Introduction à la méthode des Eléments Finis.

Sonia Fliss, bureau 2.2.21 UMA

Chargés de TDs : Marc Bakry (CEA), Eliane Bécache (Inria, UMA), Marcella Bonazzoli (UMA), Xavier Claeys (UMA), Benjamin Graille (Orsay), Erell Jamelot (CEA), Pierre Marchand (UMA), Edouard Meddouri-Bernard (UMA), Zois Moitier (UMA)

Séance 5 : la méthode des éléments finis (suite)

Quelques rappels et calcul des erreurs

Prise en compte de conditions de type Fourier

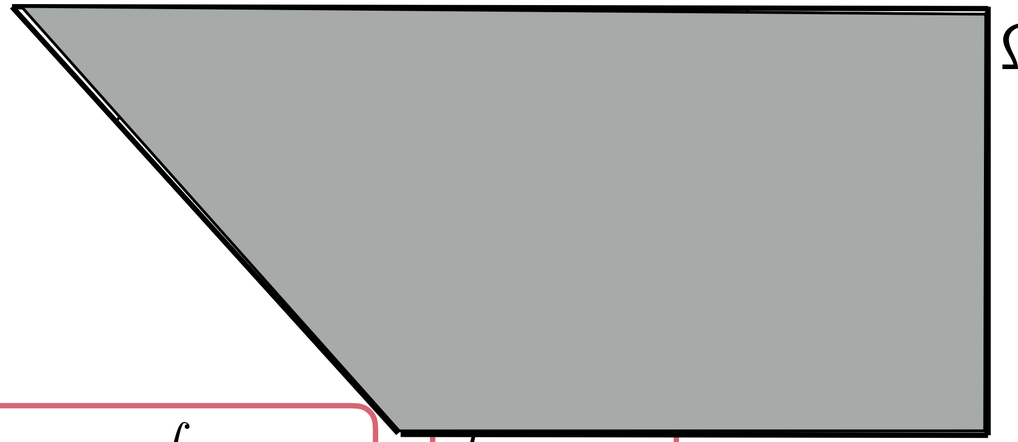
Prise en compte des conditions de Dirichlet

Formules de quadrature - Passage à l'élément fini de référence

Autres exemples d'éléments finis

Le problème modèle de la dernière fois

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert **polygonal**. Soit $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.



On cherche $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla}\, u \cdot \underline{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

On cherche $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de $\quad \forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega \underline{\nabla}\, u \cdot \underline{\nabla}\, v \, d\Omega + \int_\Omega u\, v \, d\Omega = \int_\Omega f\, v \, d\Omega$$

$V = H^1(\Omega)$ $\qquad$ $a(u, v)$ $\qquad$ $\ell(v)$

La formulation variationnelle discrète que nous allons résoudre s'écrit

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \qquad (FV_h)$$

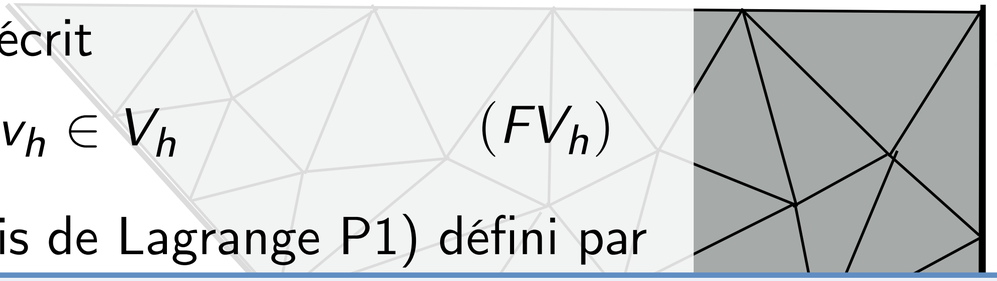
où V_h est un espace de dimension finie (espace des éléments finis de Lagrange P1) défini par

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}), \quad \forall 0 \le l \le N_e,\ v_h\big|_{T_l} \in \mathbb{P}_1(T_l) \right\}$$

$$\text{avec} \qquad \mathbb{P}_1(T_l) = \left\{ u : T_l \ni (x, y) \mapsto ax + by + c \in \mathbb{R}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Le problème modèle de la dernière fois

La formulation variationnelle discrète que nous allons résoudre s'écrit



$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \qquad (FV_h)$$

où V_h est un espace de dimension finie (espace des éléments finis de Lagrange P1) défini par

$$V_h = \left\{ v_h \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}), \quad \forall 0 \leq l \leq N_e,\ v_h\big|_{T_l} \in \mathbb{P}_1(T_l) \right\}$$

$$\text{avec} \qquad \mathbb{P}_1(T_l) = \left\{ u : T_l \ni (x, y) \mapsto ax + by + c \in \mathbb{R}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R} \right\}.$$

Ceci se reformule sous la forme du système linéaire avec $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_s}$ la une base de V_h telle que $\phi_i(\underline{S}_j) = \delta_i^j$

$$a(u_h, \phi_i) = \ell(\phi_i), \quad \forall 1 \leq i \leq N_s$$

En décomposant u_h dans cette base $u_h = \sum_{1 \leq j \leq N_s} u^j \phi_j$ on obtient le problème suivant

$$\text{Trouver } (u^1, u^2, \dots, u^{N_s}) \text{ telle que } \sum_{1 \leq j \leq N_s} u^j a(\phi_j, \phi_i) = \ell(\phi_i), \quad \forall 1 \leq i \leq N_s$$

qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire

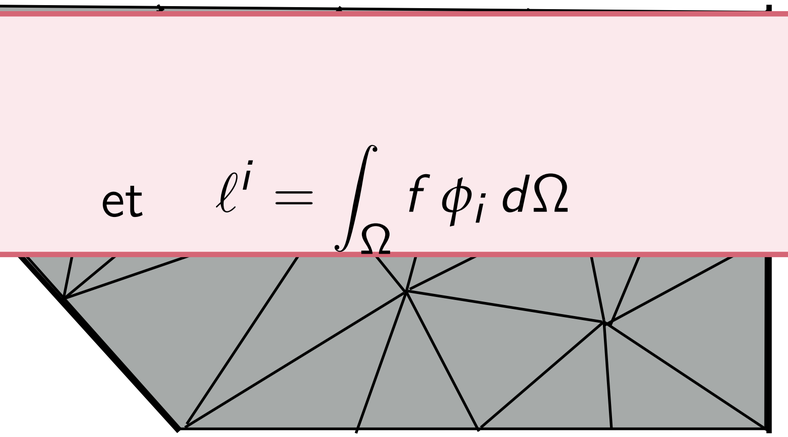
$$\text{Trouver } \vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_s})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{N_s} \text{ telle que } \quad \mathbb{A}\vec{u} = \vec{\ell}$$

où $\mathbb{A} = \mathbb{K} + \mathbb{M}$, $K^{ij} = \int_\Omega \underline{\nabla}\, \phi_j \cdot \underline{\nabla}\, \phi_i \, d\Omega$, **matrice de rigidité** $M^{ij} = \int_\Omega \phi_j \, \phi_i \, d\Omega$ **matrice de masse** et $\ell^i = \int_\Omega f \, \phi_i \, d\Omega$

Le problème modèle de la dernière fois

Trouver $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_s})^T \in \mathbb{R}^{N_s}$ telle que $\mathbb{A}\vec{u} = \vec{\ell}$

où $\mathbb{A} = \mathbb{K} + \mathbb{M}$, $K^{ij} = \int_\Omega \underline{\nabla}\phi_j \cdot \underline{\nabla}\phi_i d\Omega$, $M^{ij} = \int_\Omega \phi_j \phi_i \, d\Omega$ et $\ell^i = \int_\Omega f \, \phi_i \, d\Omega$



Algorithme de résolution

- Calcul des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$:
  - Calcul des matrices élémentaires (*pour chaque triangle*)
  - Assemblage des matrices *(en faisant une boucle sur les triangles et en rajoutant les contributions de chaque triangle au bon endroit dans la matrice)*
- Calcul du second membre (*en remplaçant f par son interpolée*)

$$\ell^i = \int_\Omega f \, \phi_i \, d\Omega \approx \sum_{1 \le j \le N_s} f(\underline{S}_j) \int_\Omega \phi_j \phi_i \, d\Omega = \ell^i_h \quad \text{avec} \quad \vec{\ell}_h = \mathbb{M}_h \vec{f}_h \quad \text{où} \quad \overset{\text{si } f \in C^0(\bar{\Omega})}{f \overset{\downarrow}{\simeq} f_h} = \sum_{1 \le j \le N} f(\underline{S}_j)\phi_j$$

- Inversion de la matrice creuse $\mathbb{A}$ (*définie positive*)
- On reconstruit la fonction $u_h = \sum_{1 \le j \le N_s} u^j \, \phi_j$ où on rappelle que $u^j = u_h(S_j)$

Le problème modèle de la dernière fois

Trouver $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_s})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N_s}$ telle que $\mathbb{A}\vec{u} = \vec{\ell}$

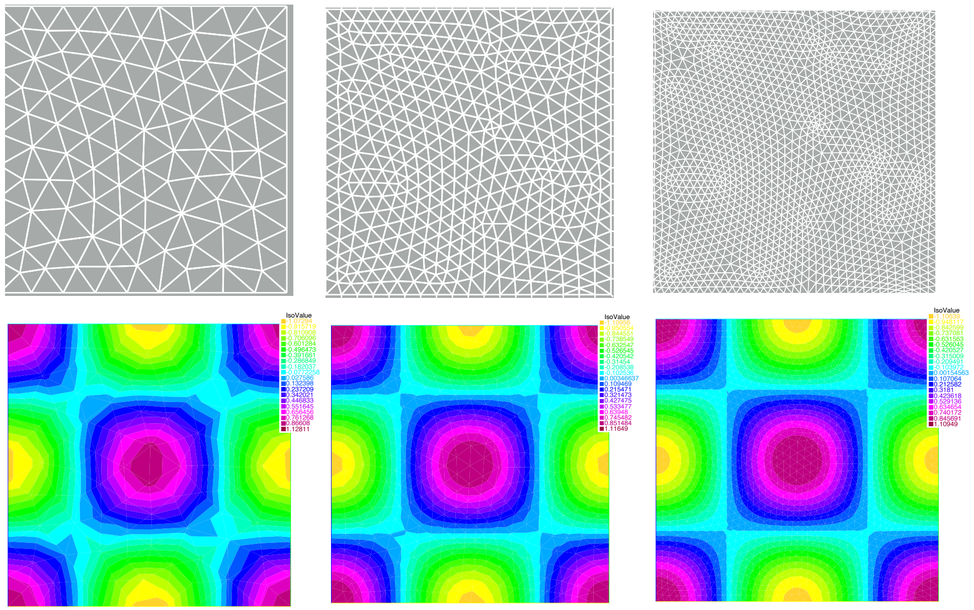
où $\mathbb{A} = \mathbb{K} + \mathbb{M}$, $K^{ij} = \int_\Omega \underline{\nabla}\,\phi_j \cdot \underline{\nabla}\,\phi_i \, d\Omega$, $M^{ij} = \int_\Omega \phi_j\,\phi_i\,d\Omega$ et $\ell^i = \int_\Omega f\,\phi_i\,d\Omega$

Validations qualitatives

Pour valider le code, on choisit une géométrie simple (*un carré par exemple*) et une fonction u qu'on souhaite approcher.

⚠ Elle doit vérifier la condition aux limites!

On calcule ensuite le terme source associé.



$u(x,y) = \cos(\pi x)\cos(\pi y)$ *est solution de*

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega := (0,2)^2 \\ \underline{\nabla}\,u \cdot \underline{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

pour $f(x,y) = (1 + 2\pi^2)\cos(\pi x)\cos(\pi y)$

La solution calculée semble converger vers u.

Le problème modèle de la dernière fois

Trouver $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_s})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N_s}$ telle que $\mathbb{A}\vec{u} = \vec{\ell}$

où $\mathbb{A} = \mathbb{K} + \mathbb{M}$, $K^{ij} = \int_\Omega \underline{\nabla}\,\phi_j \cdot \underline{\nabla}\,\phi_i d\Omega$, $M^{ij} = \int_\Omega \phi_j\,\phi_i\,d\Omega$ et $\ell^i = \int_\Omega f\,\phi_i\,d\Omega$

Validations quantitatives

Rappel : lien entre matrice et forme bilinéaire

$$\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^{N_s}, \quad \vec{v}^\mathsf{T}\mathbb{A}\vec{w} = a(w_h, v_h)$$

où $\vec{w} = (w^1, \cdots, w^{N_s})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N_s}$, et $\vec{v} = (v^1, \cdots, v^{N_s})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N_s}$ et $w_h = \sum_{j=1}^{N_s} w^j \phi_j \in V_h$, $v_h = \sum_{i=1}^{N_s} v^i \phi_i \in V_h$

En approchant u par son interpolée $u \approx \pi_h u = \sum_{j=1}^{N_s} u(S_j) w_j$, on note

$$\vec{u}^{ex} = (u(S_1), u(S_2), \dots, u(S_{N_s}))^\mathsf{T} \quad \text{et} \quad \vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_s})^\mathsf{T}$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \approx \|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = \left[m(\pi_h u - u_h, \pi_h u - u_h)\right]^{1/2} = \left[(\vec{u}^{ex} - \vec{u})^\mathsf{T}\mathbb{M}(\vec{u}^{ex} - \vec{u})\right]^{1/2}$$

où $m(w_h, v_h) = \int_\Omega w_h\,v_h\,d\Omega$

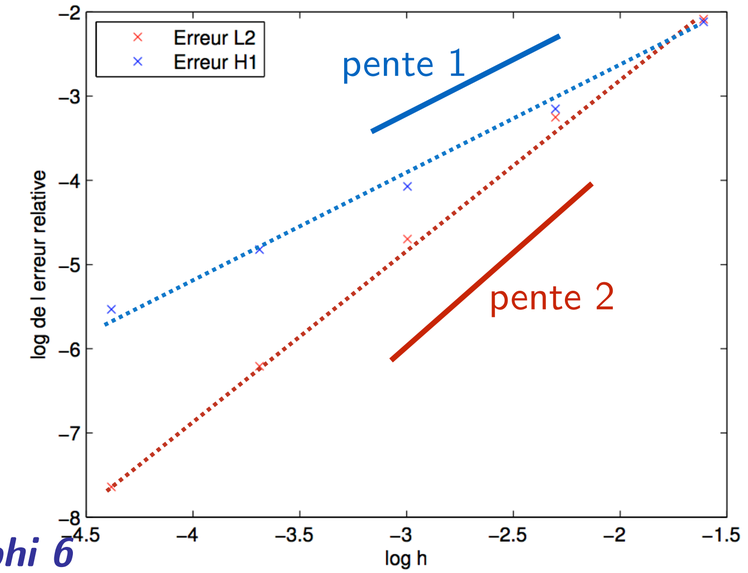
$$\|\underline{\nabla}\,u - \underline{\nabla}\,u_h\|_{L^2(\Omega)} \approx \|\underline{\nabla}\,[\pi_h u] - \underline{\nabla}\,u_h\|_{L^2(\Omega)} = \left[k(\pi_h u - u_h, \pi_h u - u_h)\right]^{1/2} = \left[(\vec{u}^{ex} - \vec{u})^\mathsf{T}\mathbb{K}(\vec{u}^{ex} - \vec{u})\right]^{1/2}$$

où $k(w_h, v_h) = \int_\Omega \underline{\nabla}\,w_h \cdot \underline{\nabla}\,v_h\,d\Omega$

Le problème modèle de la dernière fois

On trace en rouge pointillé $\quad \log h \mapsto \log \|\pi_h u - u_h\|_{L^2} / \|\pi_h u\|_{L^2}$

On trace en bleu pointillé $\quad \log h \mapsto \log \|\nabla \pi_h u - \nabla u_h\|_{L^2} / \|\nabla \pi_h u\|_{L^2}$



Une répression linéaire montre que

$$\|\pi_h u - u_h\|_{L^2} \sim h^2$$

$$\|\nabla \pi_h u - \nabla u_h\|_{L^2} \sim h$$

Justification en Amphi 6

En approchant u par son interpolée $u \approx \pi_h u = \sum_{j=1}^{N_s} u(S_j) w_j$, on note

$$\vec{u}^{ex} = (u(\underline{S_1}), u(\underline{S_2}), \dots, u(\underline{S_{N_s}}))^T \quad \text{et} \quad \vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_s})^T$$

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \approx \|\pi_h u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = [m(\pi_h u - u_h, \pi_h u - u_h)]^{1/2} = [(\vec{u}^{ex} - \vec{u})^T \mathbb{M} (\vec{u}^{ex} - \vec{u})]^{1/2}$$

$$\text{où } m(w_h, v_h) = \int_\Omega w_h \, v_h \, d\Omega$$

$$\|\underline{\nabla} u - \underline{\nabla} u_h\|_{L^2(\Omega)} \approx \|\underline{\nabla} [\pi_h u] - \underline{\nabla} u_h\|_{L^2(\Omega)} = [k(\pi_h u - u_h, \pi_h u - u_h)]^{1/2} = [(\vec{u}^{ex} - \vec{u})^T \mathbb{K} (\vec{u}^{ex} - \vec{u})]^{1/2}$$

$$\text{où } k(w_h, v_h) = \int_\Omega \underline{\nabla} w_h \cdot \underline{\nabla} v_h \, d\Omega$$

Séance 5 : la méthode des éléments finis (suite)

Quelques rappels et calcul des erreurs

Prise en compte de conditions de type Fourier

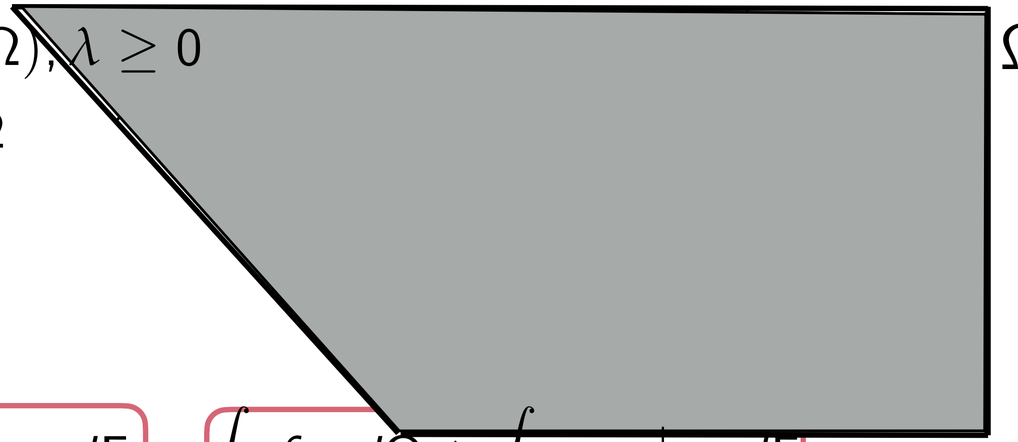
Prise en compte des conditions de Dirichlet

Formules de quadrature - Passage à l'élément fini de référence

Autres exemples d'éléments finis

Problème modèle avec condition de type Fourier

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert **polygonal**. Soient $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$, $g \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$, $\lambda \geq 0$



On cherche $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla}\, u \cdot \underline{n} + \lambda\, u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

On cherche $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in \mathrm{H}^1(\Omega), \quad \int_\Omega \underline{\nabla}\, u \cdot \underline{\nabla}\, v \, d\Omega + \int_\Omega uv \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega}\, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = \int_\Omega f\, v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

$V = H^1(\Omega)$ — $a(u, v)$ — $\ell(v)$

La formulation variationnelle discrète que nous allons résoudre s'écrit

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que} \qquad a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \qquad (FV_h)$$

où V_h est l'espace des éléments finis de Lagrange P1. On aboutit au système linéaire:

$$\text{Trouver } \vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_s})^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{N_s} \text{ telle que} \quad \mathbb{A}\vec{u} = \vec{\ell}$$

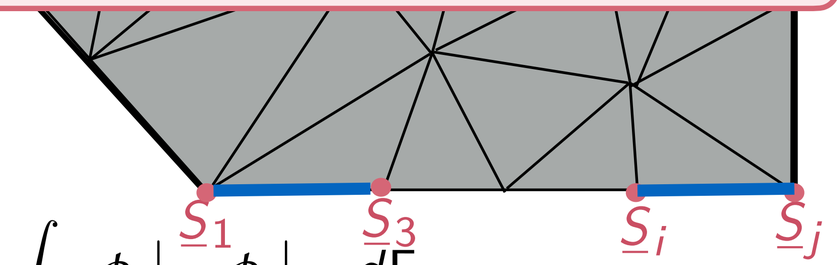
$$\text{où } \mathbb{A} = \mathbb{K} + \mathbb{M} + \lambda \mathbb{S}, \quad S^{ij} = \int_{\partial\Omega} \phi_j|_{\partial\Omega}\, \phi_i|_{\partial\Omega} \, d\Gamma \quad \text{et} \quad \ell^i = \int_\Omega f\, \phi_i \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \phi_i|_{\partial\Omega}$$

matrice de masse surfacique

Problème modèle avec condition de type Fourier

Trouver $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_s})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N_s}$ telle que $\quad \mathbb{A}\vec{u} = \vec{\ell}$

où $\quad \mathbb{A} = \mathbb{K} + \mathbb{M} + \lambda\mathbb{S}, \quad S^{ij} = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \phi_j|_{\partial\Omega}\, \phi_i|_{\partial\Omega}\, d\Gamma \quad$ et $\quad \ell^i = \displaystyle\int_\Omega f\, \phi_i\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \phi_i|_{\partial\Omega}$



Algorithme de résolution

- Calcul des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$
- Calcul de la matrice $\mathbb{S}$

$$S^{ij} = \int_{\partial\Omega} \phi_j|_{\partial\Omega}\, \phi_i|_{\partial\Omega}\, d\Gamma = \sum_{A_\ell \subset \partial\Omega} \int_{A_\ell} \phi_j|_{A_\ell}\, \phi_i|_{A_\ell}\, d\Gamma$$

où $\{A_1, \dots, A_\ell, \dots, A_{N_a}\}$ est l'ensemble des arêtes du bord.

`Coordneu`
Tableau de coordonnées des sommets

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
S_i	x_i	y_i
S_j	x_j	y_j
S_k	x_k	y_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

`tabaretes`
Tableau des arêtes

A_1	1	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_ℓ	i	j
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_{N_a}	I	N_a

Assemblage de la matrice de masse surfacique

$\mathbb{S} \leftarrow 0$;
/* Boucle sur les aretes
for $\ell \in \{1, \dots, N_a\}$ **do**
  /* Coordonnées des sommets de l'arête
  $\underline{S}_I, \underline{S}_J, \leftarrow \text{Coordneu}(\text{tabaretes}(\ell, :))$;
  /* Calcul de la matrice élémentaire
  $\mathbb{S}_\ell^{\text{el}} \leftarrow \underline{S}_I, \underline{S}_J$;
  /* Boucle sur les indices
  for $\hat{\imath} \in \{1, 2\}$ **do**
    $I = \text{tabaretes}(\ell, \hat{\imath})$;
    for $\hat{\jmath} \in \{1, 2\}$ **do**
      $J = \text{tabaretes}(\ell, \hat{\jmath})$;
      /* Contribution de l'arête A_ℓ
      $\mathbb{S}^{I,J} \leftarrow \mathbb{S}^{I,J} + (\mathbb{S}_\ell^{\text{el}})^{\hat{\imath},\hat{\jmath}}$
    end
  end
end

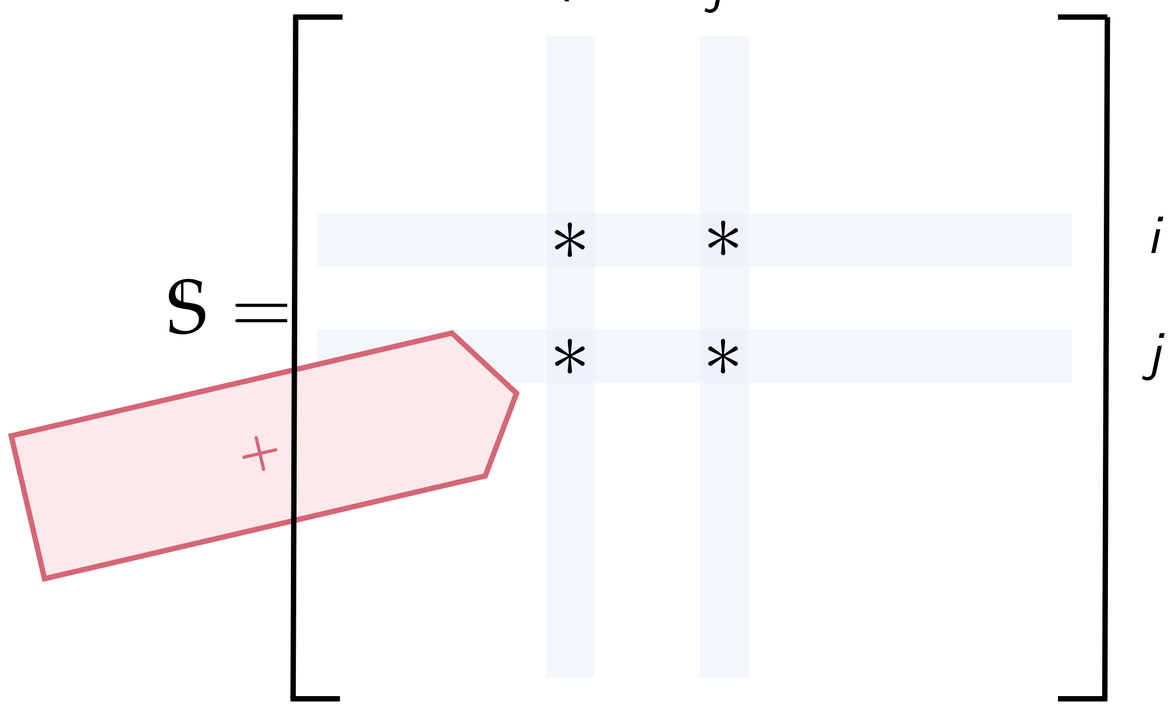
$$\mathbb{S}_\ell^{\text{el}} = \begin{pmatrix} s_\ell(\phi_i, \phi_i) & s_\ell(\phi_j, \phi_i) \\ s_\ell(\phi_i, \phi_j) & s_\ell(\phi_j, \phi_j) \end{pmatrix}$$

Coordneu
Tableau de coordonnées des sommets

$\underline{S}_i$	x_i	y_i
$\underline{S}_j$	x_j	y_j
$\underline{S}_k$	x_k	y_k

tabaretes
Tableau des arêtes

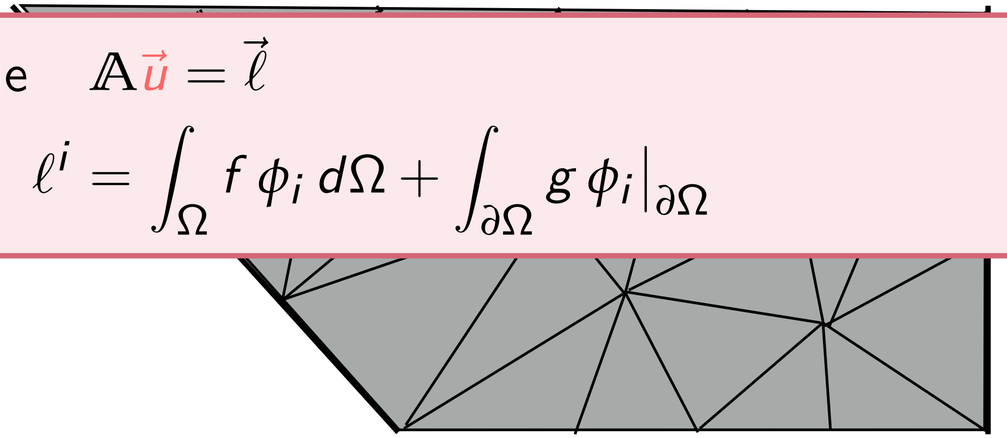
A_1	1	3
A_ℓ	i	j
A_{N_a}	I	N_a



Problème modèle avec condition de type Fourier

Trouver $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_s})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^{N_s}$ telle que $\quad \mathbb{A}\vec{u} = \vec{\ell}$

où $\quad \mathbb{A} = \mathbb{K} + \mathbb{M} + \lambda\mathbb{S}, \quad S^{ij} = \displaystyle\int_{\partial\Omega} \phi_j|_{\partial\Omega}\, \phi_i|_{\partial\Omega}\, d\Gamma \quad$ et $\quad \ell^i = \displaystyle\int_\Omega f\, \phi_i\, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g\, \phi_i|_{\partial\Omega}$



Algorithme de résolution

- Calcul des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$
- Calcul de la matrice $\mathbb{S}$
- Calcul du second membre (*en remplaçant f par son interpolée*)

$$\int_\Omega f\, \phi_i\, d\Omega \approx [\mathbb{M}\vec{f}_h]^i \quad \text{avec} \quad f \simeq f_h = \sum_{1\le j\le N} f(\underline{S}_j)\phi_j \qquad \text{si } f \in C^0(\bar{\Omega})$$

Si $g \in C^0(\partial\Omega)$, on utilise la fonction $\pi_h g \in V_h$, $\pi_h g = \displaystyle\sum_{j,\underline{S}_j\in\partial\Omega} g(\underline{S}_j)\phi_j$

Notez que $\pi_h g(\underline{S}_j) = \begin{cases} g(\underline{S}_j) & \text{si } \underline{S}_j \in \partial\Omega \\ 0 & \text{si } \underline{S}_j \notin \partial\Omega \end{cases}$

$$\int_{\partial\Omega} g\, \phi_i\, d\Gamma \approx \int_{\partial\Omega} \pi_h g\, \phi_i\, d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_s} g(\underline{S}_j) \int_{\partial\Omega} \phi_j\, \phi_i\, d\Gamma = (\mathbb{S}\,\vec{g})^i \qquad \text{où } g^i = g(\underline{S}_i)$$

- Inversion de la matrice creuse (*définie positive*)
- On reconstruit la fonction $u_h = \displaystyle\sum_{1\le j\le N_s} u^j\, \phi_j$

Séance 5 : la méthode des éléments finis (suite)

Quelques rappels et calcul des erreurs

Prise en compte de conditions de type Fourier

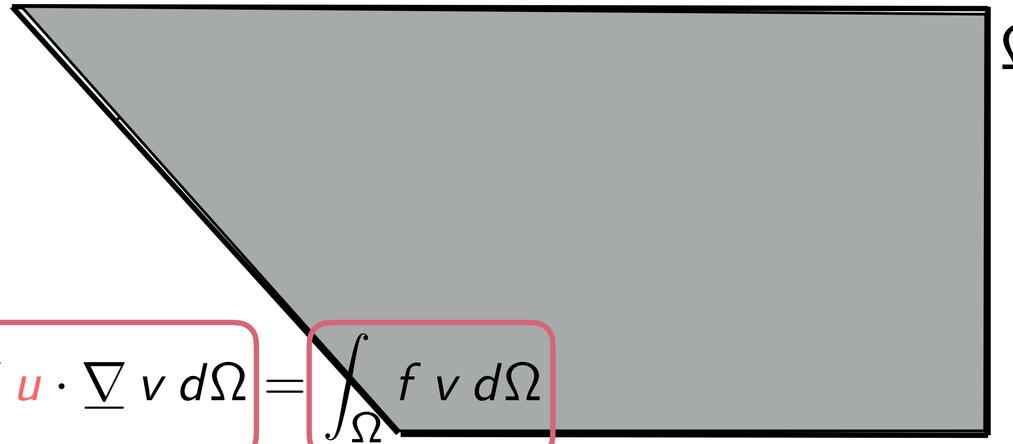
Prise en compte des conditions de Dirichlet

Formules de quadrature - Passage à l'élément fini de référence

Autres exemples d'éléments finis

Problème modèle avec condition de type Dirichlet homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert **polygonal**. Soit $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.



On cherche $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

$\Updownarrow$

On cherche $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ solution de $\quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = \int_\Omega f \, v \, d\Omega$$

$a(u, v)$ $\qquad$ $\ell(v)$

$V = H^1_0(\Omega)$

⚠ La condition aux limites est prise en compte dans l'espace (**conditions aux limites essentielles**).

La formulation variationnelle discrète que nous allons résoudre s'écrit

$$\text{Trouver } u_h \in V_h^0 \text{ telle que} \quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^0 \qquad \text{où} \quad V_h^0 \subset H^1_0(\Omega)$$

On continue à noter V_h l'espace des éléments finis de Lagrange P1. ⚠ $V_h \not\subset H^1_0(\Omega) : \underline{S}_j \in \partial\Omega \Rightarrow \phi_j \notin H^1_0(\Omega)$

On choisit $V_h^0 := V_h \cap H^1_0(\Omega) = \mathrm{vect}\{\phi_j,\ \underline{S}_j \notin \partial\Omega\}$ .On note $\dim(V_h^0) = N_0$

Problème modèle avec condition de type Dirichlet homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert **polygonal**. Soit $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.

On cherche $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

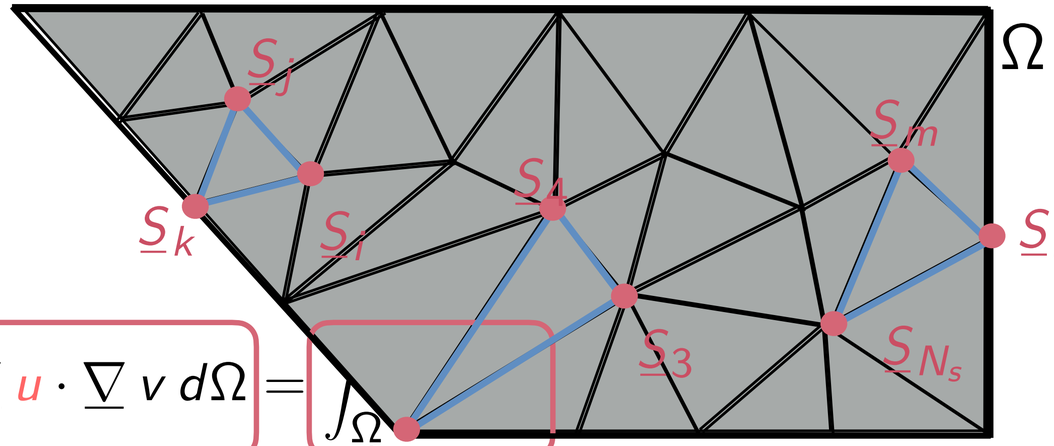
$\Updownarrow$

On cherche $u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ solution de $\quad \forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$,

$$\int_\Omega \underline{\nabla}\, u \cdot \underline{\nabla}\, v \, d\Omega = \int_\Omega$$

$V = H^1_0(\Omega)$

$a(u, v)$ $\qquad$ $\ell(v)$



⚠ La condition aux limites est prise en compte dans l'espace (**conditions aux limites essentielles**).

La formulation variationnelle discrète que nous allons résoudre s'écrit

Trouver $u_h \in V_h^0$ telle que $\quad a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^0$ c

On continue à noter V_h l'espace des éléments finis de Lagrange P1.

On choisit $V_h^0 := V_h \cap H_0^1(\Omega) = \mathrm{vect}\{\phi_j,\ \underline{S}_j \notin \partial\Omega\}$ .On note $\dim(V_h^0) = N_0$

Comment reconnaître en pratique les noeuds intérieurs de ceux du bord?

`Coordneu` — *Tableau de coordonnées des sommets*

$\underline{S}_1$	x_1	y_1
⋮	⋮	⋮
$\underline{S}_i$	x_i	y_i
⋮	⋮	⋮
$\underline{S}_{N_s}$	x_{N_s}	y_{N_s}

`Refneu` — *Références des sommets*

1
⋮
0
⋮
0

Problème modèle avec condition de type Dirichlet homogène

Supposons dans un premier temps que les noeuds intérieurs sont classés en premier.

Trouver $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_0})^T \in \mathbb{R}^{N_0}$ telle que $\mathbb{A}^0 \vec{u}^0 = \vec{\ell}^0$

où $(A^0)^{ij} = \int_\Omega \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i d\Omega, \quad 1 \le i,j \le N_0$ et $(\ell^0)^i = \int_\Omega f \phi_i \, d\Omega, \quad 1 \le i \le N_0.$

et dans ce cas $u_h = \sum_{1 \le j \le N^0} (u^0)^j \phi_j \in H_0^1(\Omega)$

On va utiliser **la méthode de pseudo-élimination**: on construit les matrices avec toutes les fonctions puis on modifie les matrices pour que la solution du système linéaire soit bien $\underline{u}^0$!

- Assemblage de la matrice $\mathbb{A}$ où $A^{ij} = \int_\Omega \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i d\Omega, \quad 1 \le i,j \le N_s$
- Calcul du second membre $\vec{\ell}$ où $\ell^i = \int_\Omega f \phi_i \, d\Omega, \quad 1 \le i \le N_s.$

⚠ On ne résout surtout pas $\mathbb{A}\vec{u} = \vec{\ell}$ qui ne donnerait pas la bonne solution (notez ici que $\mathbb{A}$ n'est pas inversible!)

- Pseudo-élimination

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \mathbb{A}^0 & \mathbb{A}_{IB} \\ \mathbb{A}_{BI} & \mathbb{A}_{BB} \end{pmatrix} \qquad \vec{\ell} = \begin{pmatrix} \vec{\ell}^0 \\ \vec{\ell}_B \end{pmatrix}$$

On veut

$$\mathbb{A}^0 \vec{u}^0 = \vec{\ell}^0$$
$$\vec{u}_B = \vec{0}$$

On remplace

$$\mathbb{A}_{IB} \to \mathbb{O}$$
$$\mathbb{A}_{BI} \to \mathbb{O}$$
$$\mathbb{A}_{BB} \to \rho\mathbb{I}$$
$$\vec{\ell}_B \to \vec{0}$$

$\Longrightarrow$ *On obtient*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}^0 & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \rho\mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}^0 \\ \vec{u}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\ell}^0 \\ \vec{0} \end{pmatrix}$$

Problème modèle avec condition de type Dirichlet homogène

Considérons maintenant une numérotation générale. On construit $\mathbb{A}$ et $\vec{\ell}$. Oui on pseudo-élimine:

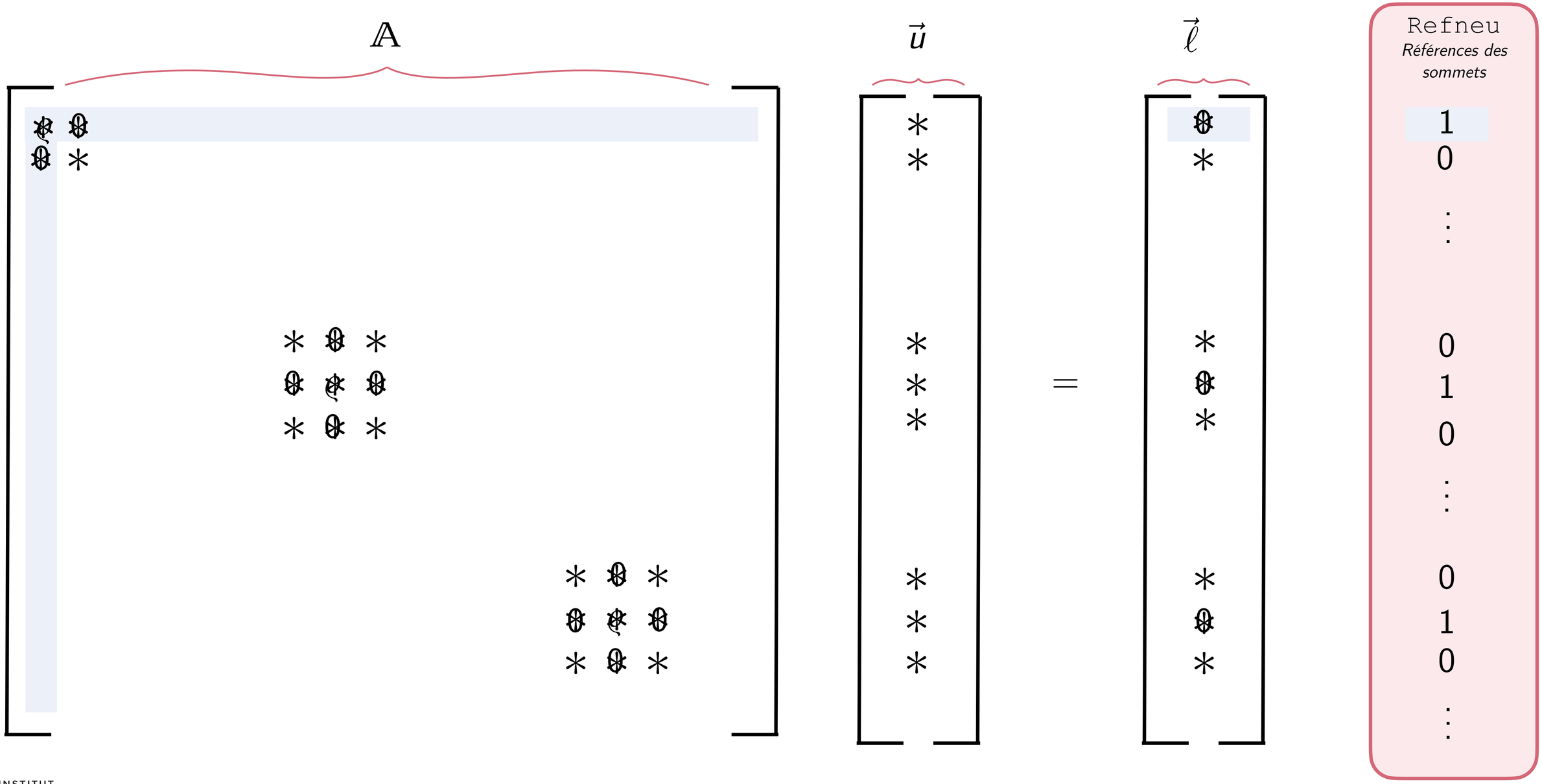
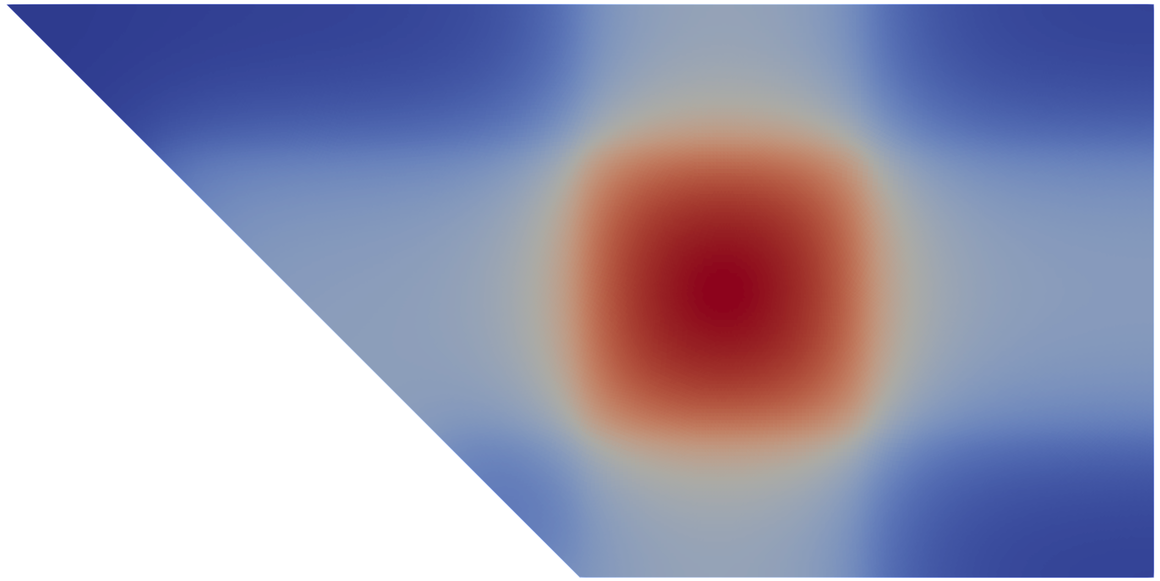


Illustration numérique pour deux types de conditions aux limites

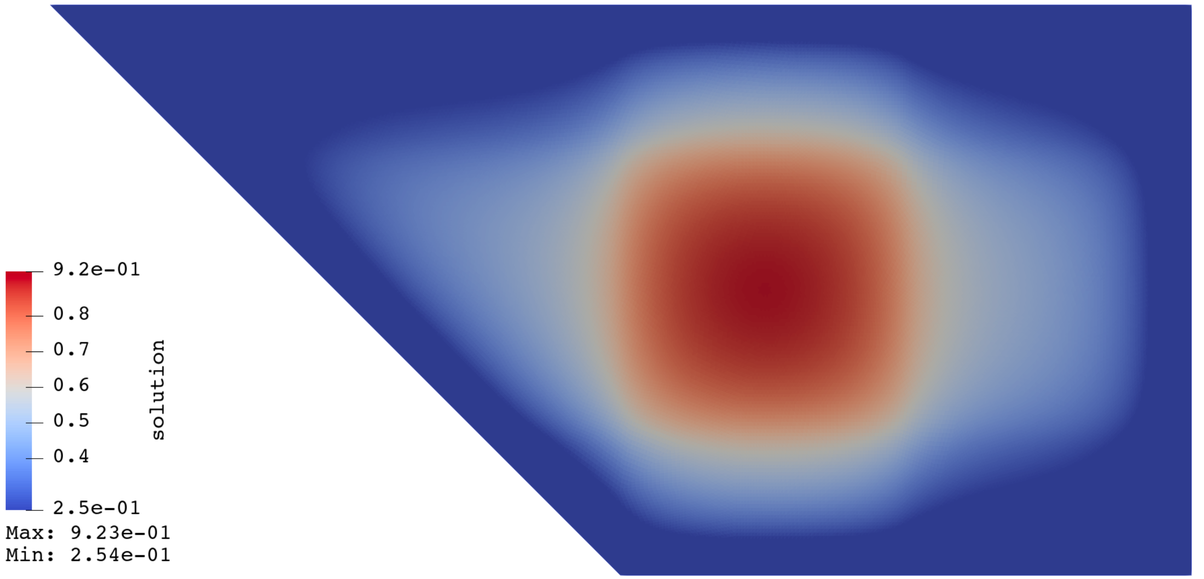
- On considère $f(x,y) \mapsto \frac{1}{4}[(x>1)+(x<1.5))((y>0.25)+(y<0.75))]$

$$\bar{\kappa} = 0.01$$

Conditions de Neumann

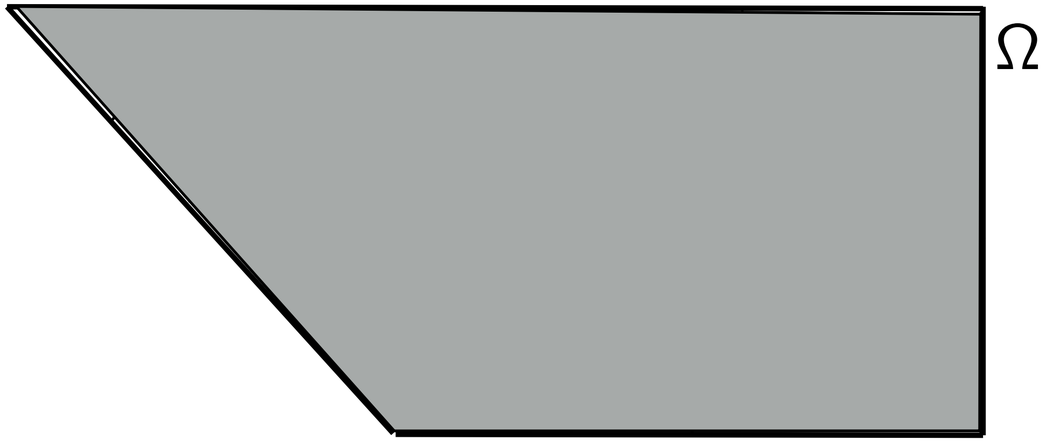


Conditions de Dirichlet



Problème modèle avec condition de type Dirichlet non homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert **polygonal**. Soit $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$.$g \in \mathrm{Im}(\gamma_0)$



On cherche $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ solution de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$

$\Updownarrow$

On cherche $u \in \mathrm{H}^1(\Omega)$ telle que $u = g$ sur $\partial\Omega$, solution de

$$\forall v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \quad \int_\Omega \underline{\nabla}\, u \cdot \underline{\nabla}\, v \, d\Omega = \int_\Omega f\, v \, d\Omega$$

La formulation variationnelle discrète associée s'écrit

On cherche $u_h \in V_h$ telle que $u_h = \pi_h g$ sur $\partial\Omega$, solution de $a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h^0 := V_h \cap H^1_0(\Omega)$

où $\pi_h g \in V_h$, $\pi_h g = \sum_{j, \underline{S}_j \in \partial\Omega} g(\underline{S}_j)\phi_j$

⚠ Si g est $\mathbb{P}^1$ par morceaux alors $\pi_h g$ n'est rien d'autre qu'un relevement de g: $\pi_h g \in H^1(\Omega)$ et $\pi_h g|_{\partial\Omega} = g$

La FV discrète est équivalente à $a(u_h, \phi_i) = \ell(\phi_i), \quad \forall i,\ \underline{S}_i \notin \partial\Omega$

On décompose u_h dans cette base $u_h = \sum_{1 \le j \le N_s} u^j \phi_j$ avec $u^j = g(\underline{S}_j)$ pour tout $\underline{S}_j \in \partial\Omega$

Trouver $(u^1, u^2, \dots, u^{N_s})$ telle que $\sum_{j, \underline{S}_j \notin \partial\Omega} u^j\, a(\phi_j, \phi_i) + \sum_{j, \underline{S}_j \in \partial\Omega} u^j\, a(\phi_j, \phi_i) = \ell(\phi_i), \quad \forall i,\ \underline{S}_i \notin \partial\Omega$

$u^j = g(\underline{S}_j)$ pour tout $\underline{S}_j \in \partial\Omega$

Problème modèle avec condition de type Dirichlet non homogène

Supposons dans un premier temps que les noeuds intérieurs sont classés en premier.

Trouver $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_0}, u^{N_0+1}, \dots u^{N_s}))^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{N_s}$ telle que $\quad \widetilde{\mathbb{A}}^0 \vec{u} = \vec{\ell}^0$

$$u^j = g(S_j), \qquad N_0 + 1 \leq j \leq N_s$$

où $(\widetilde{A}^0)^{ij} = \int_\Omega \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i d\Omega, \quad 1 \leq i \leq N_0,\ 1 \leq j \leq N_s$ et $(\ell^0)^i = \int_\Omega f\, \phi_i \, d\Omega, \quad 1 \leq i \leq N_0.$

En remplaçant la condition $u^j = g(S_j)$pour $N_0 + 1 \leq j \leq N_s$, on obtiendrait un système linéaire carré de taille N_0

On va plutôt adapter **la méthode de pseudo-élimination!**

- Assemblage de la matrice $\mathbb{A}$ où $A^{ij} = \int_\Omega \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i d\Omega, \quad 1 \leq i, j \leq N_s$
- Calcul du second membre $\vec{\ell}$ où $\ell^i = \int_\Omega f\, \phi_i \, d\Omega, \quad 1 \leq i \leq N_s.$
- Pseudo-élimination

$$\begin{matrix} \mathbb{A} & & \vec{\ell} \\ \begin{pmatrix} \mathbb{A}^0 & \mathbb{A}_{IB} \\ \mathbb{A}_{BI} & \mathbb{A}_{BB} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \vec{\ell}^0 \\ \vec{\ell}_B \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On veut

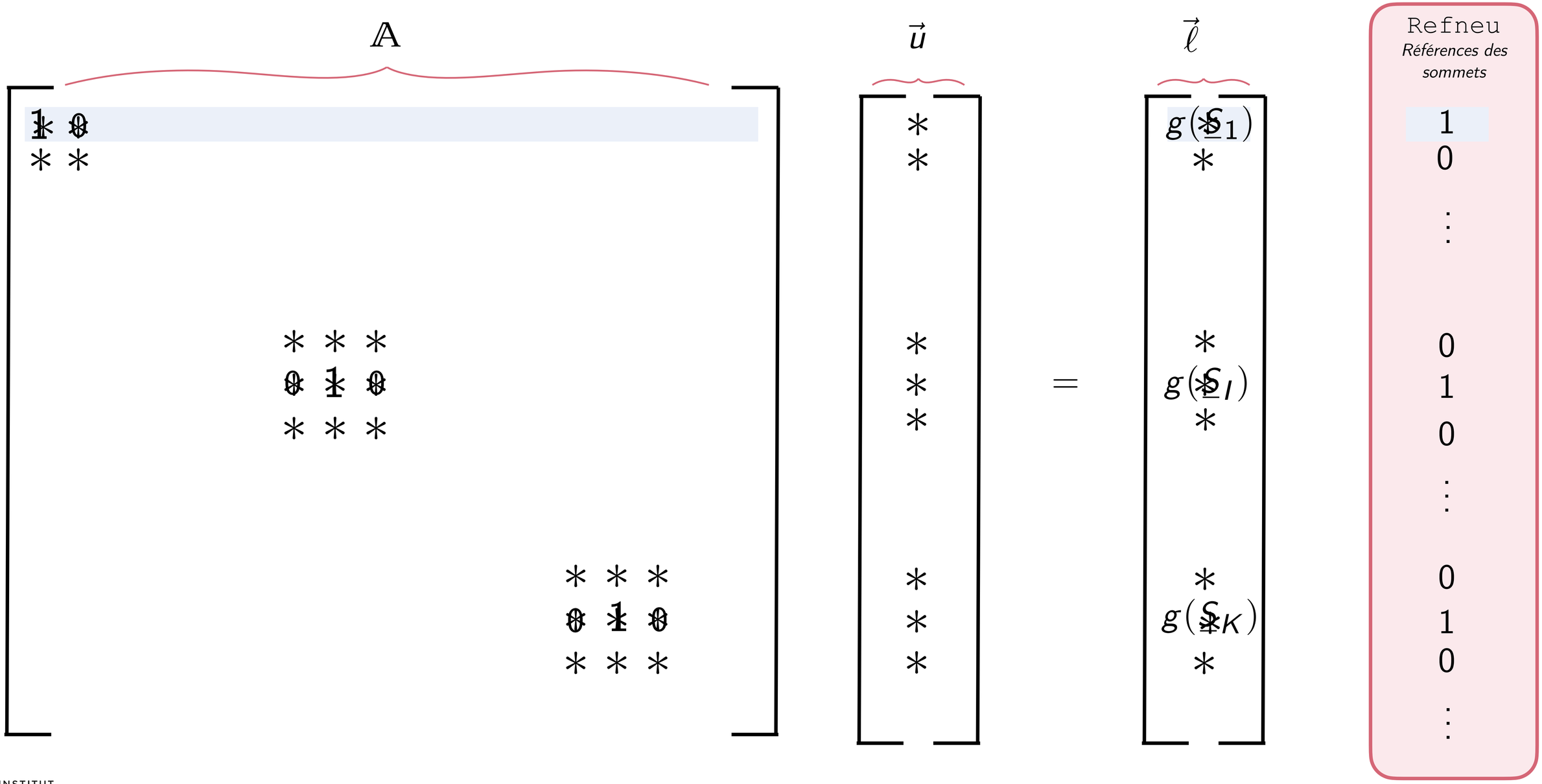
$$\mathbb{A}^0 \vec{u}^0 + \mathbb{A}_{IB} \vec{u}_B = \vec{\ell}^0$$
$$\vec{u}_B = \vec{g}_h$$

On remplace $\quad \mathbb{A}_{BI} \to \mathbb{O}, \quad \mathbb{A}_{BB} \to \mathbb{I}, \quad \vec{\ell}_B \to \vec{g}_h$ $\quad$ *On obtient*

$$\Longrightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{A}^0 & \mathbb{A}_{IB} \\ \mathbb{O} & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u}^0 \\ \vec{u}_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\ell}^0 \\ \vec{g}_h \end{pmatrix}$$

Problème modèle avec condition de type Dirichlet non homogène

Considérons maintenant une numérotation générale. On construit $\mathbb{A}$ et $\vec{\ell}$. Oui on pseudo-élimine:



Séance 5 : la méthode des éléments finis (suite)

Quelques rappels et calcul des erreurs

Prise en compte de conditions de type Fourier

Prise en compte des conditions de Dirichlet

Formules de quadrature - Passage à l'élément fini de référence

Autres exemples d'éléments finis

Formules de quadrature

Dans la méthode des EF, on doit souvent calculer des intégrales sur des éléments du maillage

$$\int_{T_\ell} \varphi \, d\Omega$$

On utilise souvent des formules de calcul de telles intégrales, qui sont exactes pour des polynômes d'un certain degré et approchées en général. Ce sont les formules de quadrature.

En 1D: ce sont les formule des trapèzes, de Simpson, de Newton Cotes,...

$$\int_{T_\ell} \varphi \, d\Omega \approx \sum_{k=1}^{q} \omega_k^\ell \, \varphi(\underline{Q}_k^\ell) \quad \text{où} \quad \left| \begin{array}{ll} \underline{Q}_1^\ell, \underline{Q}_2^\ell, \dots, \underline{Q}_q^\ell & \text{sont les points de quadrature} \\ \omega_1^\ell, \omega_2^\ell, \dots, \omega_q^\ell & \text{sont les poids de quadrature} \end{array} \right.$$

On dit qu'une formule de quadrature est d'ordre K quand elle intègre exactement les polynômes de degré K.

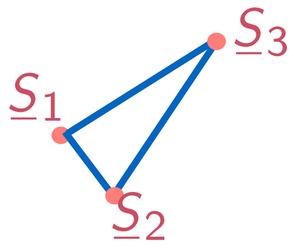
Si la formule de quadrature est d'ordre K alors il existe C>0 telle que

$$\forall \varphi \in C^{K+1}(T_\ell), \quad \left| \int_{T_\ell} \varphi \, d\Omega - \sum_{k=1}^{q} \omega_k^\ell \, \varphi(\underline{Q}_k^\ell) \right| \leq C |T_\ell| h_\ell^{K+1}$$

où $|T_\ell|$ est l'aire de T_ℓ et h_ℓ son diamètre.

Formules de quadrature

$$\int_{T_\ell} \varphi \, d\Omega \approx \sum_{k=1}^{q} \omega_k^\ell \, \varphi(\underline{Q}_k^\ell)$$



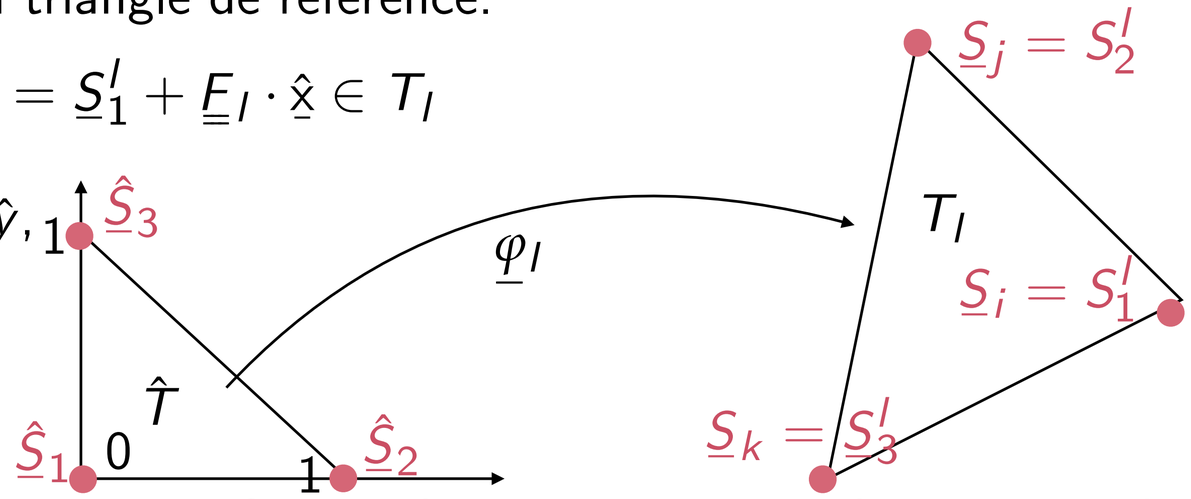
Ordre	q	Poids	Noeuds
1	1	$\omega_1^\ell = \lvert T_\ell \rvert$	$\underline{Q}_1^\ell = \dfrac{\underline{S}_1^\ell + \underline{S}_2^\ell + \underline{S}_3^\ell}{3}$
1	3	$\omega_1^\ell = \omega_2^\ell = \omega_3^\ell = \lvert T_\ell \rvert / 3$	$\underline{Q}_1^\ell = \underline{S}_1^\ell,\ \underline{Q}_2^\ell = \underline{S}_2^\ell,\ \underline{Q}_3^\ell = \underline{S}_3^\ell$
2	3	$\omega_1^\ell = \omega_2^\ell = \omega_3^\ell = \lvert T_\ell \rvert / 3$	$\underline{Q}_1^\ell = \dfrac{\underline{S}_1^\ell + \underline{S}_2^\ell}{2},\ \underline{Q}_2^\ell = \dfrac{\underline{S}_2^\ell + \underline{S}_3^\ell}{2},\ \underline{Q}_3^\ell = \dfrac{\underline{S}_1^\ell + \underline{S}_3^\ell}{2}$
4	4	$\omega_1^\ell = -\dfrac{9}{16}\lvert T_\ell \rvert, \omega_2^\ell = \omega_3^\ell = \omega_4^\ell = \dfrac{25}{48}\lvert T_\ell \rvert$	$\underline{Q}_1^\ell = \left(\frac{\underline{S}_1^\ell}{3} + \frac{\underline{S}_2^\ell}{3} + \frac{\underline{S}_3^\ell}{3}\right), \underline{Q}_2^\ell = \left(\frac{3\underline{S}_1^\ell}{5} + \frac{\underline{S}_2^\ell}{5} + \frac{\underline{S}_3^\ell}{5}\right), \underline{Q}_3^\ell = \left(\frac{\underline{S}_1^\ell}{5} + \frac{3\underline{S}_2^\ell}{5} + \frac{\underline{S}_3^\ell}{5}\right), \underline{Q}_4^\ell = \left(\frac{\underline{S}_1^\ell}{5} + \frac{\underline{S}_2^\ell}{5} + \frac{3\underline{S}_3^\ell}{5}\right)$

Remarques • les formules de quadrature d'ordre élevé sont souvent calculées pour le triangle de référence. Il faut donc passer du triangle courant au triangle de référence.

On considère la transformation affine $\underline{\varphi}_l : \hat{T} \ni \hat{\underline{x}} \mapsto \underline{x} = \underline{S}_1^l + \underline{\underline{F}}_l \cdot \hat{\underline{x}} \in T_l$

Les coordonnées barycentriques du triangle de référence

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_1(\hat{x}, \hat{y}) &= 1 - \hat{x} - \hat{y}, \\ \hat{\lambda}_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{x}, \\ \hat{\lambda}_3(\hat{x}, \hat{y}) &= \hat{y}, \end{aligned}$$



• ces formules sont indispensables quand les problèmes sont à coef. variables ou quand on utilise des EF d'ordre élevé...

Séance 5 : la méthode des éléments finis (suite)

Quelques rappels et calcul des erreurs

Prise en compte de conditions de type Fourier

Prise en compte des conditions de Dirichlet

Formules de quadrature - Passage à l'élément fini de référence

Autres exemples d'éléments finis

Éléments finis de Lagrange de degré k

Définition:

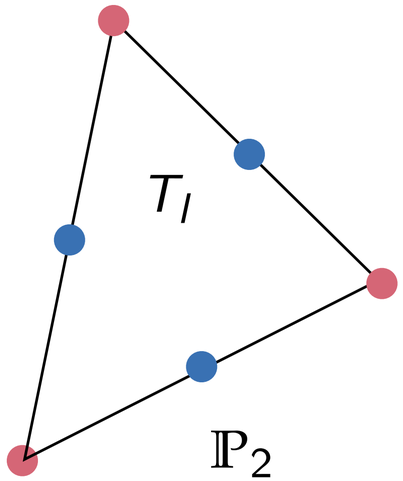
On définit $V_h^k = \left\{ v_h \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \,,\, \forall 0 \leq \ell \leq N_e,\, v_h\big|_{T_\ell} \in \mathbb{P}_k(T_\ell) \right\}$

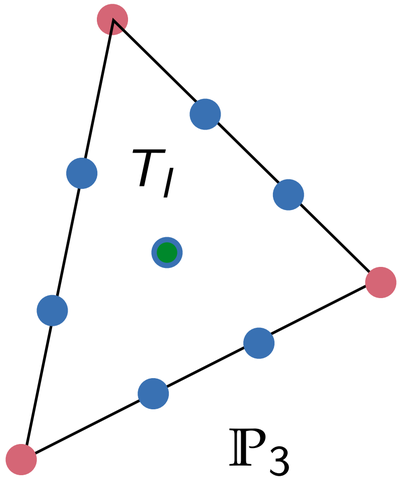
où $\mathbb{P}_k(T_\ell) = \left\{ \text{polynômes de degré } k \text{ sur } T_\ell \right\}.$

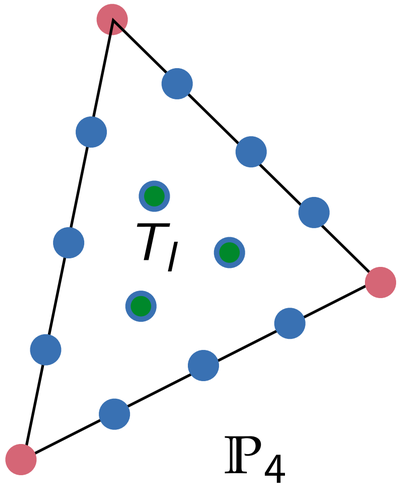
Sur un triangle donné,

$\mathbb{P}_2 = \left\{ ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f \right\}$

$\underline{S}_i,\ i = 1,2,3 \quad \underline{M}_i,\ i = 1,2,3$







2 types de fonctions de base locales

Éléments finis de Lagrange de degré k

Définition:

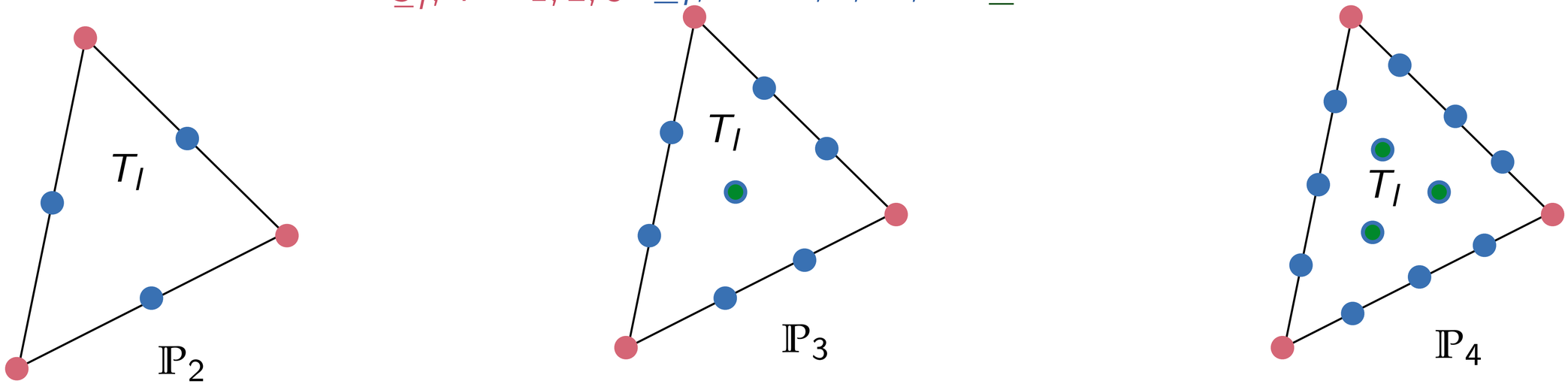
On définit $V_h^k = \left\{ v_h \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \,,\ \forall 0 \leq \ell \leq N_e,\ v_h\big|_{T_\ell} \in \mathbb{P}_k(T_\ell) \right\}$

où $\mathbb{P}_k(T_\ell) = \left\{ \text{polynômes de degré } k \text{ sur } T_\ell \right\}.$

Sur un triangle donné,

$$\mathbb{P}_3 = \left\{ ax^3 + by^3 + cx^2y + dxy^2 + p(x,y),\ p(x,y) \in \mathbb{P}_2 \right\}$$

$\underline{S_i},\ i = 1,2,3 \quad \underline{C_i},\ i = 1,2,\ldots,6 \quad \underline{G}$



3 types de fonctions de base locales

Éléments finis de Lagrange de degré k

Définition:

On définit $V_h^k = \left\{ v_h \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \,,\, \forall 0 \leq \ell \leq N_e,\, v_h\big|_{T_\ell} \in \mathbb{P}_k(T_\ell) \right\}$

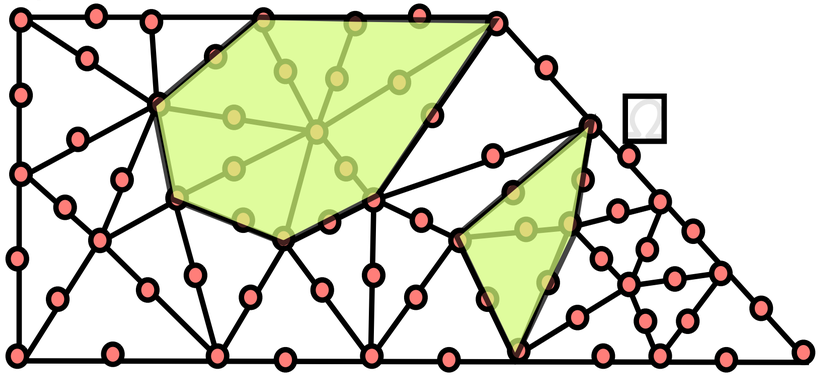
où $\mathbb{P}_k(T_\ell) = \Big\{ \text{polynômes de degré } k \text{ sur } T_\ell \Big\}.$

Pour V_h^2

Fonctions de base ϕ_i, $\phi_i(\underline{P}_j) = \delta_i^j$,

$\underline{P}_j \in \{\underline{S}_i, 1 \leq i \leq N_s\} \cup \{\underline{M}_i, 1 \leq i \leq N_a\}$

$\dim V_h^2 = N_s + N_a$

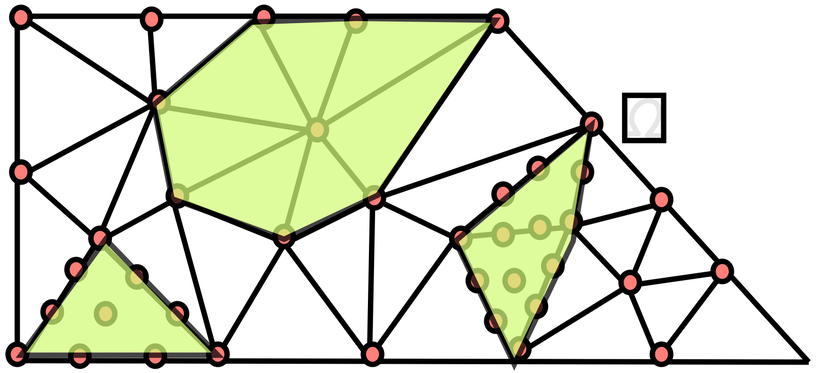


Pour V_h^3

Fonctions de base ϕ_i, $\phi_i(\underline{P}_j) = \delta_i^j$

$\underline{P}_j \in \{\underline{S}_i, 1 \leq i \leq N_s\} \cup \{\underline{C}_i, 1 \leq i \leq 2N_a\}$
$\cup \{\underline{G}_\ell, 1 \leq \ell \leq N_e\}$

$\dim V_h^3 = N_s + 2N_a + N_e$



Éléments finis de Lagrange de degré k

Définition:

On définit $V_h^k = \left\{ v_h \in \mathrm{C}^0(\overline{\Omega}) \,,\, \forall 0 \leq \ell \leq N_e,\, v_h\big|_{T_\ell} \in \mathbb{P}_k(T_\ell) \right\}$

où $\mathbb{P}_k(T_\ell) = \left\{ \text{polynômes de degré } k \text{ sur } T_\ell \right\}$.

Application et mise en oeuvre

- Algorithme similaire pour l'assemblage des matrices

  les matrices élémentaires sont de plus grande taille

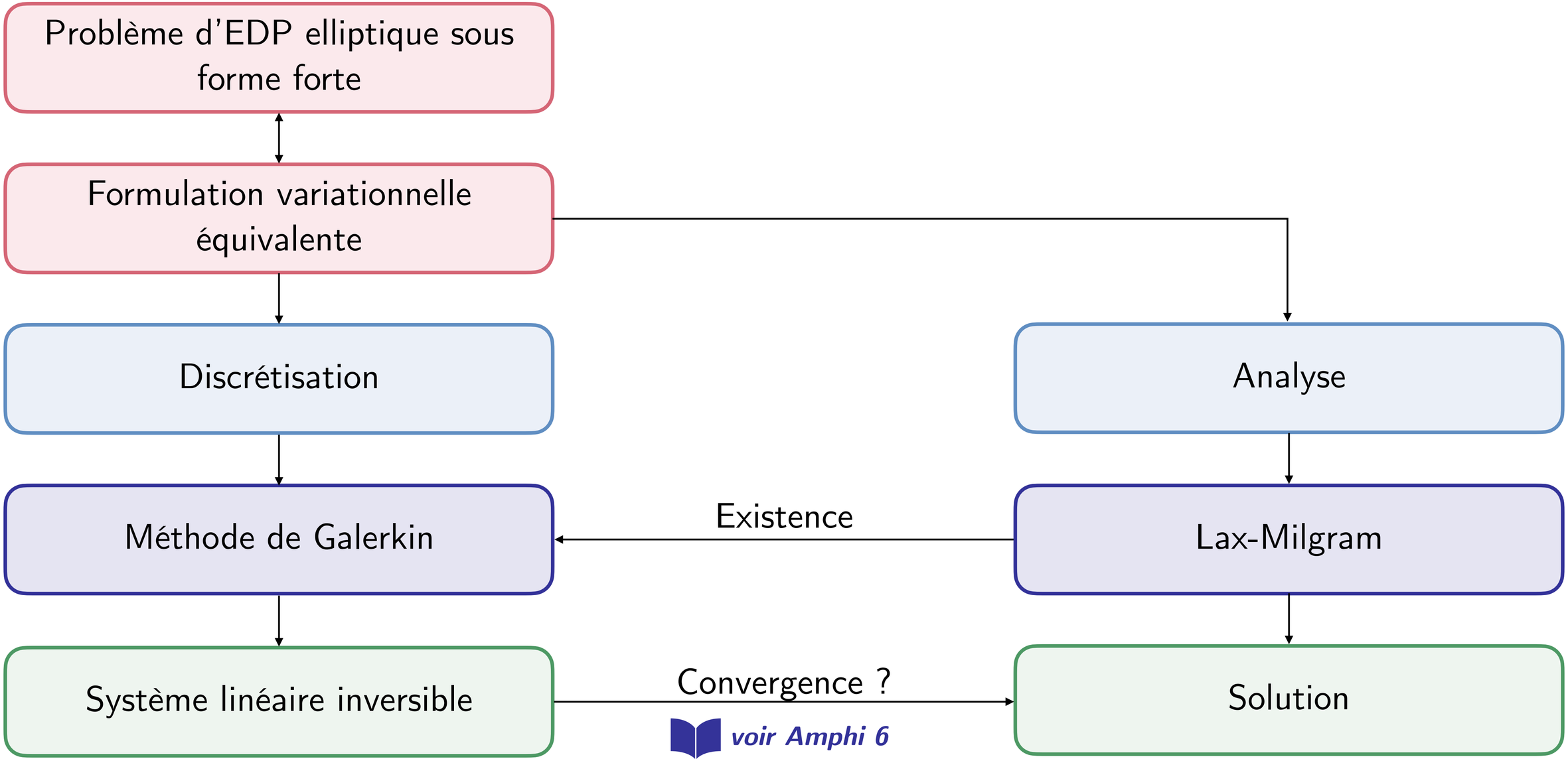
- Les matrices sont creuses

  plus de termes non nuls par ligne

- Les calculs sont plus lourds mais l'approximation est a priori meilleure quand k augmente

  à condition que la solution soit assez régulière

Point d'étape



Déroulement du TP

Un mini-projet TP à faire sur les 2 séances qu'il reste :

à faire en binôme, pas de mélange entre les groupes de TP!

- Documents et IA permis pour ce projet mais attention au plagiat (indiquer ses sources)
- Prise d'initiative sur les sujets très encouragée et récompensée
- Envoi du code avant le vendredi 13 novembre midi (dépôt sur le moodle)
- Soutenance orale de 18 minutes les 16 et 17 novembre après midi (choix du créneau sur un tableau disponible sur le moodle) face à un jury composé de 2 chargés de TDs
  - 2-3 minutes de presentation
  - 15 minutes de questions
  - maitriser tous les outils et algorithmes utilisés dans le code : on sera intransigeant!
  - les 2 membres du binôme doivent intervenir de manière égale.