

Corrigé de la Séance 1 : Outils et manipulations élémentaires

Exercice 1 Formules de Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$, dont la frontière $\partial\Omega$ est “régulière”. On note $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure à la frontière.

Question 0. Parmi ces formules, quelle est celle qui est correcte

- (a) $\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega});$
- (b) $\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega});$
- (c) $\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}).$

Question 1. Etablir à partir de la formule correcte de la question 0 les formules de Green suivantes

$$\int_{\Omega} \left(u \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u v n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}); \quad (1)$$

$$\int_{\Omega} (u \operatorname{div} \mathbf{v} + \nabla u \cdot \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall \mathbf{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3. \quad (2)$$

$$\int_{\Omega} (u \Delta w + \nabla u \cdot \nabla w) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \nabla w \cdot \mathbf{n} d\Gamma, \quad \forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \forall w \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}). \quad (3)$$

où on rappelle que

$$\forall \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3, \operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \sum_{i=1}^3 v_i n_i;$$

et

$$\forall u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} \end{bmatrix}, \Delta u = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Corrigé de la question 1 : C’est la formule (b) de la Question 0. qui est correcte.

Pour obtenir la relation (1), il suffit de choisir $w = uv$ avec $u, v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$.

Pour obtenir la relation (2), il suffit de choisir pour tout i entre 1 et 3, $w = uv_i$ avec $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ et v_i les composantes de $\mathbf{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$. Cela donne

$$\int_{\Omega} \left(u \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} uv_i n_i d\Gamma \quad (1 \leq i \leq 3), \quad \forall 1 \leq i \leq 3,$$

puis en sommant sur i

$$\sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \left(u \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i \right) d\Omega = \sum_{i=1}^3 \int_{\partial\Omega} uv_i n_i d\Gamma,$$

d'où

$$\int_{\Omega} \left(u \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} v_i \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u \sum_{i=1}^3 v_i n_i d\Gamma.$$

On en déduit par définition des opérateurs différentiels la relation (2).

Enfin pour obtenir la relation (3), il suffit de choisir dans la relation (2) $\mathbf{v} := \nabla w$ et d'utiliser que $\operatorname{div} \nabla w = \Delta w$.

◇ **Question 2.** Soient $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux éléments de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$. Etablir également la formule de Stokes

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma.$$

Corrigé de la question 2 : Soient $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3$. montrons que

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} - \operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} d\Gamma.$$

Rappels :

$$\forall \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})^3, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} \times \mathbf{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - v_3 u_1 \\ u_1 v_2 - v_1 u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{v} \, d\Omega &= \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^3 u_i (\operatorname{rot} \mathbf{v})_i \right) d\Omega \\
&= \int_{\Omega} u_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + u_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + u_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \\
&\stackrel{(I.P.P.)}{=} \int_{\Omega} \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x_2} v_3 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} v_2 \right) + \left(-\frac{\partial u_2}{\partial x_3} v_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} v_3 \right) + \left(-\frac{\partial u_3}{\partial x_1} v_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} v_1 \right) \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \left(u_1(v_3 n_2 - v_2 n_3) + u_2(v_1 n_3 - v_3 n_1) + u_3(v_2 n_1 - v_1 n_2) \right) d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} v_1 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) + v_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) + v_3 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \\
&\quad + \int_{\partial\Omega} \left(v_1(u_2 n_3 - u_3 n_2) + v_2(u_3 n_1 - u_1 n_3) + v_3(u_1 n_2 - u_2 n_1) \right) d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma
\end{aligned}$$

Exercice 2 Exemples d'éléments de H^1

Question 0. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3, \dots$), dont la frontière $\partial\Omega$ est "régulière". On rappelle la définition des espaces $L^2(\Omega)$ et $H^1(\Omega)$

$$L^2(\Omega) = \{f \text{ mesurable sur } \Omega \text{ t.q. } \int_{\Omega} |f|^2 < +\infty\}$$

et

$$H^1(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \text{ t.q. } \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \forall i \in \{1, \dots, d\}\},$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens faible de f dans la direction e_i .

Quelle assertion est juste

- (a) $\mathcal{C}^0(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{C}^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$
- (b) $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$
- (c) $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$ et $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

Question 1. Les fonctions définies respectivement par :

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{sur }]0, 1[\\ 2-x & \text{sur }]1, 2[\end{cases}, \quad w(x) = \begin{cases} a & \text{sur }]0, 1[\\ b & \text{sur }]1, 2[\end{cases}, \quad z(x) = x^p, \quad p \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

appartiennent-elles à $H^1(]0, 2[)$?

Corrigé de la question 1 : Il est facile de voir que les fonctions v et w sont bien dans $L^2(]0, 2[)$ (car elles sont bornées). Nous allons vérifier qu'elles admettent des dérivées faibles dans $L^2(]0, 2[)$. D'après le cours, une fonction $f \in L^2(]0, 2[)$ admet une dérivée faible dans L^2

si et seulement si il existe $\tilde{f} \in L^2(]0, 2[)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, 2[), \quad \int_{]0, 2[} f \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx = - \int_{]0, 2[} \tilde{f} \varphi dx.$$

Dans ce cas, $\tilde{f} \in L^2(]0, 2[)$ est la dérivée faible de f . On a également montré dans le cours qu'une fonction $f \in L^2(]0, 2[)$ admet une dérivée faible si et seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, 2[), \quad \left| \int_{]0, 2[} f \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(]0, 2[)}. \quad (4)$$

Pour la fonction v , nous avons pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 2[)$:

$$\begin{aligned} \int_{]0, 2[} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx &= \int_{]0, 1[} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \int_{]1, 2[} v \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \\ &= \int_{]0, 1[} \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \int_{]1, 2[} (2-x) \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \stackrel{(I.P.P.)}{=} \varphi(1) + \left[-\varphi(1) + \int_{]1, 2[} \varphi dx \right] \\ &= \int_{]0, 2[} \chi_{]1, 2[} \varphi dx \end{aligned}$$

avec $\chi_{]1, 2[}$ la fonction indicatrice de $]1, 2[$ qui appartient bien à $L^2(]0, 2[)$. La fonction v admet donc une dérivée faible dans L^2 et

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\chi_{]1, 2[}.$$

Pour la fonction w , nous avons pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 2[)$:

$$\begin{aligned} \int_{]0, 2[} w \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx &= \int_{]0, 1[} w \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \int_{]1, 2[} w \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \\ &= + \int_{]0, 1[} a \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \int_{]1, 2[} b \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx \stackrel{(I.P.P.)}{=} -(b-a)\varphi(1) \end{aligned}$$

Si $b = a$ alors de manière évidente $w \in H^1(]0, 2[)$.

Si $b \neq a$, nous allons montrer que $w \notin H^1(]0, 2[)$. Pour cela, il suffit de trouver une suite de fonctions $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(]0, 2[)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\varphi_n(1) = 1 \quad \text{et} \quad \|\varphi_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ceci contredira (4) et prouvera donc que w n'a pas de dérivée faible dans L^2 . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi \in \mathcal{D}(]0, 2[)$ et $\varphi(1) = 1$. Il suffit de choisir $\varphi_n(x) = \varphi(n(x-1)+1)$ (voir la remarque ^a).

Considérons maintenant la fonction z . Tout d'abord, elle est de carré intégrable si et seulement si x^{2p} est intégrable c'est-à-dire si et seulement si $p > -1/2$. De plus, elle est $C^1(]0, 2[)$ donc elle a une dérivée au sens classique qui coïncide par définition avec la dérivée faible. Sa dérivée $\frac{\partial z}{\partial x} = px^{p-1}$ est de carré intégrable si et seulement si $p > 1/2$. On en déduit

$$z \in H^1(]0, 2[) \quad \Leftrightarrow \quad p > 1/2$$

a. Remarque : pour les personnes familières de la dérivée au sens des distributions, nous venons de montrer que la dérivée au sens des distributions de w est $(b-a)\delta_1$ où δ_1 est la distribution de Dirac en 1. On vient également de montrer que le dirac n'est pas dans L^2 (il est même possible de montrer qu'il n'est pas mesurable au sens de Lebesgue).

Question 2. Soit $\omega = B(0, 1/2)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la fonction définie par

$$u(x, y) = |\log(x^2 + y^2)|^k \text{ pour } (x, y) \neq (0, 0)$$

appartient à $H^1(\omega)$ si $k < 1/2$, alors qu'elle n'appartient pas à $C^0(\bar{\omega})$, dès que $k > 0$.

Corrigé de la question 2 : On montre que (en introduisant les coordonnées polaires c'est à dire en posant $x = r \cos(\theta)$ et $y = r \sin(\theta)$)

$$\int_{B(0,1/2)} |\log(x^2 + y^2)|^{2k} dx dy = 2^{2k} \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} (\log(r))^{2k} r dr d\theta.$$

Pour tout k , $r \mapsto (\log(r))^{2k} r$ tend vers 0 quand r tend vers 0 donc u est dans $L^2(\omega)$ pour tout k . Pour savoir si u est dans H^1 , on calcule son gradient (au sens classique puisqu'elle est dans $C^1(\omega)$) et on déduit que u est dans H^1 si et seulement si

$$\int_{B(0,1/2)} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy < +\infty$$

c'est à dire

$$2^{2k} k^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{1/2} \frac{(\log(r))^{2k-2}}{r^2} r dr d\theta < +\infty.$$

La primitive de $r^{-1} \log(r)^{2k-2}$ est $(2k-1)^{-1} \log(r)^{2k-1}$ donc l'intégrale précédente est finie si et seulement si $2k-1 < 0$. Pour $k \in (0, 1/2)$, on a donc u qui est H^1 sans être continue.

Question 3. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$: on le partitionne en $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints. On note $\Gamma_{1-2} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$ l'interface entre Ω_1 et Ω_2 . On considère $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v_i := v|_{\Omega_i} \in C^1(\bar{\Omega}_i)$, pour $i = 1, 2$.

Montrer que $v \in H^1(\Omega)$ si et seulement si $v_1|_{\Gamma_{1-2}} = v_2|_{\Gamma_{1-2}}$.

Corrigé de la question 3 : Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$: on le partitionne en $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$, où Ω_1 et Ω_2 sont deux ouverts disjoints. On considère $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v|_{\Omega_i} \in C^1(\bar{\Omega}_i)$, pour $i = 1, 2$. On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que $v \in H^1(\Omega)$.

On sait pour commencer que $v \in L^2(\Omega)$. On va donc étudier sous quelle condition v admet un gradient faible dans $L^2(\Omega)$, c'est à dire une dérivée faible dans toutes les directions.

On rappelle que d'après le cours, une fonction $f \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée faible dans L^2 dans la direction e_j si et seulement si il existe $\tilde{f}_j \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\Omega = - \int_{\Omega} \tilde{f}_j \varphi d\Omega.$$

Dans ce cas, $\tilde{f}_j \in L^2(\Omega)$ est la dérivée faible de f dans la direction e_j . On a également montré dans le cours qu'une fonction $f \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée faible dans la direction e_j si et

seulement si il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left| \int_{\Omega} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\Omega \right| \leq C \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5)$$

On pose $v_i = v|_{\Omega_i}$ et on considère une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et un entier j telle que $1 \leq j \leq N$. On a

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_{\Omega_1} v_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\Omega_1 + \int_{\Omega_2} v_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\Omega_2$$

En intégrant par parties et en isolant les intégrales sur le bord, on obtient

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = - \int_{\Omega_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \varphi d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_j} \varphi d\Omega_2 + \int_{\partial\Omega_1} v_1 \varphi \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_j d\Gamma_1 + \int_{\partial\Omega_2} v_2 \varphi \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_j d\Gamma_2$$

où $\mathbf{n}_1$ (respectivement $\mathbf{n}_2$) est la normale extérieure à $\partial\Omega_1$ (respectivement $\partial\Omega_2$). Comme φ est à support compact elle s'annule sur la frontière et donc en notant $\Gamma_{1-2} = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2$, on a

$$\int_{\partial\Omega_1} v_1 \varphi \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_j d\Gamma_1 + \int_{\partial\Omega_2} v_2 \varphi \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{e}_j d\Gamma_2 = \int_{\Gamma_{1-2}} (v_1 - v_2) \varphi \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_j d\Gamma_{1-2}$$

car $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ en tout point de Γ_{1-2} et φ est continue à la traversée de Γ_{1-2} . On a donc ^a

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = - \int_{\Omega_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \varphi d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_j} \varphi d\Omega_2 + \int_{\Gamma_{1-2}} (v_1 - v_2) \varphi \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_j d\Gamma_{1-2},$$

ceci étant vraie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour tout j . Si v est continue à la traversée de Γ_{1-2} , c'est à dire $v_1|_{\Gamma_{1-2}} = v_2|_{\Gamma_{1-2}}$ alors v admet une dérivée faible dans la direction $\mathbf{e}_j$ pour tout j et on a pour tout j

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \chi_{\Omega_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} + \chi_{\Omega_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_j},$$

soit

$$\nabla v = \chi_{\Omega_1} \nabla v_1 + \chi_{\Omega_2} \nabla v_2,$$

où χ_{Ω_i} est la fonction caractéristique de Ω_i . On rappelle que comme $v_i \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_i)$ alors $v_i \in H^1(\Omega_i)$.

Si v n'est pas continue à la traversée de Γ_{1-2} , on montre que v n'admet pas de dérivée faible dans toutes les directions en utilisant des idées similaires à celles de la question 1 (pour la fonction w). Plus précisément, on peut introduire une suite de fonctions $(\varphi_n)_n \in \mathcal{D}(\Omega)^N$ telle que

$$\exists C > 0, \forall n, \quad \left| \int_{\Gamma_{1-2}} \psi \varphi_n \right| > C > 0 \quad \text{et} \quad \|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

où on a posé $\psi = (v_1 - v_2) \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_j$ qu'on suppose non nul. Pour simplifier, on suppose que $\Gamma_{1-2} \subset \{x_1 = 0\}$ (on redresse Γ_{1-2}), que Γ_{1-2} contient l'origine (à une translation près) et $\psi = 1$ sur Γ_{1-2} . Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans $\square(r) := \{\mathbf{x}, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i| \leq r, \quad 1 \leq i \leq N\}$ où r est choisi assez petit pour que $\square(r)$ soit inclus dans Ω . On choisit φ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ sur $\square(r/2)$. On pose $\varphi_n(\mathbf{x}) = \varphi(n x_1, x_2, \dots, x_N)$. Alors φ_n est à support compact dans $\square(r/n, r) := \{\mathbf{x}, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1| \leq r/n, |\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_j| \leq r \text{ pour } 2 \leq j \leq N\}$, $0 \leq \varphi_n \leq 1$, $\varphi_n = 1$ dans $\square(r/(2n), r/2)$. On a

$$\int_{\Gamma_{1-2}} \varphi_n d\Gamma_{1-2} \geq (r/2)^{N-1} > 0$$

mais aussi

$$\|\varphi_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left[\int_{\square(r/n, r)} d\Omega \right] = \frac{(2r)^N}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

a. Remarque : pour les personnes familières des distributions, nous venons de redémontrer la formule des sauts :

$$\nabla v = \chi_{\Omega_1} \nabla v_1 + \chi_{\Omega_2} \nabla v_2 - \delta_{\Gamma_{1-2}} (v_1|_{\Gamma_{1-2}} - v_2|_{\Gamma_{1-2}}) \mathbf{n}_1$$

où χ_{Ω_i} est la fonction caractéristique de Ω_i et δ est la distribution Dirac.

Question 4. Montrer que le résultat précédent s'étend aux fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. On utilisera le théorème de trace du cours : la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$ sur Γ , une partie de mesure non nulle du bord, est dans $L^2(\Gamma)$.

Corrigé de la question 4 : La démonstration de la question précédente s'étend naturellement aux fonctions $v \in L^2(\Omega)$ telle que $v|_{\Omega_i} \in H^1(\Omega_i)$, pour $i = 1, 2$. En effet, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour tout j on trouve

$$\int_{\Omega} v \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = - \int_{\Omega_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_j} \varphi d\Omega_1 - \int_{\Omega_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_j} \varphi d\Omega_2 - \int_{\Gamma_{1-2}} (v_1|_{\Gamma_{1-2}} - v_2|_{\Gamma_{1-2}}) \varphi \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{e}_j d\Gamma_{1-2},$$

ceci étant vraie pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et pour tout j . où $\mathbf{n}_1$ est la normale extérieure à $\partial\Omega_1$ et où $v_1|_{\Gamma_{1-2}}$ et $v_2|_{\Gamma_{1-2}}$ sont dans $L^2(\Gamma_{1-2})$. On conclut en utilisant les mêmes arguments que précédemment que v est dans $H^1(\Omega)$ si et seulement si $v_1|_{\Gamma_{1-2}} = v_2|_{\Gamma_{1-2}}$ et dans ce cas, on a

$$\nabla v = \chi_{\Omega_1} \nabla v_1 + \chi_{\Omega_2} \nabla v_2.$$

Exercice 3 ♦ Prolongement par continuité

Soient H un espace vectoriel normé réel et V un sous-espace vectoriel de H , tels que V soit dense dans H . Soit ℓ une application linéaire de V dans $\mathbb{R}$, pour laquelle il existe une constante $C_\ell > 0$ telle que, pour tout $v \in V$, on ait $|\ell(v)| \leq C_\ell \|v\|_H$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité de façon unique ℓ en une application $\tilde{\ell}$ linéaire et continue de H dans $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall h \in H, \quad \tilde{\ell}(h) = \lim_k \ell(v_k)$$

où $(v_k)_k$ est une suite d'éléments de V telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - h\|_H = 0$.

Corrigé de la question : On raisonne en plusieurs étapes (simples) :

— Rappel : définition du prolongement par continuité $\tilde{\ell}$.

Soit $h \in H$. Par densité, il existe une suite d'éléments de V , notée $(v_k)_k$, telle que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|v_k - h\|_H = 0$. Soit $(z_k)_k$ la suite de réels définie par $z_k = \ell(v_k)$ pour tout k . Etudions $(z_k)_k$:

$$|z_k - z_m| = |\ell(v_k) - \ell(v_m)| \stackrel{\ell \text{ lin.}}{=} |\ell(v_k - v_m)| \leq C_\ell \|v_k - v_m\|_H.$$

Comme $(v_k)_k$ converge (vers h) dans H , c'est en particulier une suite de Cauchy, c'est-à-dire que $\lim_{k, m \rightarrow \infty} \|v_k - v_m\|_H = 0$. Ainsi, $(z_k)_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Or, $\mathbb{R}$ est complet : $(z_k)_k$ est donc convergente. A partir de là, on définit le prolongement

par continuité de ℓ en h comme étant égal à la limite de $(z_k)_k$:

$$\tilde{\ell}(h) = \lim_k \ell(v_k).$$

Bien sûr, on peut effectuer le même raisonnement pour tout élément h de H , ce qui permet de construire $\tilde{\ell} : H \rightarrow \mathbb{R}$.

— Unicité du prolongement $\tilde{\ell}$.

Reprenons le processus précédent de construction... Pour $h \in H$, soient deux suites d'éléments de V , $(v_k)_k$ et $(v'_k)_k$, convergeant vers h . Vérifions maintenant que la définition de $\tilde{\ell}(h)$ est indépendante de la suite choisie, ce qui prouvera l'unicité :

$$|\lim_k \ell(v_k) - \lim_k \ell(v'_k)| = |\lim_k \{\ell(v_k) - \ell(v'_k)\}| \stackrel{\ell \text{ lin.}}{=} |\lim_k \ell(v_k - v'_k)|.$$

Or, $|\ell(v_k - v'_k)| \leq C_\ell \|v_k - v'_k\|_H$, et $\lim_k \|v_k - v'_k\|_H = 0$ par inégalité triangulaire ($\|v_k - v'_k\|_H \leq \|v_k - h\|_H + \|h - v'_k\|_H$). On en conclut que $\lim_k \ell(v_k) = \lim_k \ell(v'_k)$.

— Linéarité du prolongement $\tilde{\ell}$.

On obtient la linéarité en passant à la limite. Soient $h^1, h^2 \in H, \alpha^1, \alpha^2 \in \mathbb{R}$: par densité, il existe $(v_k^1)_k$ et $(v_k^2)_k$ deux suites d'éléments de V , qui convergent respectivement vers h^1 et h^2 dans H , et

$$\begin{aligned} \tilde{\ell}(\alpha^1 h^1 + \alpha^2 h^2) &= \lim_k \ell(\alpha^1 v_k^1 + \alpha^2 v_k^2) \\ &\stackrel{\ell \text{ lin.}}{=} \lim_k \{\alpha^1 \ell(v_k^1) + \alpha^2 \ell(v_k^2)\} = \alpha^1 \tilde{\ell}(h^1) + \alpha^2 \tilde{\ell}(h^2). \end{aligned}$$

— Continuité du prolongement $\tilde{\ell}$ de H dans $\mathbb{R}$.

On veut prouver : $\exists C > 0, \forall h \in H, |\tilde{\ell}(h)| \leq C \|h\|_H$. Pour cela, $h \in H$ étant donné, soit $(v_k)_k$ une suite d'éléments de V qui converge vers h dans H . On écrit

$$|\tilde{\ell}(h)| = |\lim_k \ell(v_k)| = \lim_k |\ell(v_k)|;$$

or, pour tout k , $|\ell(v_k)| \leq C_\ell \|v_k\|_H$. Comme $\lim_k \|v_k\|_H = \|h\|_H$, on en conclut que

$$|\tilde{\ell}(h)| \leq C_\ell \|h\|_H.$$

NB. Le module de continuité est identique pour ℓ et pour son prolongement $\tilde{\ell}$.

NB(bis). On a le même résultat pour des espaces de Banach définis sur $\mathbb{C}$...

Exercice 4 Théorème de trace

Question 1. Soit

$$\begin{aligned} \gamma_* : \mathcal{C}^\infty([0, 1]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ v &\mapsto v(0). \end{aligned}$$

Montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty([0, 1]), |v(0)| \leq C \|v\|_{H^1([0, 1])}. \quad (6)$$

En utilisant l'exercice précédent, qu'en déduisez vous ?

Indication : on pourra écrire que pour tout v dans $\mathcal{C}^\infty([0, 1])$, $v(0) = v(x) - \int_0^x v'(t) dt$.

Corrigé de la question 1 : Ici, on choisit respectivement :

$$H = H^1(]0, 1[), \text{ muni de la norme } \|v\|_{H^1(]0, 1[)} := \left\{ \int_0^1 v^2 dx + \int_0^1 (v')^2 dx \right\}^{1/2},$$

$$V = C^\infty([0, 1]);$$

en effet, $C^\infty([0, 1])$ est dense dans $H^1(]0, 1[)$ d'après les résultats du cours.
Soit maintenant $v \in C^\infty([0, 1])$: on écrit comme indiqué

$$v(0) = v(x) - \int_0^x v'(t) dt$$

On sait que si deux fonctions sont égales, leur norme L^2 sont égales. En utilisant une inégalité triangulaire, on obtient

$$\|v(0)\|_{L^2} \leq \|v\|_{L^2} + \left\| \int_0^x v'(t) dt \right\|_{L^2},$$

où le premier terme correspondant à la norme L^2 de la fonction constante égale à $v(0)$. Il est facile de calculer

$$\|v(0)\|_{L^2} = |v(0)|.$$

On majore ensuite le dernier terme, à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x v'(t) dt \right| &\leq \int_0^x |v'(t)| dt \leq \left(\int_0^x 1 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^x |v'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{x} \left(\int_0^x |v'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq 1 \times \left(\int_0^1 |v'(t)|^2 dt \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\left\| \int_0^x v'(t) dt \right\|_{L^2} \leq \|v'\|_{L^2}$$

On en conclut que, pour tout élément v de $C^\infty([0, 1])$, on a la majoration

$$|v(0)| \leq \left(\int_0^1 |v(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_0^1 |v'(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \sqrt{2} \|v\|_{H^1(]0, 1[)}.$$

où pour la dernière inégalité, on a utilisé $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ soit $(a + b) \leq \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, valable pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$.

Conclusion : d'après l'exercice précédent, on peut prolonger l'application trace $\gamma_\star : v \mapsto v(0)$ de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(]0, 1[)$ dans $\mathbb{R}$.

Question 2. Montrer que l'inégalité (6) où on a remplacé la norme H^1 par la norme L^2 ne peut pas être vérifiée.

Corrigé de la question 2 : Soit $(v_m)_{m \geq 1}$ la suite d'éléments de $L^2(]0, 1[)$ définie par $v_m(x) = e^{-mx}$. Par un calcul direct :

$$\int_0^1 v_m^2 dx = \int_0^1 e^{-2mx} dx = \left[\frac{1}{-2m} e^{-2mx} \right]_0^1 = \frac{1}{2m} (1 - e^{-2m}).$$

Ainsi $\lim_{m \rightarrow \infty} \|v_m\|_{L^2(]0, 1[)} = 0$, alors que $v_m(0) = 1$ pour tout $m \geq 1$. On ne peut donc pas trouver de constante $C > 0$ telle que, pour tout $m \geq 1$, on ait $|v_m(0)| \leq C \|v_m\|_{L^2(]0, 1[)}$.

Question 3. Soit $\Omega =]0, 1[\times]0, 1[$ et $\Gamma = \{0\} \times]0, 1[$ une partie du bord $\partial\Omega$. En repartant du résultat de la Question 1, montrer que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \|v|_\Gamma\|_{L^2(\Gamma)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \quad (7)$$

Qu'en déduisez vous sur l'application trace sur Γ ? Faire de même en remplaçant Γ par $\partial\Omega$.

Corrigé de la question 3 : D'après la question 1, on a

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad |v(0, y)|^2 \leq 2 \left(\int_0^1 |v(x, y)|^2 dx + \int_0^1 |\partial_x v(x, y)|^2 dx \right)$$

et en intégrant par rapport à y , on trouve

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \int_\Gamma |v|_\Gamma|^2 d\Gamma := \int_0^1 |v(0, y)|^2 dy \leq 2 \left(\int_\Omega |v|^2 d\Omega + \int_\Omega |\partial_x v|^2 d\Omega \right) \leq 2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

D'après l'exercice précédent, on peut prolonger l'application trace $\gamma_\Gamma : v \mapsto v|_\Gamma$ de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$.

En utilisant la même approche que précédemment et en notant Γ_i , $i = 1, 2, 3, 4$ les côtés du carré Ω , on montre que

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \|v|_{\Gamma_i}\|_{L^2(\Gamma_i)}^2 \leq 2 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

soit

$$\forall v \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega}), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = \sum_{i=1}^4 \|v|_{\Gamma_i}\|_{L^2(\Gamma_i)}^2 d\Gamma \leq 8 \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

D'après l'exercice précédent, on peut prolonger l'application trace $\gamma : v \mapsto v|_{\partial\Omega}$ de façon unique en une application linéaire et continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$.