

## Corrigé de la Séance 3 : Théorème de Lax-Milgram

**Exercice 1 Etude élémentaire de la coercivité**

Soit  $V$  muni de la norme  $\|\cdot\|_V$  un espace de Hilbert réel, et  $a$  une forme bilinéaire et continue de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Question 0.** On dit que  $a$  est *coercive* si

- (a)  $\forall v \in V \setminus \{0\}, \quad a(v, v) > 0$
- (b)  $\exists \alpha > 0$  tel que  $\forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$
- (c)  $\exists \alpha > 0$  tel que  $\forall u, v \in V, \quad a(u, v) \geq \alpha \|u\|_V \|v\|_V$ .

**Corrigé de la question 0 :** La réponse est la (b). Si a vérifie (a), on dit qu'elle est définie positive.

**Question 1. En dimension finie.** Si  $V = \mathbb{R}^N$ , établir que  $a$  définie-positive équivaut à  $a$  coercive.

*Indication : on pourra utiliser que la sphère unité de  $V : \mathbb{S} := \{u \in V \text{ tel que } \|u\|_V = 1\}$  est fermée et bornée donc compacte (car  $V$  est un espace vectoriel de dimension finie).*

**Corrigé de la question 1 :** Soit  $\ell_a$  la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \ell_a : \mathbb{S} &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto a(u, u) \end{aligned} .$$

La fonction  $\ell_a$  est continue sur  $\mathbb{S}$ , qui est compacte :  $\ell_a$  atteint son maximum et son minimum sur  $\mathbb{S}$ . Notons  $\alpha$  le minimum :  $\exists u_{\min} \in \mathbb{S}$  tel que  $\ell_a(u_{\min}) = \alpha$ . Comme  $a$  est définie-positive et  $u_{\min} \neq 0$  (il est de norme un), on en déduit que  $\alpha > 0$ .

Soit  $v \in V \setminus \{0\}$  quelconque. Posons  $u = v/\|v\|_V$  : alors  $u \in \mathbb{S}$  et l'on a  $\ell_a(u) \geq \alpha$ , ce que l'on peut réécrire par bilinéarité

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2.$$

On en déduit que  $a$  est coercive.

**Question 2. En dimension infinie.**

- (a) Que se passe-t-il si  $V$  est de dimension infinie ? On pourra construire un contre-exemple quand  $V$  est un espace de Hilbert admet une base hilbertienne  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ <sup>1</sup>

1. On suppose ici que l'espace de Hilbert  $V$  est séparable, c'est-à-dire qu'il contient un sous-ensemble dénombrable et dense. Comme  $V$  est en particulier un espace métrique, on peut montrer qu'il existe une famille dénombrable qui en constitue une base. Et, pour finir, on peut orthogonaliser celle-ci...

(b) Montrer notamment que pour  $V = H^1(]0, 1[)$ , la forme bilinéaire  $a$  définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx$$

est définie positive mais n'est pas coercive.

### Corrigé de la question 2 :

(a) En dimension infinie, un ensemble fermé et borné n'est pas automatiquement compact.

On ne peut donc pas raisonner comme précédemment...

Qui plus est, nous avons le contre-exemple suivant dans le cas où  $V$  est un espace de Hilbert séparable : soit  $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une base hilbertienne de  $V$ . On peut écrire tout élément  $v$  de  $V$  sous la forme

$$v = \sum_0^\infty v_k e_k, \text{ avec } \forall k \in \mathbb{N}, v_k = (v|e_k)_V, \text{ et } \|v\|_V = \left\{ \sum_0^\infty v_k^2 \right\}^{1/2}.$$

Pour définir une forme bilinéaire, il suffit décrire son action sur tout couple d'éléments de la base. Posons :

$$a_*(e_i, e_j) = \delta_{i,j} \frac{1}{j+1}, \quad \forall i, j \in \mathbb{N}.$$

On en déduit que

$$a_*(v, v) = \sum_0^\infty \frac{v_k^2}{k+1}.$$

Par construction,  $a_*$  est donc définie-positive. Par contre, elle n'est pas coercive, puisque l'on a la relation  $\lim_{k \rightarrow +\infty} a_*(e_k, e_k) = 0$  !

**NB.** Dans un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, la sphère unité  $\mathbb{S}$  n'est donc jamais compacte ! Sinon, le raisonnement de la Q1 s'appliquerait, et il suivrait que la forme  $a_*$ , qui est définie-positive, est coercive...

(b) Par exemple,  $V = H^1(]0, 1[)$ , la forme bilinéaire  $a$  définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x) dx$$

est définie positive de manière évidente. Mais elle n'est pas coercive puisque pour

$$u_n(x) = \cos(n\pi x), \quad n \geq 1$$

on a

$$a(u_n, u_n) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \|u_n\|_V^2 = \frac{1}{2}(1 + n^2\pi^2)$$

**Question 3.** Soit  $V = H^1(]0, 1[)$  et la forme bilinéaire  $a$  continue de  $V \times V$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \omega^2 \int_0^1 u(x)v(x) dx$$

avec  $\omega \in \mathbb{R}$  fixé. Montrer que ni  $a$  ni  $-a$  ne sont coercives.

**Corrigé de la question 3 :** Soit  $V = H^1(]0, 1[)$  et la forme bilinéaire  $a$  définie par

$$\forall u, v \in V, \quad a(u, v) = \int_0^1 u'(x)v'(x) dx - \omega^2 \int_0^1 u(x)v(x) dx$$

avec  $\omega \in \mathbb{R}$  fixé. On montre facilement que

$$a(1, 1) = -\omega^2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad a(u_n, u_n) = \frac{1}{2}(n^2\pi^2 - \omega^2)$$

où on a choisi de nouveau  $u_n = \cos(n\pi x)$ . En particulier il existe un entier  $p$  assez grand tel que  $a(u_p, u_p) > 0$ . On montre alors qu'il existe une constante  $\beta$  telle que pour  $u = 1 + \beta u_p$  on ait  $a(u, u) = 0$ , avec  $u \neq 0$ . En effet, il suffit de remarquer que  $a(1, u_p) = 0$  et de choisir  $\beta$  telle que

$$\beta^2 = -\frac{a(1, 1)}{a(u_p, u_p)} = 2\frac{\omega^2}{p^2\pi^2 - \omega^2}.$$

La forme bilinéaire  $a$  n'est donc pas coercive et pour les mêmes raisons  $-a$  non plus.

## Exercice 2 Inégalités de Poincaré et laplacien avec conditions de Dirichlet

**Question 1.** Montrer qu'il existe une constante  $C_1 > 0$  telle que

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C_1 \{\|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + |v(0)|\}.$$

**Corrigé de la question 1 :** Tout d'abord, nous rappelons avoir démontré dans l'Ex4 du TD1 que l'application trace définie par

$$\begin{aligned} \gamma_* : C^1([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(0) \end{aligned}$$

se prolonge de façon unique en une application linéaire et continue de  $H^1(]0, 1[)$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $v$  une fonction  $C^1([0, 1])$ , on peut écrire

$$\forall x \in [0, 1], \quad v(x) = v(0) + \int_0^x v'(y) dy. \quad (1)$$

Par application de l'inégalité triangulaire au membre de droite (pour la norme de  $L^2(]0, 1[; dx)$ ), on déduit

$$\begin{aligned} \left( \int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \left( \int_0^1 \left( \int_0^x v'(y) dy \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} + \left( \int_0^1 |v(0)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left( \int_0^1 \left( \int_0^x |v'(y)|^2 dy \right) x dx \right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)| \\ &\leq \left( \int_0^1 |v'(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} + |v(0)|, \end{aligned}$$

où on a utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour obtenir la deuxième inégalité et on majoré  $x$  par 1. Ainsi en utilisant des arguments de densité et de continuité de l'application trace en 0 on montre que  $C_1 = 1$  est tel que

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C_1 [\|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + |v(0)|].$$

**Question 2.** On considère le domaine  $\Omega = ]0, 1[ \times ]0, 1[$ . En utilisant la question précédente, montrer qu'il existe une constante  $C_p > 0$  telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p [\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}]. \quad (2)$$

**Corrigé de la question 2 :** Soit  $v$  une fonction  $C^1(\Omega)$ . D'après la question précédente, on a

$$\forall y \in [0, 1], \quad \|v(\cdot, y)\|_{L^2(]0, 1[)}^2 \leq 2 [\|\partial_x v(\cdot, y)\|_{L^2(]0, 1[)}^2 + |v(0, y)|^2].$$

où on a utilisé que  $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ . En intégrant en  $y$ , on obtient

$$\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2 \left[ \|\partial_x v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^1 |v(0, y)|^2 dy \right] \leq 2 [\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2].$$

En utilisant que  $\sqrt{a^2 + b^2} \leq (a + b)$ , on trouve

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \sqrt{2} [\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}].$$

En utilisant des arguments de densité et de continuité de l'application trace, on déduit l'inégalité recherchée pour  $v \in H^1(\Omega)$ .

**Question 3.** On admet que cette inégalité est vraie quel que soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ . Que devient cette inégalité dans  $H_0^1(\Omega)$ ? En déduire que la semi-norme  $H^1$  définie par

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |v|_{H^1} = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$$

est équivalente à la norme  $H^1$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , c'est-à-dire qu'il existe  $C_1 > 0$  et  $C_2 > 0$  telles que

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad C_1 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq |v|_{H^1}^2 \leq C_2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2. \quad (3)$$

**Corrigé de la question 3 :** On a immédiatement, par définition de l'espace  $H_0^1(\Omega)$  l'inégalité de Poincaré :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}. \quad (4)$$

Montrons maintenant l'équivalence des normes dans  $H_0^1(\Omega)$ . On a de manière évidente

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} \leq \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

D'après l'inégalité de Poincaré on a aussi

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{H^1(\Omega)} = (\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}^2)^{1/2} \leq \sqrt{1 + C_p^2} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}.$$

Dans  $H_0^1(\Omega)$ , la norme  $H^1$  et la semi-norme  $H^1$  sont donc équivalentes.

**Question 4.** Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est "régulière" et un terme source  $f \in L^2(\Omega)$ .

On considère le problème aux limites

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \quad (5)$$

Construire la formulation variationnelle de ce problème et montrer que le théorème de Lax Milgram s'applique. Pour varier par rapport à ce qui a été fait en cours, on vous propose de munir l'espace  $H_0^1(\Omega)$  de la semi-norme  $H^1$ .

**Corrigé de la question 4 :** On montre facilement que ce problème est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

Trouver  $u \in H_0^1(\Omega)$  telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (6)$$

Pour l'équivalence entre les 2 problèmes, voir le TD2.

On munit l'espace  $H_0^1(\Omega)$  de la semi-norme  $H^1$ . En tant qu'espace fermé de  $H^1(\Omega)$  et muni de la norme  $H^1$ , c'est un espace de Hilbert. Comme la norme  $H^1$  et la semi-norme  $H^1$  sont équivalentes dans  $H_0^1(\Omega)$ , l'espace  $H_0^1(\Omega)$  muni de la semi-norme  $H^1$  est aussi un espace de Hilbert

La forme  $\ell(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$  est, de manière évidente, linéaire, et également continue :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad |\ell(v)| = \left| \int_{\Omega} f v \, d\Omega \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|f\|_{L^2(\Omega)} |v|_{H^1}.$$

où on a utilisé l'inégalité de Poincaré.

La forme  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$  est, elle, clairement bilinéaire, et continue

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega), \quad |a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} = |u|_{H^1} |v|_{H^1}.$$

Il ne reste plus qu'à démontrer la coercivité de  $a$  pour pouvoir appliquer le théorème de Lax-Milgram et conclure au caractère bien posé du problème. On a

$$\forall u \in H_0^1(\Omega), \quad a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega = |u|_{H^1}^2,$$

La forme bilinéaire  $a$  est donc coercive, le théorème de Lax-Milgram s'applique : il existe une unique solution au problème (6) et donc au problème (5).

**Question 5.** Montrer que l'unique solution  $u$  de (5) dépend continument des données.

**Corrigé de la question 5 :** Il suffit d'écrire (6) pour  $v = u$ . On obtient

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega = \int_{\Omega} f u d\Omega = \ell u$$

En utilisant la coercivité de  $a$  et la continuité de  $\ell$ , on obtient

$$|u|_{H^1} \leq C_p \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

### Exercice 3 Laplacien avec conditions de Fourier

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est "régulière", des termes sources  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$  et  $\lambda > 0$ .

On considère le problème aux limites

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7)$$

**Question 0.** Quelle assertion est fausse

- (a)  $H^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$  est un espace de Hilbert.
- (b)  $H^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$  est un espace de Hilbert.
- (c)  $H_0^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$  est un espace de Hilbert..

**Corrigé de la question 0 :** La réponse (a) est fausse :  $H^1$  est complet pour la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$  pas pour la norme  $\|\cdot\|_{L^2}$ . Notons que  $H_0^1(\Omega)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{H^1}$  est un espace de Hilbert en tant que sous espace fermé de  $H^1(\Omega)$  (on peut le justifier de 2 façons différentes : (1) c'est l'adhérence de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $H^1(\Omega)$  ou bien (2) c'est le noyau de l'application trace qui est continue dans  $H^1(\Omega)$ .)

**Question 1.** Construire la formulation variationnelle de ce problème et en utilisant l'inégalité (2) (admise pour un domaine  $\Omega$  général), montrer que le problème est bien posé.

**Corrigé de la question 1 :** On montre que ce problème est équivalent à la formulation variationnelle suivante :

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} uv \, d\Gamma = \int_{\Omega} fv \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (8)$$

Pour l'équivalence entre les 2 problèmes, voir le TD2.

La forme  $\ell(v) = \int_{\Omega} fv \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma$  est clairement linéaire. Pour la continuité, notons que :

$$\begin{aligned} \forall v \in H^1(\Omega), \quad |\ell(v)| &\leq \left| \int_{\Omega} fv \, d\Omega \right| + \left| \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|g\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

D'après la continuité de l'application trace :

$$\exists C_0 > 0, \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)};$$

on déduit la continuité de la forme linéaire :

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad |\ell(v)| \leq (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}) \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Le caractère bilinéaire de la forme  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} uv \, d\Gamma$  est évident. Pour la continuité,

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \quad |a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \lambda \|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}.$$

On utilise encore la continuité de l'application trace pour finalement avoir

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \quad |a(u, v)| \leq (1 + \lambda C_0^2) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Ici encore, il ne reste plus qu'à démontrer la coercivité de  $a$ . Notons que

$$\forall u \in H^1(\Omega), \quad a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^2 \, d\Gamma = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \lambda \|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2.$$

D'après (2), on a

$$\frac{1}{2C_p^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left[ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right],$$

avec  $C_p > 0$  indépendant de  $u$ , soit finalement

$$\begin{aligned} \forall u \in H^1(\Omega), \quad 2a(u, u) &\geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \min(\lambda, 1) \left[ \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \|u|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right] \\ &\geq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)^N}^2 + \frac{\min(\lambda, 1)}{2C_p^2} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \min(1, \frac{\min(\lambda, 1)}{2C_p^2}) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Le théorème de Lax-Milgram s'applique et donne l'existence et l'unicité de la solution de (8) et donc de (7).

**Question 2.** Montrer que l'unique solution  $u$  de (7) dépend continument des données.

**Corrigé de la question 2 :** Il suffit d'écrire (8) pour  $v = u$ . On obtient

$$a(u, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} |u|^2 d\Gamma = \int_{\Omega} f u d\Omega + \int_{\partial\Omega} g u d\Gamma = \ell u$$

En utilisant la coercivité de  $a$  et la continuité de  $\ell$ , on obtient

$$|u|_{H^1} \leq 2(\min(1, \frac{\min(\lambda, 1)}{2C_p^2}))^{-1} (\|f\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}).$$

#### Exercice 4 Inégalités de Poincaré-Wirtinger et Laplacien avec conditions de Neumann

**Question 1.** Montrer qu'il existe une constante  $C_2 > 0$  telle que

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C_2 \{ \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + |m(v)| \},$$

avec  $m(v) = \int_0^1 v(y) dy$  la moyenne de  $v$ .

**Corrigé de la question 1 :** Tout d'abord, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on peut montrer, en utilisant des arguments de densité, que l'application moyenne

$$\begin{aligned} m : C^0([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto \int_0^1 v(y) dy \end{aligned}$$

est continue de  $L^2(]0, 1[)$  dans  $\mathbb{R}$ .

En intégrant pour  $v \in C^1([0, 1])$  l'identité

$$v(x) = \int_y^x v'(z) dz + v(y),$$

sur  $[0, 1]$  par rapport à la variable  $y$ , on obtient

$$\forall x \in [0, 1], \quad v(x) = \int_0^1 \int_y^x v'(z) dz dy + m(v).$$

D'où

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1], \quad |v(x)| &\leq \int_0^1 \left| \int_y^x v'(z) dz \right| dy + |m(v)| \leq \int_0^1 \int_0^1 |v'(z)| dz dy + |m(v)| \\ &\leq \int_0^1 |v'(z)| dz + |m(v)|. \end{aligned}$$

Par intégration directe des carrés sur  $]0, 1[$  :  $\|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \| \int_0^1 |v'(z)| dz + |m(v)| \|_{L^2(]0, 1[)}$ . En appliquant à nouveau l'inégalité triangulaire (cf. les calculs après (1)), on en déduit donc que pour  $v \in C^1([0, 1])$

$$\|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + |m(v)|.$$

Des arguments de densité nous permettent de déduire que (avec  $C_2 = 1$ )

$$\forall v \in H^1(]0, 1[), \quad \|v\|_{L^2(]0, 1[)} \leq C_2 \{ \|v'\|_{L^2(]0, 1[)} + |m(v)| \}.$$

On admettra dans la suite que pour tout  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , on a l'inégalité de Poincaré-Wirtinger :

$$\exists C > 0, \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \left( \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \left| \int_{\Omega} v(x) dx \right| \right). \quad (9)$$

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est "régulière" et des termes sources  $f \in L^2(\Omega)$  et  $g \in L^2(\partial\Omega)$ .

On considère le problème aux limites

Trouver  $u \in H^1(\Omega)$  telle que

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}. \quad (10)$$

**Question 2.** Montrer que pour que (10) admette au moins une solution, il est nécessaire que  $f$  et  $g$  vérifient

$$\int_{\Omega} f d\Omega + \int_{\Gamma} g d\Gamma = 0. \quad (11)$$

On suppose dans toute la suite que  $f$  et  $g$  vérifient (11).

**Corrigé de la question 2.** Supposons qu'il existe une solution de (10). En multipliant l'équation volumique de (10) par  $v = 1$ , en intégrant sur  $\Omega$  et en utilisant une formule de Green, on obtient la condition nécessaire d'existence.

**Question 3.** Démontrer que s'il existe une solution dans  $H^1(\Omega)$  du problème (10) alors il en existe une infinité.

**Corrigé de la question 3 :** Soit  $u$  une solution du problème, alors pour tout  $c \in \mathbb{R}$ , la fonction

$$x \mapsto u(x) + c$$

est aussi solution du problème.

**Question 4.** Définissons l'espace

$$V_m = \left\{ u \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} u = 0 \right\}.$$

Montrer que  $V_m$  muni de la norme  $H^1$  est un espace de Hilbert.

**Corrigé de la question 4.** C'est un sous espace vectoriel de  $H^1$  qui est fermé. En effet, c'est le noyau de l'application moyenne qui est continue pour la norme  $H^1$ . Muni de la norme  $H^1$ , c'est donc bien un espace de Hilbert.

**Question 5.** En cherchant une solution de (10) dans  $V_m$ , écrire la formulation variationnelle (FV) dans  $V_m$  vérifiée par  $u$ . Prouver que (FV) admet une unique solution  $u_m$  dans  $V_m$ .

**Corrigé de la question 5.** Si  $u \in V_m$  est solution de (10) alors  $u$  est, de manière évidente, solution de la formulation variationnelle

Trouver  $u \in V_m$  telle que

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma, \quad \forall v \in V_m. \quad (12)$$

Nous allons chercher à vérifier les hypothèses du théorème de Lax-Milgram.

On munit l'espace  $V_m$  de la norme  $H^1$ . D'après la Question 4,  $V_m$  est bien un espace de Hilbert. En utilisant les mêmes arguments que pour le cas des conditions de Fourier, on montre que la forme  $\ell(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma$  est linéaire et continue.

En utilisant les mêmes arguments que pour le cas des conditions de Dirichlet, on montre que la forme  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega$  est bilinéaire et continue. Pour la coercivité, il suffit d'utiliser, l'équivalence de la semi-norme  $H^1$  et la norme  $H^1$  dans l'espace  $V_m$ , qui est peut être démontrée en utilisant l'inégalité de Poincaré-Wirtinger (9).

En vertu du théorème de Lax-Milgram, le problème (12) est bien posé.

**Question 6.** Montrer que, sous la condition nécessaire d'existence (11), la formulation variationnelle écrite dans  $V_m$  est équivalente au problème (10). Attention  $\mathcal{D}(\Omega) \not\subset V_m$ .

**Corrigé de la question 6.** On veut montrer que  $u$  admet un laplacien faible dans  $L^2$  ou en d'autres termes,  $\nabla u$  admet une divergence faible dans  $L^2(\Omega)$ . Pour cela, on doit prendre des fonctions test  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ . Cependant, ces fonctions test n'appartiennent pas toujours à  $V_m$ . L'idée est d'utiliser dans la formulation variationnelle  $v - m(v) \in V_m$  où  $m(v) = \frac{\int_{\Omega} v \, d\Omega}{\int_{\Omega} 1 \, d\Omega}$  est la moyenne de  $v$ . On écrit alors pour tout  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - m(v)) \, d\Omega &= \int_{\Omega} f (v - m(v)) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g (v - m(v)) \, d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma - m(v) \left( \int_{\Omega} f \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, d\Gamma \right) \\ &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega - m(v) \left( \int_{\Omega} f \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, d\Gamma \right) \quad \text{car } v|_{\partial\Omega} = 0 \\ &= \int_{\Omega} f v \, d\Omega \quad \text{car (11) est vérifiée} \end{aligned}$$

On en déduit que  $\nabla u$  admet une divergence faible dans  $L^2(\Omega)$  qui est  $-f$  ou en d'autres termes  $u$  admet un laplacien dans  $L^2$  qui est  $-f$ . On a donc que  $-\Delta u = f$  dans  $L^2(\Omega)$  et cette égalité est vraie presque partout. On retrouve maintenant la condition aux limites en écrivant pour

$v \in H^1(\Omega)$  (et en notant que  $v - m(v) \in V_m$ ) :

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial\Omega} gv \, d\Gamma &= \int_{\partial\Omega} g(v - m(v)) \, d\Gamma + m(v) \int_{\partial\Omega} g \, d\Gamma \\
 &= \int_{\partial\Omega} g(v - m(v)) \, d\Gamma - m(v) \int_{\partial\Omega} f \, d\Omega \quad \text{car (11) est vérifiée} \\
 &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla (v - m(v)) \, d\Omega - \int_{\Omega} f(v - m(v)) \, d\Omega \\
 &\quad - m(v) \int_{\Omega} f \, d\Omega \quad \text{car } u \text{ est solution de (FV)} \\
 &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\Omega} f v \, d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} (-\Delta u - f)v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma \\
 &= \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} v \, d\Gamma.
 \end{aligned}$$

Ci-dessus, on a utilisé la Formule de Green pour obtenir l'avant-dernière égalité. Ceci étant vrai pour tout  $v \in H^1(\Omega)$ , on en déduit la condition aux limites de Neumann sur  $\partial\Omega$  comme habituellement.

### Exercice 5 ♦ Inégalités de Poincaré dans $\mathbb{R}^N$

Soit  $\Omega$  un ouvert borné et connexe de  $\mathbb{R}^N$ , dont la frontière  $\partial\Omega$  est “régulière”.

**Question 1.** On note  $\Gamma$  une partie de  $\partial\Omega$  de mesure non-nulle.

Montrer qu’il existe une constante  $C_1$  telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\gamma_\Gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \right\},$$

où  $\gamma_\Gamma$  est l’application trace  $\gamma_\Gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Gamma)$ .

**Corrigé de la question 1.** Raisonnons par l’absurde. On aurait alors le résultat :

$$\forall C, \exists v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} > C \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\gamma_\Gamma v\|_{L^2(\Gamma)} \right\}.$$

On peut choisir en particulier  $C = n$ , pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . Ainsi, il existe  $v_n \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^N} + \|\gamma_\Gamma v_n\|_{L^2(\Gamma)} < \frac{1}{n}. \quad (13)$$

Par construction, on remarque que la suite  $(\nabla v_n)_n$  tend vers 0 dans  $L^2(\Omega)^N$ .

Par ailleurs, la suite  $(v_n)_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ , puisque

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^N}^2 < 1 + \frac{1}{n^2} < 2.$$

D’après le théorème de Rellich, il existe une sous-suite extraite de  $(v_n)_n$ , toujours notée  $(v_n)_n$ , qui converge fortement dans  $L^2(\Omega)$ , vers une limite  $v \in L^2(\Omega)$ . On a bien sûr  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

Est ce que  $v$  admet un gradient faible dans  $L^2(\Omega)$  et que vaut  $\nabla v$ ? Pour répondre à

cette question, on introduit  $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ . Nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v \operatorname{div} \phi \, d\Omega &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} v_n \operatorname{div} \phi \, d\Omega \quad (v = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \text{ dans } L^2(\Omega)) \\ &= - \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \nabla v_n \cdot \phi \, d\Omega \quad (\text{definition de la dérivation faible var } v_n \in H^1(\Omega)) \\ &= 0 \quad (\lim_{n \rightarrow +\infty} \nabla v_n = 0 \text{ dans } L^2(\Omega)^N). \end{aligned}$$

Ainsi,  $v$  admet bien un gradient faible dans  $L^2(\Omega)$  et  $\nabla v = 0$  ! Comme  $0 \in L^2(\Omega)^N$ ,  $v$  appartient donc à  $H^1(\Omega)$ . Et puisque son gradient est nul sur  $\Omega$  connexe, on a  $v = \text{cste}$ .

Comme d'une part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$  dans  $L^2(\Omega)$  et d'autre part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nabla v_n = 0 = \nabla v$  dans  $L^2(\Omega)^N$ , on a en fait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Quel est l'avantage, par rapport à la convergence de  $(v_n)_n$  dans  $L^2(\Omega)$  ? *L'application trace est continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , mais elle n'est pas continue de  $L^2(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ .*

De la convergence dans  $H^1(\Omega)$ , on en déduit la convergence des traces  $(\gamma_{\Gamma} v_n)_n$  vers  $\gamma_{\Gamma} v$  dans  $L^2(\Gamma)$ . D'après (13),  $\gamma_{\Gamma} v = 0$ , or on sait que  $v = \text{cste}$ , d'où finalement  $v = 0$  dans  $\Omega$ . Ceci contredit le fait que  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

**Question 2.** Montrer qu'il existe une constante  $C_2$  telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |m(v)| \right\},$$

avec  $m(v) = \frac{\int_{\Omega} v \, d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega}$  la moyenne de  $v$ .

**Corrigé de la question 2.** La procédure est quasi-identique à celle de la Q1. Raisonnons par l'absurde. On a alors le résultat :

$$\forall C, \exists v \in H^1(\Omega), \quad \|v\|_{L^2(\Omega)} > C(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |m(v)|).$$

On peut encore une fois choisir  $C = n$ , pour  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$  : il existe  $v_n \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^N} + |m(v_n)| < \frac{1}{n}.$$

Par construction, on remarque que la suite  $(\nabla v_n)_n$  tend vers 0 dans  $L^2(\Omega)^N$ .

Par ailleurs, la suite  $(v_n)_n$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ , puisque pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , on a  $\|v_n\|_{H^1(\Omega)}^2 < 2$ . D'après le théorème de Rellich, il existe une sous-suite extraite de  $(v_n)_n$ , toujours notée  $(v_n)_n$ , qui converge fortement dans  $L^2(\Omega)$ , vers une limite  $v \in L^2(\Omega)$ . On a bien sûr  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

En utilisant exactement les mêmes arguments qu'à la Q1, on montre que  $\nabla v = 0$  ! Comme  $0 \in L^2(\Omega)^N$ ,  $v$  appartient donc à  $H^1(\Omega)$ . Et puisque son gradient est nul sur  $\Omega$  connexe, on a  $v = \text{cste}$ .

Mais dans ce cas

$$v = \frac{\int_{\Omega} v \, d\Omega}{\int_{\Omega} d\Omega} = \frac{1}{\int_{\Omega} d\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} v_n \, d\Omega = 0,$$

ce qui contredit l'égalité  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

**Question 3.** Soit  $L : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  linéaire et continue. A quelle condition sur  $L$  peut-on prouver qu'il existe une constante  $C_3$  telle que

$$\forall v \in H^1(\Omega), \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \left\{ \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N} + |L(v)| \right\}.$$

**Corrigé de la question 3.** Si la forme linéaire  $L$  est telle que  $L(1) = 0$ , alors il n'existe pas de constante  $C_3$  telle que

$$\|1\|_{L^2(\Omega)} \leq C_3 \left\{ \|\nabla 1\|_{L^2(\Omega)^N} + |L(1)| \right\},$$

puisque  $\|1\|_{L^2(\Omega)} > 0$ , alors que le membre de droite vaut 0 !

Supposons maintenant que  $L(1) \neq 0$  et raisonnons comme à la Q2 par l'absurde : on commence par, pour tout  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , il existe  $v_n \in H^1(\Omega)$  tel que

$$\|v_n\|_{L^2(\Omega)} = 1, \quad \|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)^N} + |L(v_n)| < \frac{1}{n},$$

jusqu'à obtenir une limite  $v$  dans  $L^2(\Omega)$  constante et telle que  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

Comme d'une part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v$  dans  $L^2(\Omega)$  et d'autre part  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nabla v_n = 0 = \nabla v$  dans  $L^2(\Omega)^N$ , on a en fait

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = v \text{ dans } H^1(\Omega).$$

Puisque la forme  $L$  est continue sur  $H^1(\Omega)$ , ceci implique que

$$L(v) = \lim_{n \rightarrow +\infty} L(v_n) = 0.$$

Par linéarité,  $L(v) = L(v \times 1) = v \times L(1)$  et, comme  $L(1) \neq 0$  on a nécessairement  $v = 0$ , ce qui contredit finalement  $\|v\|_{L^2(\Omega)} = 1$ .

**Question 4.** Donner des exemples de sous-espaces de  $H^1(\Omega)$ , pour lesquels la semi-norme  $H^1$

$$|\cdot|_1 : v \mapsto \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)^N}$$

est une norme, équivalente à  $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ .

**Corrigé de la question 4.** Nous pouvons donc donner une classe d'espaces où la semi-norme  $H^1$  est en réalité une norme, soit

$$\forall \Gamma \subset \partial\Omega \text{ de mesure non nulle, } \mathcal{V}_\Gamma = \{v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } v|_\Gamma = 0\}$$

et notamment

$$H_0^1(\Omega).$$

Les espaces

$$\mathcal{V}_m = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_\Omega v \, d\Omega = 0 \right\}$$

$$\forall \mathcal{O} \subset \Omega \text{ de mesure non nulle, } \mathcal{V}_{m,\mathcal{O}} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\mathcal{O}} v \, d\Omega = 0 \right\}$$

$$\forall \Gamma \subset \partial\Omega \text{ de mesure non nulle, } \mathcal{V}_{m,\Gamma} = \left\{ v \in H^1(\Omega) \text{ tel que } \int_{\Gamma} v \, d\Gamma = 0 \right\}$$

conviennent aussi.