer que s'il existe une solution dans $H^1(\Omega)$ du problème (6) alors il en existe une infinité.

Question 4. Définissons l'espace

$$V_m = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} u = 0 \right\}.$$

Montrer que V_m muni de la norme H^1 est un espace de Hilbert.

Question 5. En cherchant une solution de (6) dans V_m , écrire la formulation variationnelle (FV) dans V_m vérifiée par u . Prouver que (FV) admet une unique solution u_m dans V_m .

Question 6. Montrer que, sous la condition nécessaire d'existence (7), la formulation variationnelle écrite dans V_m est équivalente au problème (6). Attention $\mathcal{D}(\Omega) \not\subset V_m$.

Exercice 5 $\diamond$ Inégalités de Poincaré dans $\mathbb{R}^N$

Soit Ω un ouvert borné et connexe de $\mathbb{R}^N$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière".

Question 1. On note Γ une partie de $\partial\Omega$ de mesure non-nulle. Montrer qu'il existe une constante C_1 telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\gamma_{\Gamma} v\|_{L^2(\Gamma)} \right\},$$

où γ_{Γ} est l'application trace $\gamma_{\Gamma} : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$.

Question 2. Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |m(v)| \right\},$$

avec $m(v) = \frac{\int_{\Omega} v \, d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega}$ la moyenne de v .

Question 3. Soit $L : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ linéaire et continue. A quelle condition sur L peut-on prouver qu'il existe une constante C_3 telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |L(v)| \right\}.$$

Indication : on pourra raisonner par l'absurde pour les questions 1., 2. et 3., à l'aide du théorème de Rellich.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$ "suffisamment régulière". Alors, de toute suite bornée de $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite qui converge dans $L^2(\Omega)$.

Question 4. Donner des exemples de sous-espaces de $H^1(\Omega)$, pour lesquels la semi-norme H^1

$$|\cdot|_1 : v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$$

est une norme, équivalente à $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.