

Séance 1 : Outils et manipulations élémentaires

Dans l'exercice 1, l'objectif est de manipuler certaines formules de Green. Dans l'exercice 2, on utilise la dérivation au sens faible pour identifier les fonctions qui appartiennent à l'espace de Sobolev H^1 . Signalons que le résultat de la Question 4 est important et nous servira plus tard. Dans l'exercice 3, on démontre ce fameux théorème de prolongement par continuité des formes linéaires qui est utilisé dans tout le cours. Dans l'exercice 4, on démontre le théorème de trace dans plusieurs configurations et on voit que la trace d'une fonction est dans $L^2(\partial\Omega)$ quand cette fonction est dans $H^1(\Omega)$ mais pas si elle est seulement dans $L^2(\Omega)$.

Exercice 1 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On note $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière.

Question 0. Parmi ces formules, quelle est celle qui est correcte

- (a) $\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega});$
- (b) $\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega});$
- (c) $\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}).$

Question 1. Etablir à partir de la formule correcte de la question 0 les formules de Green suivantes

$$\int_{\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u v n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}); \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} (u \operatorname{div} \mathbf{v} + \nabla u \cdot \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3. \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta w + \nabla u \cdot \nabla w) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \nabla w \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3. \quad (3)$$

où on rappelle que

$$\forall \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3, \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 v_i n_i;$$

et

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \quad \Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

◇ **Question 2.** Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$. Etablir également la formule de Stokes

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma.$$

Exercice 2 Exemples d'éléments de H^1

Question 0. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3, \dots$), dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On rappelle la définition des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ t.q. } \int_{\Omega} |f|^2 < +\infty\}$$

et

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, d\} \right\},$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens faible de f dans la direction e_i .

Quelle assertion est juste

$$(a) \quad \mathcal{C}^0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$$

$$(b) \quad \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$$

$$(c) \quad \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega).$$

Question 1. Les fonctions définies respectivement par :

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur }]0, 1[\\ 2-x & \text{sur }]1, 2[\end{cases}, \quad w(x) = \begin{cases} a & \text{sur }]0, 1[\\ b & \text{sur }]1, 2[\end{cases}, \quad z(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

appartiennent-elles à $H^1([0, 2])$?

Question 2. Soit $\omega = B(0, 1/2)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction définie par

$$u(x, y) = |\log(x^2 + y^2)|^k \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0)$$

appartient à $H^1(\omega)$ si $k < 1/2$, alors qu'elle n'appartient pas à $\mathcal{C}^0(\overline{\omega})$, dès que $k > 0$.

Question 3. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$: on le partitionne en $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints. On note $\Gamma_{1-2} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ l'interface entre Ω_1 et Ω_2 . On considère $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_i := v|_{\Omega_i} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_i)$, pour $i = 1, 2$.

Montrer que $v \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $v_1|_{\Gamma_{1-2}} = v_2|_{\Gamma_{1-2}}$.

Question 4. Montrer que le résultat précédent s'étend aux fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. On utilisera le théorème de trace du cours : la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur Γ , une partie de mesure non nulle du bord, est dans $L^2(\Gamma)$.

Exercice 3 $\diamond$ Prolongement par continuité

Soient H un espace vectoriel normé réel et V un sous-espace vectoriel de H , tels que V soit dense dans H . Soit ℓ une application linéaire de V dans $\mathbb{R}$, pour laquelle il existe une constante $C_\ell > 0$ telle que, pour tout $v \in V$, on ait $|\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_H$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité de façon unique ℓ en une application $\tilde{\ell}$ linéaire et continue de H dans $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall h \in H, \quad \tilde{\ell}(h) = \lim_k \ell(v_k)$$

où $(v_k)_k$ est une suite d'éléments de V telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - h\|_H = 0$.

Exercice 4 Théorème de trace

Question 1. Soit

$$\begin{aligned} \gamma_* : \mathcal{C}^\infty([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(0). \end{aligned}$$

Montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty([0, 1]), \quad |v(0)| \leq C \|v\|_{H^1([0, 1])}. \quad (4)$$

En utilisant l'exercice précédent, qu'en déduisez vous ?

Indication : on pourra écrire que pour tout v dans $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$, $v(0) = v(x) - \int_0^x v'(t) dt$.

Question 2. Montrer que l'inégalité (4) où on a remplacé la norme H^1 par la norme L^2 ne peut pas être vérifiée.

Question 3. Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et $\Gamma = \{0\} \times]0, 1[$ une partie du bord $\partial\Omega$. En repartant du résultat de la Question 1, montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \|v|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (5)$$

Qu'en déduisez vous sur l'application trace sur Γ ? Faire de même en remplaçant Γ par $\partial\Omega$.