

Corrigé de la Séance 2 : Formulations variationnelles

Dans la suite, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est “régulière”. On note $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière.

Exercice 1 Problème avec condition aux limites de Fourier

On considère le problème aux limites

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} + \lambda u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

avec $\lambda \geq 0$, $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$.

Question 0. On rappelle que γ_0 est la première application trace. Quelle assertion est juste

- (a) $\text{Im } \gamma_0 \subset L^2(\partial\Omega)$ et $\text{Im } \gamma_0$ est dense dans $L^2(\partial\Omega)$
- (b) $L^2(\partial\Omega) \subset \text{Im } \gamma_0$ et $L^2(\partial\Omega)$ est dense dans $\text{Im } \gamma_0$
- (c) $L^2(\partial\Omega) = \text{Im } \gamma_0$.

Corrigé de la question 0 : C'est la réponse (a) : γ_0 est une application linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$, son image est donc incluse dans $L^2(\partial\Omega)$. On a vu dans le cours que son image est même dense dans $L^2(\partial\Omega)$.

Question 1. Construire la formulation variationnelle (FV1) associée à (1).

Corrigé de la question 1 : En multipliant la 1ère équation de (1) par $v \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω on obtient facilement

$$\int_{\Omega} uv \, d\Omega - \int_{\Omega} \Delta u \, v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Comme u est dans $H^1(\Omega)$ et $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$, on a $u \in H^1(\Omega, \Delta)$. On suppose pour simplifier que $u \in H^2(\Omega)$. On peut donc appliquer la formule de Green au deuxième terme, on a

$$\int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega - \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega} v |_{\partial\Omega} \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Il suffit enfin d'utiliser la 2ème équation de (1) pour trouver la formulation variationnelle associée :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma \\ = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned} \quad (\text{FV1})$$

Question 2. Prouver l'unicité de la solution de (FV1). Que se passe-t-il si $\lambda < 0$?

Corrigé de la question 2 : Soient u_1, u_2 deux solutions de (FV1), alors

$$\int_{\Omega} (u_1 - u_2)v \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} (u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega}) v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

On choisit la fonction-test $v = u_1 - u_2$ pour trouver

$$\|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda \|u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = 0.$$

Puisque $\lambda \geq 0$, on en déduit que $\|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)} = 0$ et donc $u_1 = u_2$.

Lorsque $\lambda < 0$, le 1er terme est positif, et le 2nd est négatif : on ne peut pas conclure tout de suite. Cependant, si $\lambda < 0$ mais $|\lambda|$ petit, on peut encore conclure. En effet, on a par continuité de l'application trace

$$\|u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq C_0^2 \|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)}^2,$$

donc comme $\lambda < 0$, on obtient

$$0 = \|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)}^2 + \lambda \|u_1|_{\partial\Omega} - u_2|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \geq (1 + \lambda C_0^2) \|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Si $1 + \lambda C_0^2 > 0$, c'est à dire $\lambda > -1/C_0^2$, le dernier terme est positif et donc nul ! Ceci nous donne de nouveau l'unicité.

Si $\lambda < 0$ et $\lambda < -1/C_0^2$, on ne peut pas conclure.

Question 3. Etablir l'équivalence entre les problèmes (1) et (FV1).

Corrigé de la question 3 : D'après ce que l'on vient de voir, si u est solution de (1), alors u vérifie (FV1). Examinons la réciproque en supposant que u est solution de (FV1). Attention, on ne peut pas utiliser la formule de Green car on ne sait pour l'instant que le fait que $u \in H^1(\Omega)$ et on n'a pour l'instant aucune information sur son laplacien. Il faut donc d'une part montrer que si u vérifie la formulation variationnelle alors son laplacien est dans $L^2(\Omega)$ et l'EDP volumique est bien vérifiée. Montrer que u a un laplacien faible dans $L^2(\Omega)$ c'est équivalent à montrer que ∇u a une divergence faible dans $L^2(\Omega)$. Pour cela, d'après la définition du cours, il suffit de montrer qu'il existe une fonction $L \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = - \int_{\Omega} L v \, d\Omega,$$

dans ce cas $L = \operatorname{div} \nabla u = \Delta u$. Dans (FV1), si on choisit $v \in \mathcal{D}(\Omega) (\subset H^1(\Omega))$, on a alors :

$$\int_{\Omega} (uv + \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega,$$

soit

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} (f - u) v d\Omega.$$

où $f - u \in L^2(\Omega)$. La fonction u a bien un laplacien dans $L^2(\Omega)$ et $-\Delta u = f - u$ dans $L^2(\Omega)$ et donc presque partout dans Ω . En particulier, on a :

$$\int_{\Omega} (u - \Delta u) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (2)$$

Maintenant, on revient à (FV1) en sachant que u est dans $H^1(\Omega, \Delta)$ ($u \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u = u - f \in L^2(\Omega)$). On suppose $u \in H^2(\Omega)$ et cette fois on peut appliquer la formule de Green :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - \Delta u) v d\Omega + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega} v |_{\partial\Omega} d\Gamma + \lambda \int_{\partial\Omega} u |_{\partial\Omega} v |_{\partial\Omega} d\Gamma \\ = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v |_{\partial\Omega} d\Gamma, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

et, d'après (2), on aboutit à

$$\int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega} + \lambda u |_{\partial\Omega} - g) v |_{\partial\Omega} d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Quand v parcourt $H^1(\Omega)$, $v|_{\partial\Omega}$ parcourt $\operatorname{Im}\gamma_0$. Donc cette dernière égalité se réécrit

$$((\nabla u \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega} + \lambda u |_{\partial\Omega} - g), \varphi)_{L^2(\partial\Omega)} = 0, \quad \forall \varphi \in \operatorname{Im}\gamma_0.$$

En d'autres termes, $\psi := (\nabla u \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega} + \lambda u |_{\partial\Omega} - g) \in L^2(\partial\Omega)$ est orthogonal à $\operatorname{Im}\gamma_0$ qui est un sous ensemble dense de $L^2(\partial\Omega)$ donc ψ est nulle. En effet, soit $\varphi \in L^2(\partial\Omega)$, il existe une suite (φ_n) d'éléments de $\operatorname{Im}\gamma_0$ telle que $\|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\partial\Omega)}$ tend vers 0. En utilisant une inégalité triangulaire et une inégalité de Cauchy Schwarz, on obtient

$$|(\psi, \varphi)_{L^2(\partial\Omega)}| \leq |(\psi, \varphi - \varphi_n)_{L^2(\partial\Omega)}| + |(\psi, \varphi_n)_{L^2(\partial\Omega)}| \leq \|\psi\|_{L^2(\partial\Omega)} \|\varphi - \varphi_n\|_{L^2(\partial\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

où on a utilisé que $|(\psi, \varphi_n)_{L^2(\partial\Omega)}| = 0$ car φ_n est dans $\operatorname{Im}\gamma_0$. $\psi = (\nabla u \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega} + \lambda u |_{\partial\Omega} - g) \in L^2(\partial\Omega)$ est donc orthogonal à tout $L^2(\partial\Omega)$ donc elle est nulle. On a donc prouvé que $\nabla u \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega} + \lambda u |_{\partial\Omega} = g$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et donc presque partout sur $\partial\Omega$.

◇ **Remarque (qui sort du cadre du cours) :** Si on ne suppose pas que u est dans $H^2(\Omega)$, on peut encore appliquer une formule de Green généralisée puisque $u \in \{w \in H^1(\Omega) \mid \Delta w \in L^2(\Omega)\}$ et on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (u - \Delta u) v d\Omega + {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \langle \nabla u \cdot \mathbf{n} |_{\partial\Omega}, v |_{\partial\Omega} \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} + \lambda {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \langle u |_{\partial\Omega}, v |_{\partial\Omega} \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \\ = \int_{\Omega} f v d\Omega + {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \langle g, v |_{\partial\Omega} \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{aligned}$$

où $H^{1/2}(\partial\Omega) = \text{Im}(\gamma_0)$ et $H^{-1/2}(\partial\Omega) := (H^{1/2}(\partial\Omega))'$ est l'ensemble des formes linéaires continues sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$. D'après (2), on aboutit à

$$_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \langle \nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} - g, v|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Comme $(\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} - g)$ est par définition une forme linéaire et continue sur $H^{1/2}(\partial\Omega)$, l'égalité ci-dessus valable pour tout élément de $H^{1/2}(\partial\Omega)$ prouve que $\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} = g$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Pour conclure, comme g et $u|_{\partial\Omega}$ appartiennent à $L^2(\partial\Omega)$, on en déduit que $\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} + \lambda u|_{\partial\Omega} = g$ presque partout sur $\partial\Omega$.

Exercice 2 Diffusion de la chaleur

On considère le problème aux limites

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} -\text{div}(k\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (3)$$

avec $f \in L^2(\Omega)$, $k \in L^\infty(\Omega)$ et $k(\mathbf{x}) \geq k_{\min} > 0$ presque pour tout $\mathbf{x}$ dans Ω .

Question 0. Donner les espaces auxquels doivent appartenir $\vec{W}$ et v pour pouvoir écrire la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega} (\text{div } \vec{W} v + \vec{W} \cdot \nabla v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \vec{W} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} d\Gamma$$

$$(a) \quad \vec{W} \in (L^2(\Omega))^3 \text{ et } v \in H^1(\Omega)$$

$$(b) \quad \vec{W} \in (L^2(\Omega))^3, \text{ div } \vec{W} \in L^2(\Omega) \text{ et } v \in H^1(\Omega)$$

$$(c) \quad \vec{W} \in (H^1(\Omega))^3 \text{ et } v \in H^1(\Omega)$$

En déduire les espaces auxquels doivent appartenir u et v pour pouvoir écrire la formule de Green suivante

$$\int_{\Omega} (\text{div}(k\nabla u)v + k\nabla u \cdot \nabla v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} k\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} d\Gamma$$

Corrigé de la question 0 : (a) Si $\vec{W}$ est seulement dans $(L^2(\Omega))^3$, on ne sait donc pas que $\text{div } \vec{W} \in L^2(\Omega)$, on ne peut donc pas espérer pouvoir donner un sens à l'intégrale volumique.

(b) Si $\vec{W} \in (L^2(\Omega))^3$ et $\text{div } \vec{W} \in L^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on peut donner un sens à l'intégrale volumique. Mais si $\vec{W} \notin (H^1(\Omega))^3$ on n'a pas $\vec{W} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ dans $L^2(\partial\Omega)$.

(c) Si $\vec{W} \in (H^1(\Omega))^3$ et $v \in H^1(\Omega)$ alors les intégrales volumiques ont bien un sens et également les intégrales surfaciques. En effet, on a $\vec{W}_i|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$ et donc $\vec{W} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ aussi. On a aussi $v|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$.

Pour écrire

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div}(k\nabla u)v + \nabla u \cdot \nabla v) d\Omega = \int_{\partial\Omega} k\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} d\Gamma$$

il suffit donc de prendre v dans $H^1(\Omega)$ et u dans $L^2(\Omega)$ tel que $k\nabla u \in (H^1(\Omega))^n$. Dans ce cas, la première intégrale volumique a bien un sens. L'intégrale surfacique aussi puisque $k\nabla u$ a bien une trace sur le bord et en particulier $k\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega}$ est bien dans $L^2(\partial\Omega)$.

Question 1. Construire la formulation variationnelle (FV3) associée à (3) (on supposera pour simplifier que u est dans $H^1(\Omega)$ et est telle que $k\nabla u \in (H^1(\Omega))^3$).

Corrigé de la question 1 : Soit $u \in H^1(\Omega)$ solution de (3).

En multipliant la 1ère équation de (3) par $v \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω on obtient

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div}(k\nabla u) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

On aimerait utiliser la formule de Green de la Q0. On a d'après la première équation de (3) que $\operatorname{div}(k\nabla u) = -f \in L^2(\Omega)$. On suppose de plus pour simplifier que u est telle que $k\nabla u \in (H^1(\Omega))^n$. On peut appliquer la formule de Green, on obtient

$$\int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v d\Omega - \int_{\partial\Omega} k\nabla u \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} d\Gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

Comme nous n'avons aucune information sur la trace normale de u sur le bord, on va faire disparaître l'intégrale surfacique en prenant $v|_{\partial\Omega} = 0$ sur $\partial\Omega$, c'est à dire $v \in H_0^1(\Omega)$.

Enfin, comme nous n'avons pas utilisé la condition aux bords de u dans la formulation variationnelle, on va intégrer cette condition dans l'espace dans lequel nous recherchons la solution, c'est à dire $H_0^1(\Omega)$.

On en déduit la formulation variationnelle associée à (3) :

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} k\nabla u \cdot \nabla v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (\text{FV3})$$

Question 2. Prouver l'unicité de la solution de (FV3).

Corrigé de la question 2 : Soient u_1, u_2 deux solutions de (FV3), alors

$$\int_{\Omega} k\nabla(u_1 - u_2) \cdot \nabla v d\Omega = 0, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

On choisit la fonction-test $v = u_1 - u_2$ pour trouver

$$\int_{\Omega} k|\nabla(u_1 - u_2)|^2 d\Omega = 0.$$

Par définition de k on sait que

$$k_{\min} \int_{\Omega} |\nabla(u_1 - u_2)|^2 d\Omega \leq \int_{\Omega} k|\nabla(u_1 - u_2)|^2 d\Omega$$

avec $k_{\min} > 0$, et on conclut que $\nabla(u_1 - u_2) = 0$ dans Ω . Ainsi, $u_1 - u_2$ est une fonction constante sur chaque composante connexe de l'ouvert Ω . Comme de plus on sait que $(u_1 - u_2)|_{\partial\Omega} = 0$, toutes les constantes sont nulles et donc $u_1 = u_2$.

Question 3. Etablir l'équivalence entre les problèmes (3) et (FV3).

Corrigé de la question 3 : D'après ce qui précède, si u est solution de (3), alors u vérifie (FV3). La réciproque est très simple à établir. En effet, comme u une solution de (FV3) appartient à $H_0^1(\Omega)$, on a $u|_{\partial\Omega} = 0$. Puis, on choisit dans (FV3) une fonction-test v de $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$. On a

$$\forall v \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} k \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega,$$

où $f \in L^2(\Omega)$. On a ainsi par définition que $k \nabla u$ a une divergence faible dans $L^2(\Omega)$ et $-\operatorname{div}(k \nabla u) = f$ dans $L^2(\Omega)$, et donc presque partout dans Ω .

Exercice 3 Coefficients discontinus

Soit d un entier naturel non nul, Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière suffisamment régulière. On le partitionne en $\overline{\Omega} = \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints à frontières suffisamment régulières. On note $\Sigma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, et on suppose, pour des

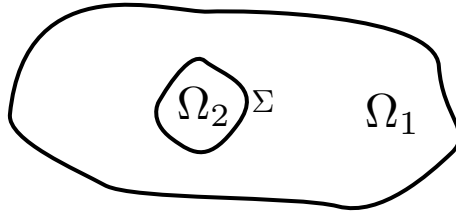


FIGURE 1 – Un exemple de domaine Ω .

raisons techniques dépassant le cadre de ce cours, que $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$. On note $\vec{n}$ le vecteur unitaire sortant à Ω_2 .

Soient κ_1, κ_2 deux constantes strictement positives et définissons $\kappa : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa_1 & \text{si } x \in \Omega_1, \\ \kappa_2 & \text{si } x \in \Omega_2. \end{cases}$$

Soit enfin $g \in L^2(\Sigma)$. On résout le problème variationnel ($\mathcal{P}$)

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Sigma} g v|_{\Sigma} \, d\Sigma, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Interpréter le problème ($\mathcal{P}$) en termes d'équations aux dérivées partielles dans Ω_1 et Ω_2 , de conditions aux limites et de condition sur l'interface Σ .

Corrigé de la question :

- (i) Tout d'abord, comme $u \in H_0^1(\Omega)$, on sait que $u \in H^1(\Omega)$ et $u = 0$ sur $\partial\Omega$.
(ii) On ne peut pas raisonner au sens des dérivées faibles dans Ω car au second membre, l'intégrale est une intégrale surfacique.

On va raisonner sous-domaine par sous-domaine pour "éliminer" cette intégrale surfacique dans un premier temps. Soit $\phi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$, que l'on prolonge par 0 à Ω : son prolongement, noté ϕ , appartient à $\mathcal{D}(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega) \subset H_0^1(\Omega)$, on peut l'utiliser comme fonction-test dans $(\mathcal{P})$, et on a $\ell(\phi) = 0$:

$$0 = \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla \phi \, d\Omega = \kappa_i \int_{\Omega_i} (\nabla u)|_{\Omega_i} \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega_i = \kappa_i \int_{\Omega_i} (\nabla u|_{\Omega_i}) \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega_i.$$

NB. Pour justifier l'égalité $(\nabla u)|_{\Omega_i} = \nabla(u|_{\Omega_i})$, voir TD1-Ex2-Q4.

Ainsi, $\nabla u|_{\Omega_i}$ a bien une divergence faible dans $L^2(\Omega_i)$ qui est nulle. Ainsi $\Delta u = 0$ dans $L^2(\Omega_i)$ pour $i = 1, 2$ et donc presque partout dans Ω .

- (iii) Dans la suite, nous notons $u_i := u|_{\Omega_i}$ pour $i = 1, 2$. Pour finir, prenons $v \in H_0^1(\Omega)$ et intégrons par parties sur Ω_1 et Ω_2 , en supposant que chaque u_i est dans $H^2(\Omega_i)$ pour pouvoir appliquer la formule de Green.

Ici, $v_i := v|_{\Omega_i}$ pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} g v \, d\Sigma &= \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \\ &= \kappa_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 \, d\Omega_1 + \kappa_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 \, d\Omega_2 \\ &= \kappa_1 \left(\int_{\partial\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\partial\Omega_1} v_1|_{\partial\Omega_1} \, d\Gamma - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 \, d\Omega_1 \right) \\ &\quad + \kappa_2 \left(\int_{\partial\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2|_{\partial\Omega_2} v_2|_{\partial\Omega_2} \, d\Gamma - \int_{\Omega_2} \Delta u_2 v_2 \, d\Omega_2 \right) \\ &= \kappa_1 \int_{\partial\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\partial\Omega_1} v_1|_{\partial\Omega_1} \, d\Gamma + \kappa_2 \int_{\partial\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2|_{\partial\Omega_2} v_2|_{\partial\Omega_2} \, d\Gamma. \end{aligned}$$

Par définition v s'annule sur la frontière $\partial\Omega$. Ainsi, le support de $v|_{\partial\Omega_i}$ est inclus dans l'interface Σ , pour $i = 1, 2$. On peut donc remplacer dans ce cas les intégrales sur $\partial\Omega_i$ par des intégrales sur Σ . Notons enfin que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ sur Σ . Il reste donc

$$\int_{\Sigma} g v|_{\Sigma} \, d\Sigma = \int_{\Sigma} (\kappa_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma} - \kappa_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma}) v|_{\Sigma} \, d\Sigma, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Comme $\Sigma \cap \partial\Omega = \emptyset$, l'ensemble des traces sur l'interface Σ d'éléments de $H_0^1(\Omega)$ coïncide avec l'ensemble de traces sur Σ d'éléments de $H^1(\Omega_2)$ qui est dense dans $L^2(\Sigma)$. En utilisant le même raisonnement que celui de la question 3 de l'exercice 1, on obtient que $(\kappa_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma} - \kappa_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma}) - g$ est orthogonal à toutes les fonctions de $L^2(\Sigma)$ donc cette fonction est nulle. En d'autres termes,

$$(\kappa_1 \nabla u_1 - \kappa_2 \nabla u_2) \cdot \mathbf{n}_1 = g \text{ dans } L^2(\Sigma).$$

On en déduit finalement que

$$(\kappa_1 \nabla u_1 - \kappa_2 \nabla u_2) \cdot \mathbf{n}_1 = g \text{ presque partout sur } \Sigma.$$

◊ **Remarque (qui sort du cadre du cours) :** Ici, $v_i := v|_{\Omega_i}$ pour $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Sigma} g v|_{\Sigma} d\Sigma &= \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v d\Omega \\
 &= \kappa_1 \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 d\Omega_1 + \kappa_2 \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \cdot \nabla v_2 d\Omega_2 \\
 &= \kappa_1 \left({}_{H^{-1/2}(\partial\Omega_1)} \langle \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\partial\Omega_1}, v_1|_{\partial\Omega_1} \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)} - \int_{\Omega_1} \Delta u_1 v_1 d\Omega_1 \right) \\
 &\quad + \kappa_2 \left({}_{H^{-1/2}(\partial\Omega_2)} \langle \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2|_{\partial\Omega_2}, v_2|_{\partial\Omega_2} \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega_2)} - \int_{\Omega_2} \Delta u_2 v_2 d\Omega_2 \right) \\
 &= \kappa_1 {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega_1)} \langle \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1, v_1 \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega_1)} + \kappa_2 {}_{H^{-1/2}(\partial\Omega_2)} \langle \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_2, v_2 \rangle_{H^{1/2}(\partial\Omega_2)}.
 \end{aligned}$$

Par définition v s'annule sur la frontière $\partial\Omega$. Ainsi, le support de $v|_{\partial\Omega_i}$ est inclus dans l'interface Σ , pour $i = 1, 2$. On peut donc remplacer dans ce cas les crochets de dualité (entre espaces fonctionnels définis) sur $\partial\Omega_i$ par des crochets de dualités (entre espaces fonctionnels définis) sur Σ . Et de même pour le membre de gauche. Notons enfin que $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ sur Σ . Il reste donc

$${}_{H^{-1/2}(\Sigma)} \langle g, v|_{\Sigma} \rangle_{H^{1/2}(\Sigma)} = {}_{H^{-1/2}(\Sigma)} \langle (\kappa_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma} - \kappa_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1|_{\Sigma}), v|_{\Sigma} \rangle_{H^{1/2}(\Sigma)}, \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Par surjectivité de l'ensemble des traces sur l'interface Σ d'éléments de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Sigma)$, on trouve

$$\kappa_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \kappa_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1 = g \text{ dans } H^{-1/2}(\Sigma).$$

Comme $g \in L^2(\Sigma)$, on en déduit finalement que

$$\kappa_1 \nabla u_1 \cdot \mathbf{n}_1 - \kappa_2 \nabla u_2 \cdot \mathbf{n}_1 = g \text{ presque partout sur } \Sigma.$$