
Introduction à la méthode des Éléments Finis.

Sonia Fliss, bureau 2.2.21 UMA

Chargés de TDs : Marc Bakry (CEA), Eliane Bécache (Inria, UMA),
Marcella Bonazzoli (UMA), Xavier Claeys (UMA),
Benjamin Graille (Orsay), Erell Jamelot (CEA), Pierre Marchand (UMA),
Edouard Meddouri-Bernard (UMA), Zoïs Moitier (UMA)

Théorème de Lax Milgram

On s'intéresse au problème suivant

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ telle que } a(\mathbf{u}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \quad (FV)$$

où on suppose que:

- $(V, \|\cdot\|_V)$ est un **espace de Hilbert**
- a est une forme **bilinéaire** de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ qui est

- **continue**, c'est à dire

$$\exists M_a > 0, \quad \forall v, w \in V, \quad |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_V \|w\|_V$$

- **coercive**, c'est à dire

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

- ℓ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ qui est **continue**, c'est à dire

$$\exists M_\ell > 0, \quad \forall v \in V, \quad |\ell(v)| \leq M_\ell \|v\|_V$$

Alors il existe une unique solution $\mathbf{u}$ dans V de (F.V.),
et cette solution dépend continûment des données, c'est à dire

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{M_\ell}{\alpha}$$

Introduction

On s'intéresse au problème suivant (*et on suppose que le théorème de Lax Milgram s'applique*)

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ telle que } a(\mathbf{u}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \quad (FV)$$

 **Remarque:** Quand V est un espace de dimension infinie, il est difficile de résoudre (FV) directement.

Idées pour la résolution:

- On « *remplace* » V par un espace de dimension finie V_h , on obtient une formulation variationnelle *discrète*.

On appelle $u_h \in V_h$ la solution.

- On montre que la formulation variationnelle *discrète* se ramène à la résolution d'un *système linéaire*.
- On choisit V_h telle que $\lim_{h \rightarrow 0} \dim V_h = +\infty$ et " $V_h \underset{h \rightarrow 0}{\approx} V$ " et on espère que $u_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} u$

 voir Amphi 6

On supposera dans ce cours que $V_h \subset V$
(Approximation variationnelle interne ou Méthode de Galerkin)

Séance 4 : la méthode des éléments finis

Méthode de Galerkin

Maillage et structure des données

Élément fini P1

Matrices élémentaires

Procédure d'assemblage et résolution

Méthode de Galerkin

On s'intéresse au problème suivant (et on suppose que le théorème de Lax Milgram s'applique)

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ telle que } a(\mathbf{u}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \quad (FV)$$

- On « **remplace** » V par un espace de dimension finie $V_h \subset V$, on obtient une formulation variationnelle **discrète**.

$$\text{Trouver } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ telle que } a(\mathbf{u}_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (FV_h)$$

- $(V_h, \|\cdot\|_V)$ est un **espace de Hilbert** (c'est un espace de dimension finie donc il est fermé dans V)
- a est une forme **bilinéaire** de $V_h \times V_h$ qui est continue et coercive dans V_h car elle l'est dans V et $V_h \subset V$ les constantes de continuité et coercivité sont les mêmes que dans V .
- ℓ est une forme linéaire de V_h qui est **continue**, car elle l'est dans V et $V_h \subset V$ la constante de continuité est la même que dans V .

$$\text{Il existe une unique solution } \mathbf{u}_h \in V_h \text{ de } (FV_h) \text{ et } \|\mathbf{u}_h\|_V \leq \frac{M_\ell}{\alpha}$$

 **Remarque:** $\mathbf{u}_h \neq \mathbf{u}$ si $V_h \subsetneq V$: les problèmes variationnels (FV) et (FV_h) sont différents!

Méthode de Galerkin

Trouver $u_h \in V_h$ telle que $a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (FV_h)$

- On montre que la formulation variationnelle *discrète* se ramène à la résolution d'un *système linéaire*.

On introduit $\{\phi_i\}_{i=1}^{N_h}$ une base de V_h ($N_h := \dim V_h$)

Il est facile de montrer que $a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad \Leftrightarrow \quad a(u_h, \phi_i) = \ell(\phi_i), \quad \forall 1 \leq i \leq N_h$

 *A faire en exercice*

En décomposant u_h dans cette base

$$u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u^j \phi_j$$

on obtient le problème suivant

Trouver $(u^1, u^2, \dots, u^{N_h})$ telle que $\sum_{j=1}^{N_h} u^j a(\phi_j, \phi_i) = \ell(\phi_i), \quad \forall 1 \leq i \leq N_h$

qui s'écrit sous la forme d'un système linéaire

Trouver $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_h})^T \in \mathbb{R}^{N_h}$ telle que $\mathbb{A} \vec{u} = \vec{\ell}$ où $\mathbb{A} = (A^{ij})_{1 \leq i, j \leq N_h}$ où $A^{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$,
 $\vec{\ell} = (\ell^1, \dots, \ell^{N_h})^T$ où $\ell^i = \ell(\phi_i)$.

Méthode de Galerkin

Trouver $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_h})^\top \in \mathbb{R}^{N_h}$ telle que $\mathbb{A}\vec{u} = \vec{\ell}$ où $\mathbb{A} = (A^{ij})_{1 \leq i, j \leq N_h}$ où $A^{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$,
 $\vec{\ell} = (\ell^1, \dots, \ell^{N_h})^\top$ où $\ell^i = \ell(\phi_i)$.

Lien entre forme bilinéaire et opérateur matriciel

$$\begin{aligned} & \forall \vec{w}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad \vec{v}^\top \mathbb{A} \vec{w} = a(w_h, v_h) \\ \text{où} \quad & \vec{w} = (w^1, \dots, w^{N_h})^\top \in \mathbb{R}^{N_h}, \text{ et } \vec{v} = (v^1, \dots, v^{N_h})^\top \in \mathbb{R}^{N_h} \\ \text{et} \quad & w_h = \sum_{j=1}^{N_h} w^j \phi_j \in V_h, \quad v_h = \sum_{i=1}^{N_h} v^i \phi_i \in V_h \end{aligned}$$

Proposition

La matrice $\mathbb{A}$ est définie positive donc inversible!

Preuve: $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^{N_h}, \quad \vec{v}^\top \mathbb{A} \vec{v} = a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|^2$

La solution u_h de (FV_h) est donnée par $u_h = \sum_{j=1}^{N_h} u^j \phi_j$ où $\vec{u} = (u^1, u^2, \dots, u^{N_h})^\top \in \mathbb{R}^{N_h}$ est donnée par
 $\vec{u} = \mathbb{A}^{-1} \vec{\ell}$

Méthode de Galerkin

Dans ce cours, nous allons introduire des espaces $V_h \subset V$ tels que

- le système linéaire n'est ni difficile et ni coûteux à construire puis résoudre
- On a bien convergence des solutions discrètes vers la solution du problème de départ
- La vitesse de convergence est la plus élevée possible

Amphi 4 et 5

Amphi 6

Amphi 6

On verra qu'il y a toujours un compromis à trouver entre les coûts de calcul (stockage et temps de calcul) et la vitesse de convergence.

Il existe deux exemples fondamentaux :

Méthode spectrale l'espace de dimension finie est construit à partir de fonctions propres du problème



C'est une des méthodes les plus utilisées en Mécanique (pour les phénomènes d'ondes et vibrations par exemple). Quand les fonctions propres ne peuvent pas être déterminées explicitement (milieux à coefficients variables, géométrie compliquée,...), celles ci sont approchées par la méthode des éléments finis.

Méthode des éléments finis l'espace de dimension finie est construit à partir de fonctions localisées, construites à partir d'un maillage

C'est une des méthodes les plus efficaces et populaires pour discrétiser des problèmes aux limites. Elle est utilisée dans un grand nombre de codes industriels.

Le problème modèle traité dans cet amphi

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert **polygonal**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$



On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de $\forall v \in H^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$$V = H^1(\Omega)$$

$$a(u, v)$$

$$\ell(v)$$

La formulation variationnelle discrète que nous allons résoudre s'écrit

$$\text{Trouver } u_h \in V_h \text{ telle que } a(u_h, v_h) = \ell(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \quad (FV_h)$$

et se reformule sous la forme du système linéaire ($\{\phi_i\}_{i=1}^{N_h}$ étant une base de V_h)

$$A \vec{u} = \vec{\ell} \quad \text{où} \quad A = K + M,$$

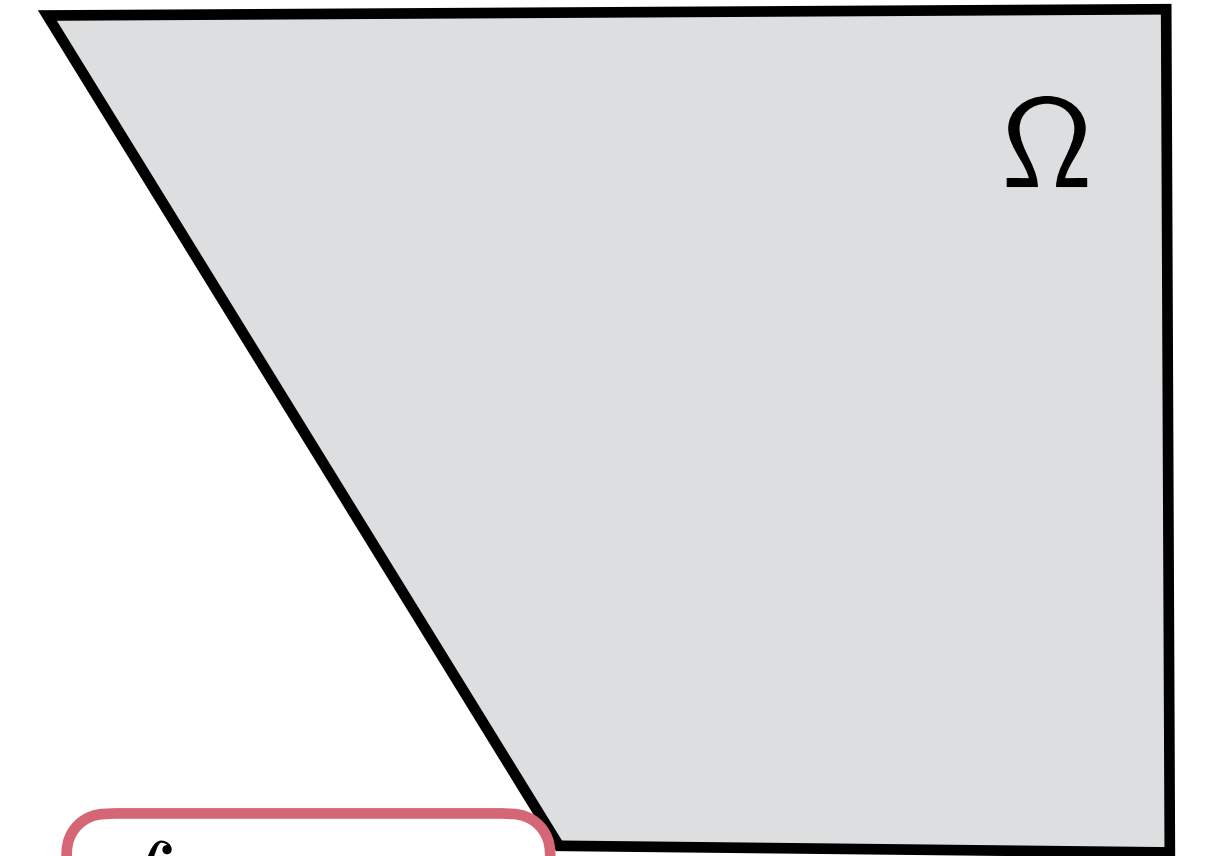
$$K^{ij} = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \phi_j \cdot \underline{\nabla} \phi_i \, d\Omega,$$

matrice de rigidité

$$M^{ij} = \int_{\Omega} \phi_j \phi_i \, d\Omega$$

matrice de masse

$$\ell^i = \int_{\Omega} f \phi_i \, d\Omega$$



Séance 4 : la méthode des éléments finis

Méthode de Galerkin

Maillage et structure des données

Élément fini P1

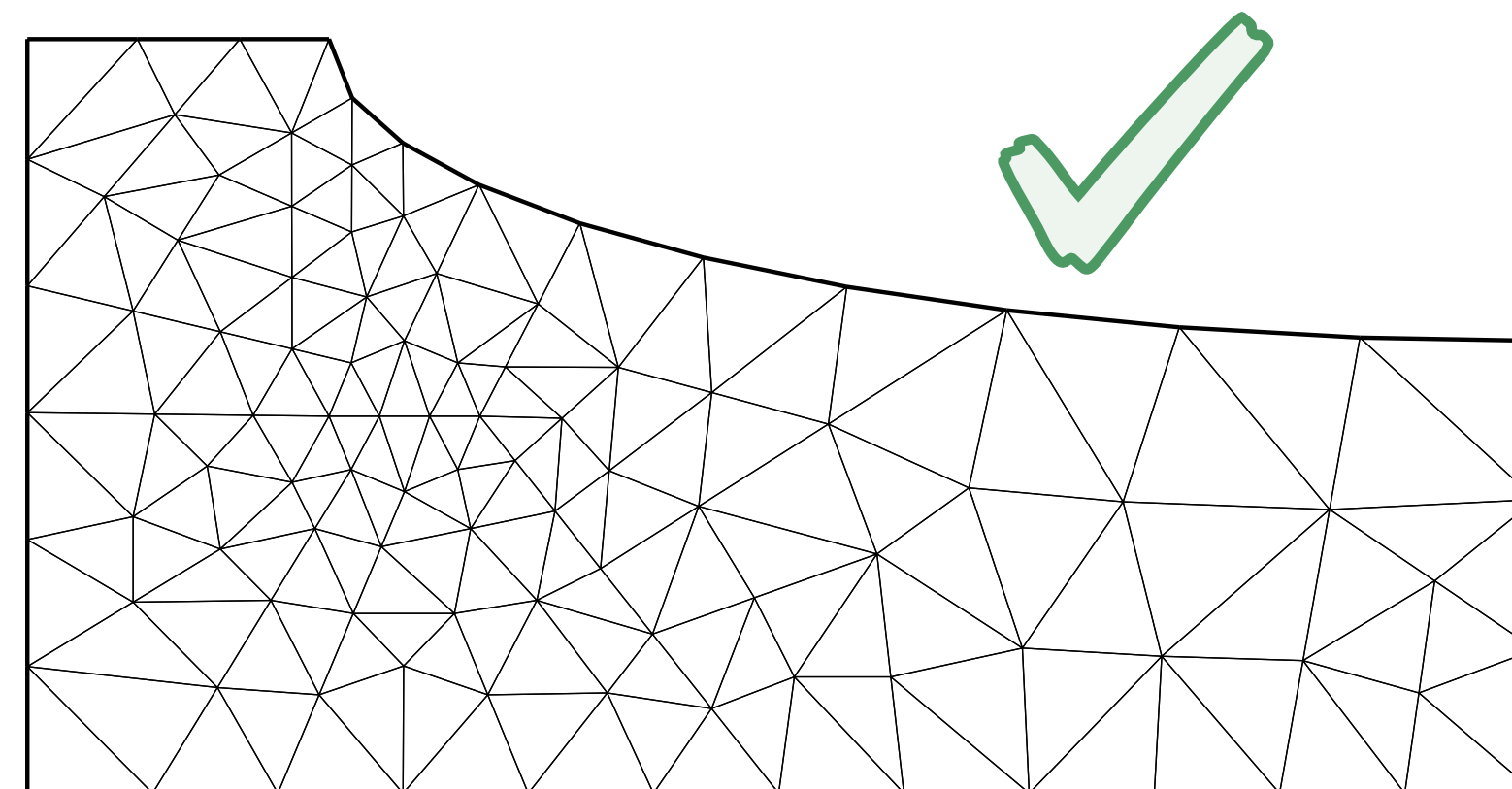
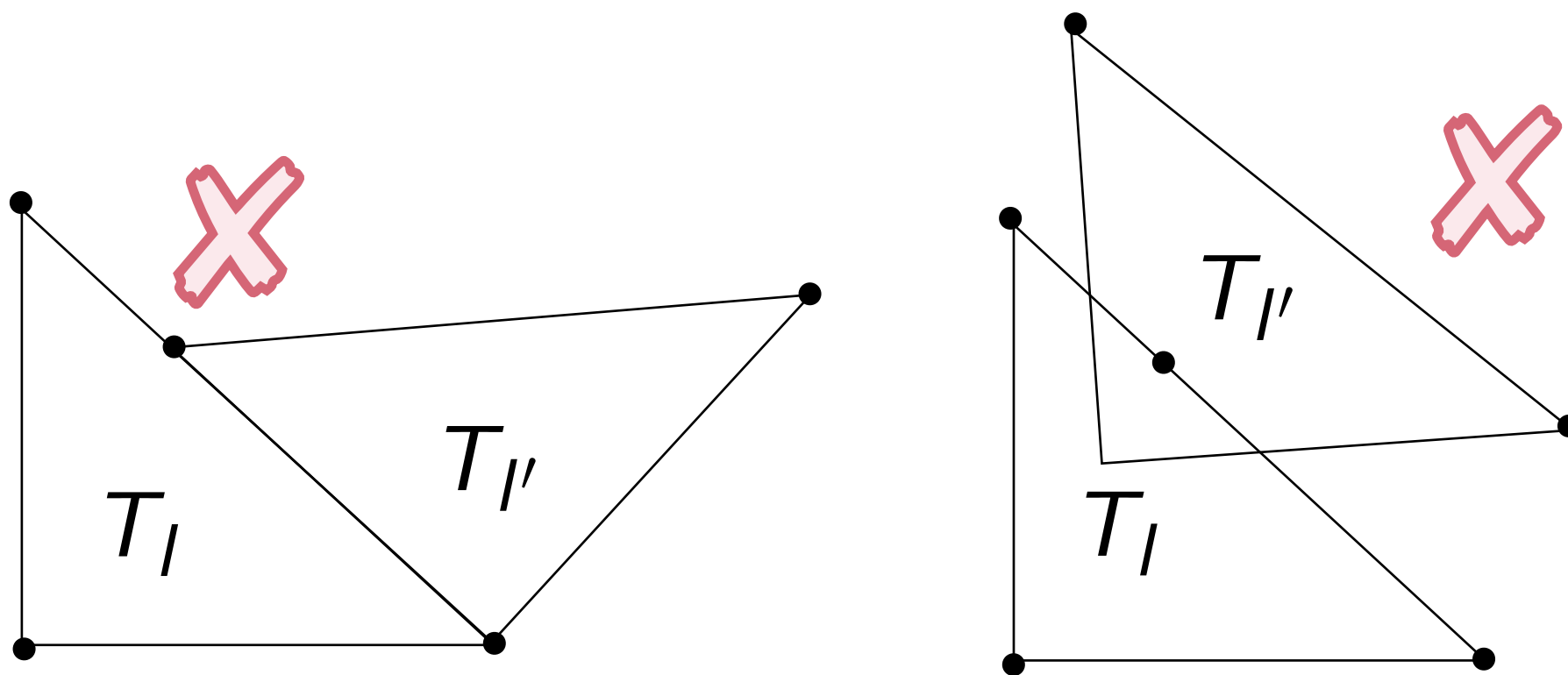
Matrices élémentaires

Procédure d'assemblage et résolution

Définition: Maillage triangulaire

Soit Ω un ouvert connexe polyédrique de $\mathbb{R}^2$. Un maillage triangulaire de $\bar{\Omega}$ est un ensemble de N_e triangles $\{T_l\}_{1 \leq l \leq N_e}$ tels que

- Tout triangle T_k est d'intérieur non vide (c'est-à-dire $\overset{\circ}{T}_k \neq \emptyset$). On définit alors ρ_k le rayon du cercle inscrit au triangle T_k et h_k le rayon du cercle circonscrit.
- $\overset{\circ}{T}_k \cap \overset{\circ}{T}_{k'} = \emptyset$ si $k \neq k'$,
- $\bigcup_l T_k = \bar{\Omega}$,
- toute arête d'un triangle est soit une arête d'un autre triangle soit une arête portée par la frontière $\partial\Omega$.

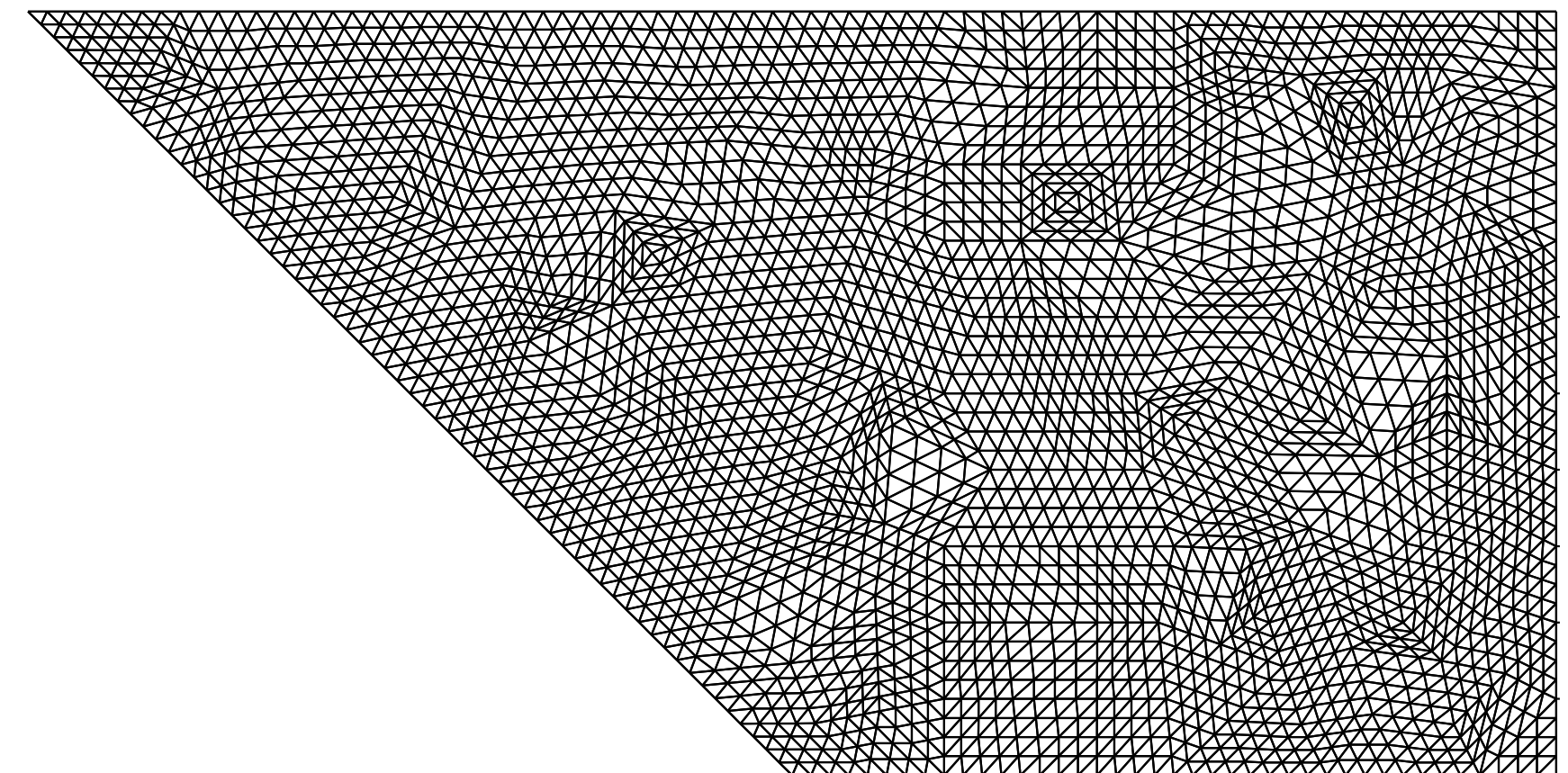
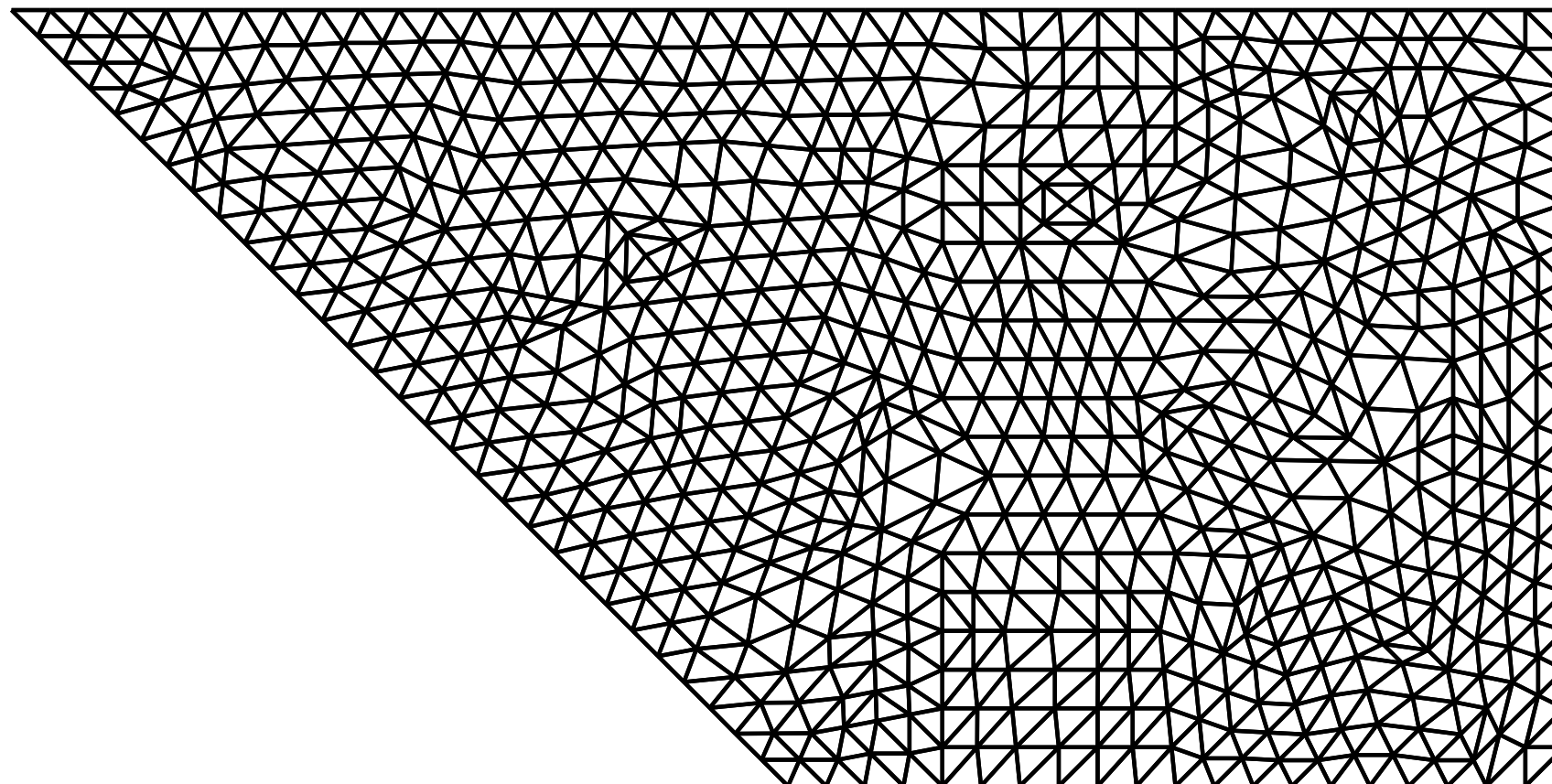
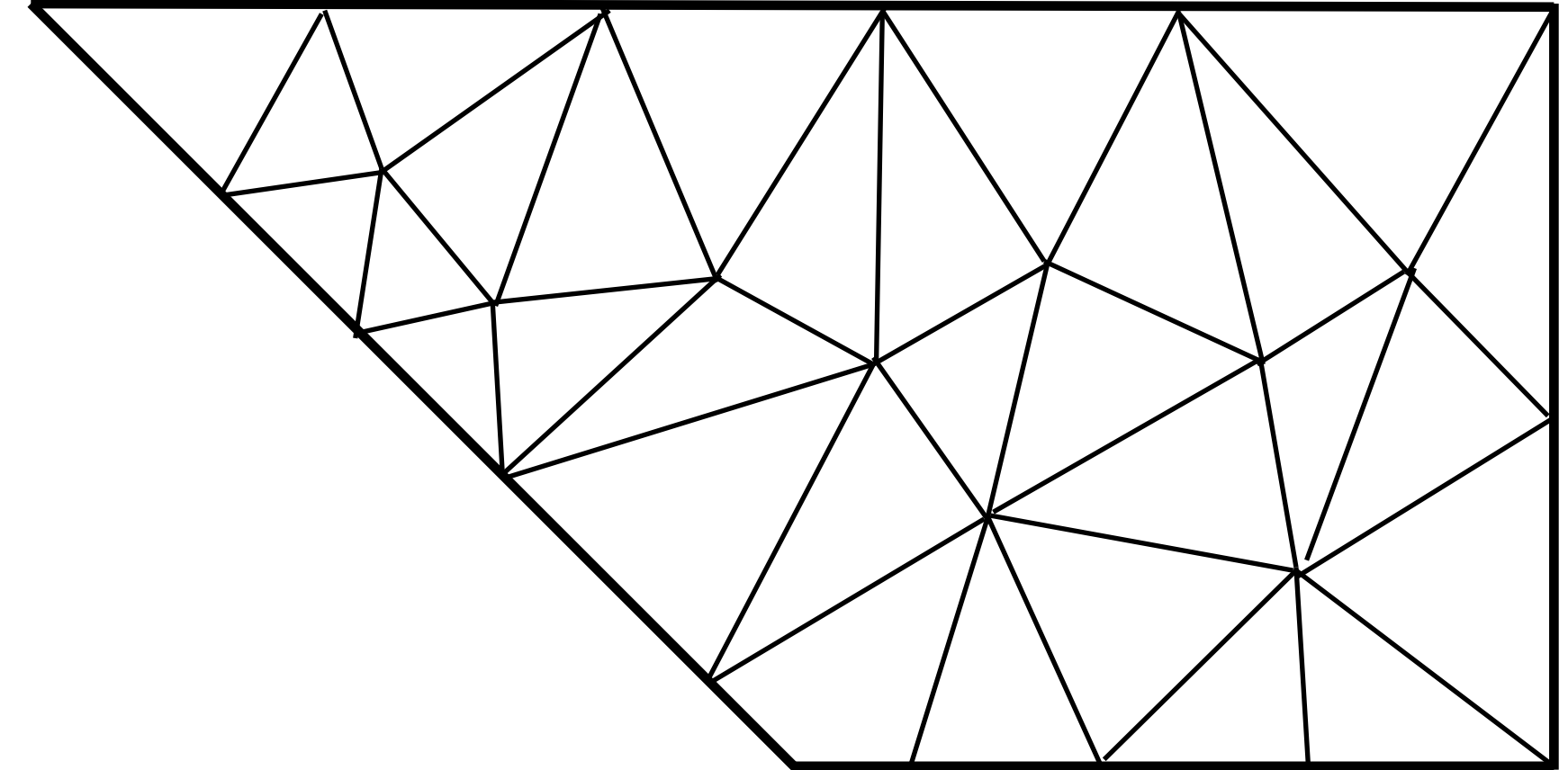
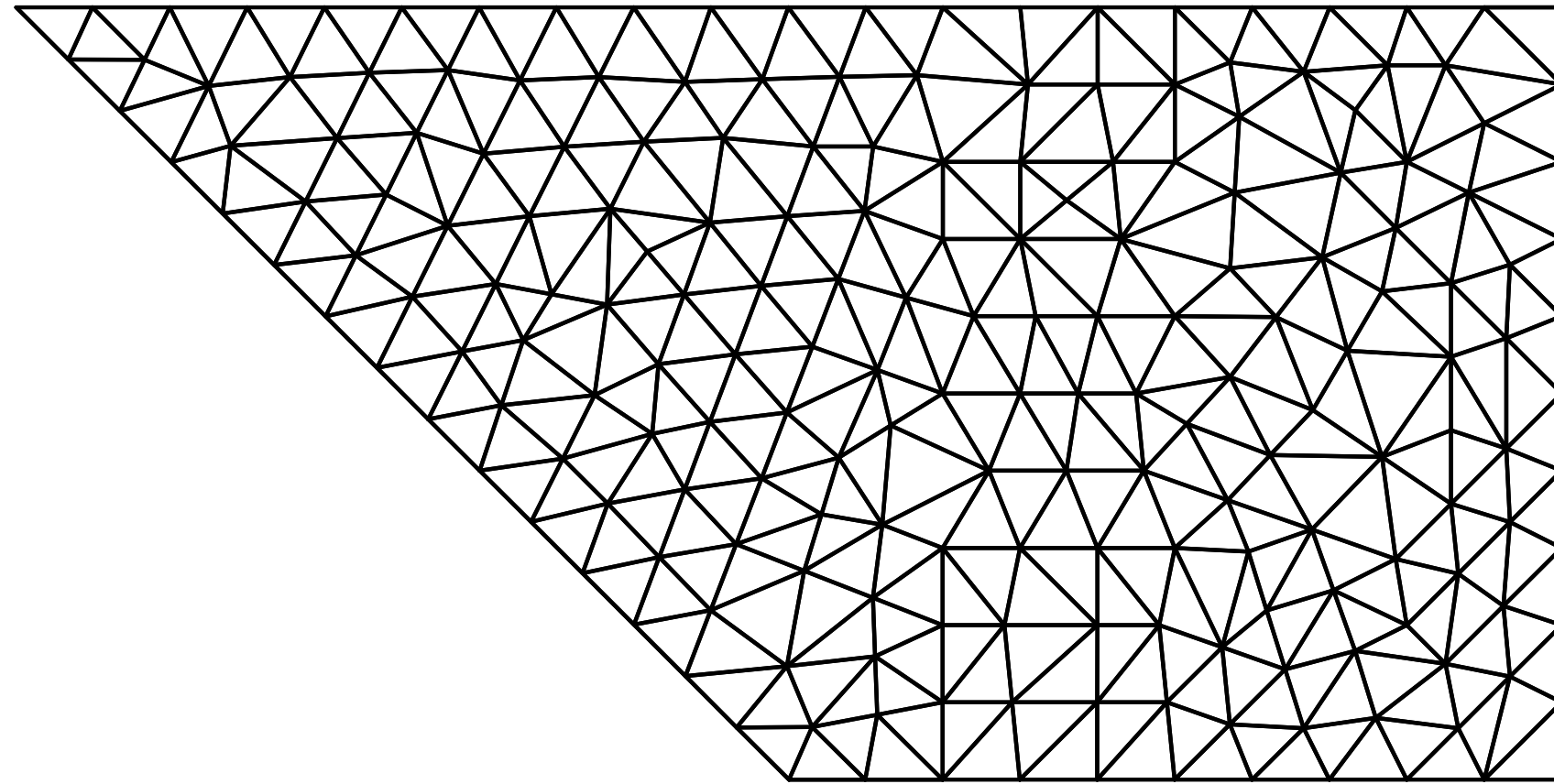


Pas du maillage

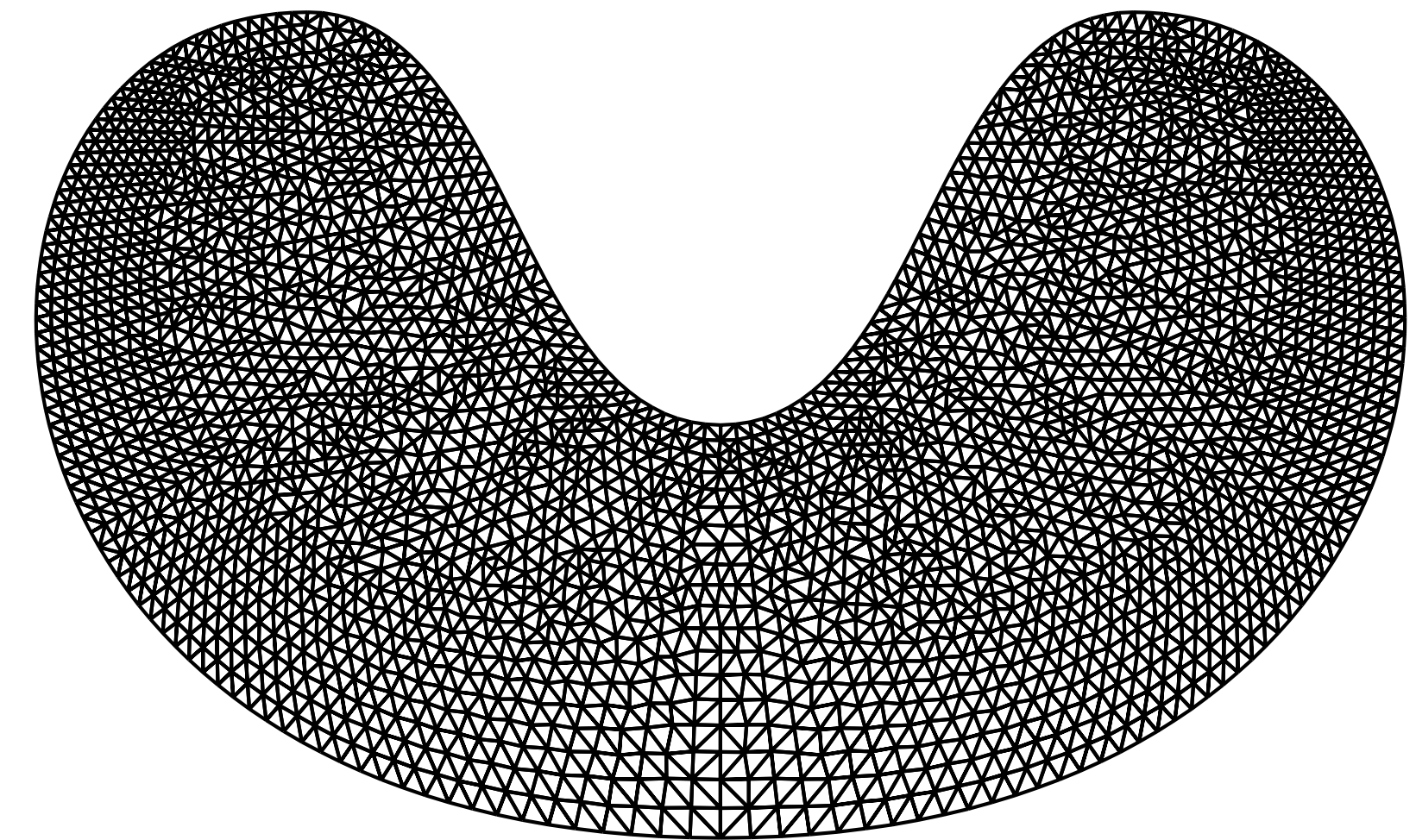
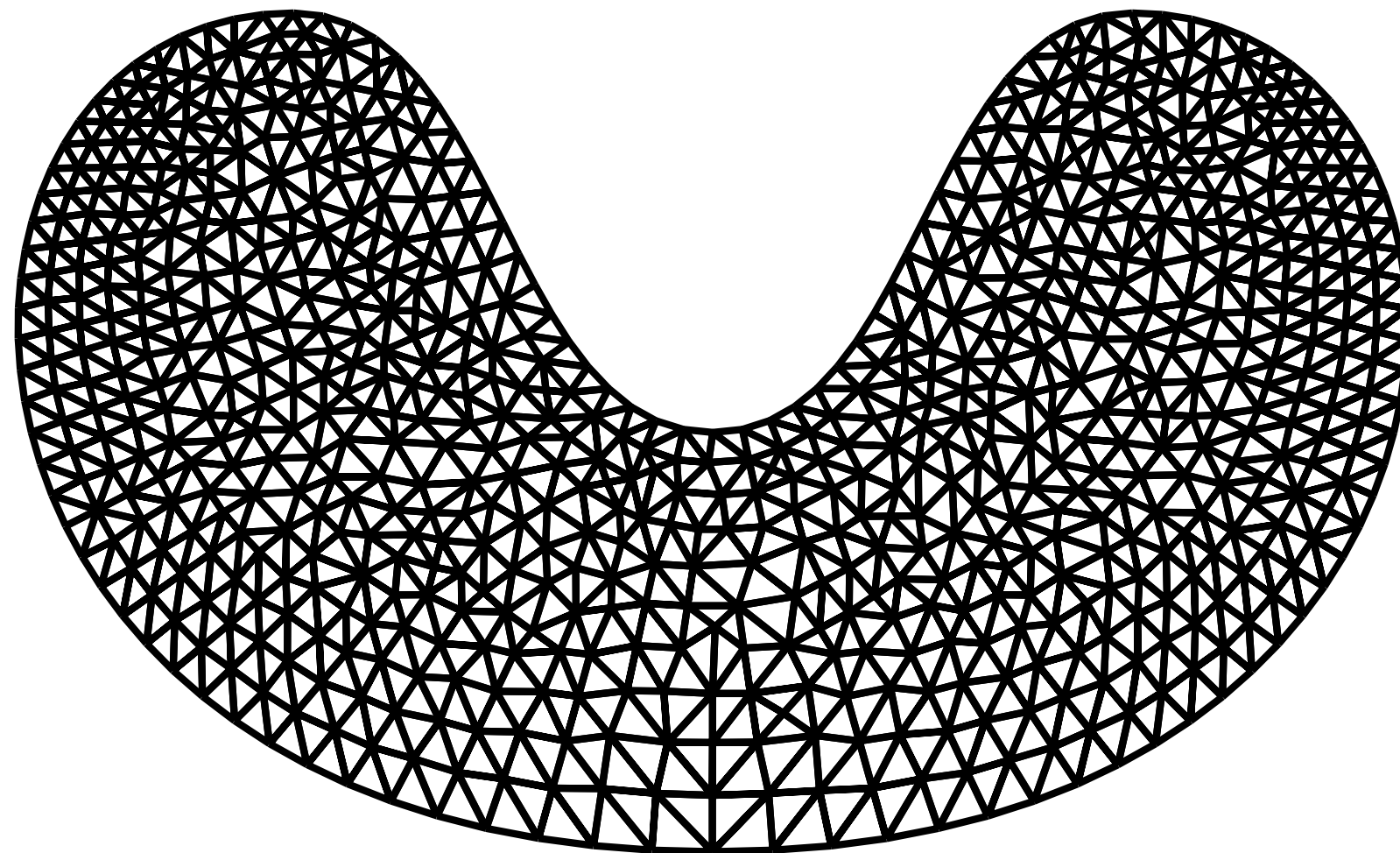
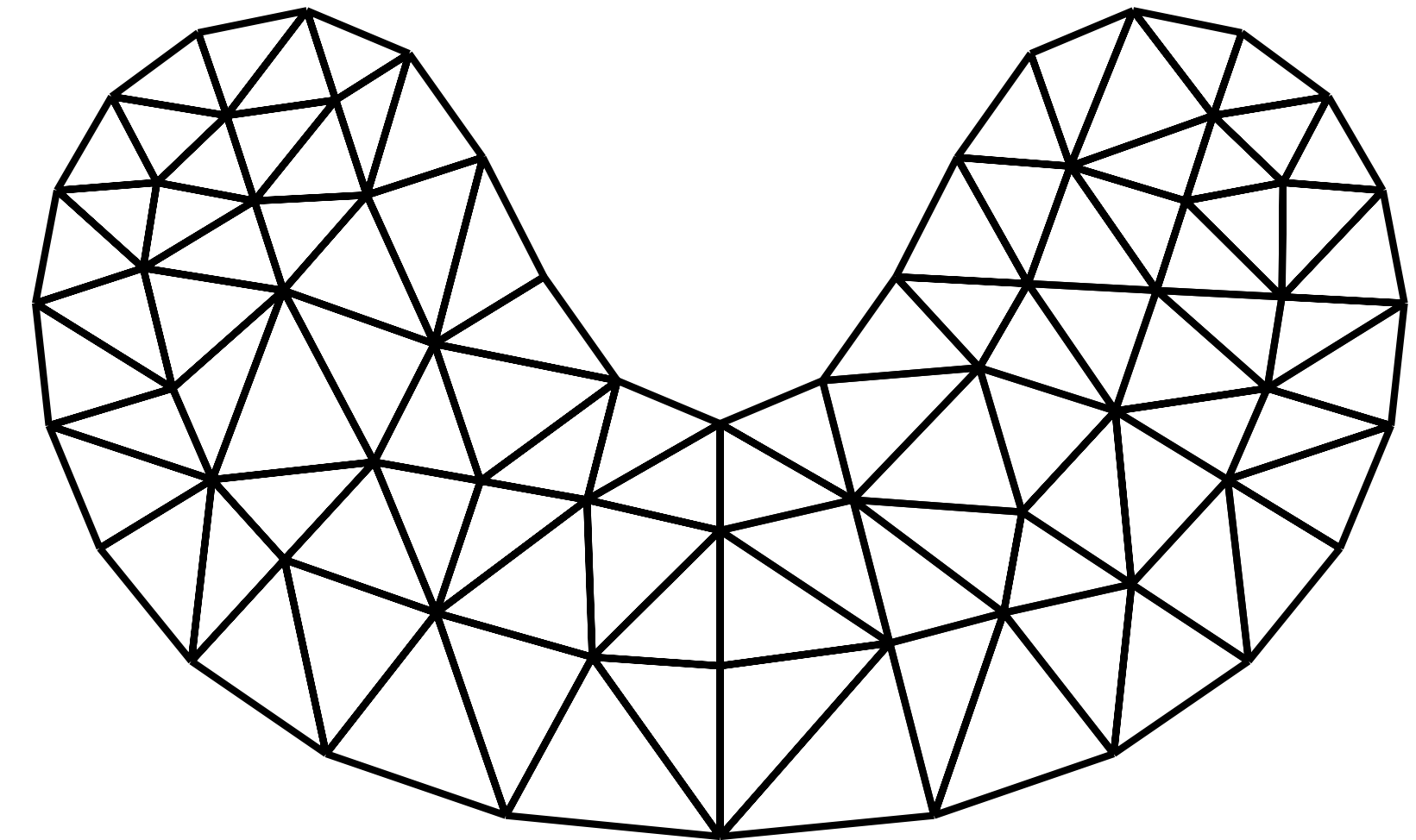
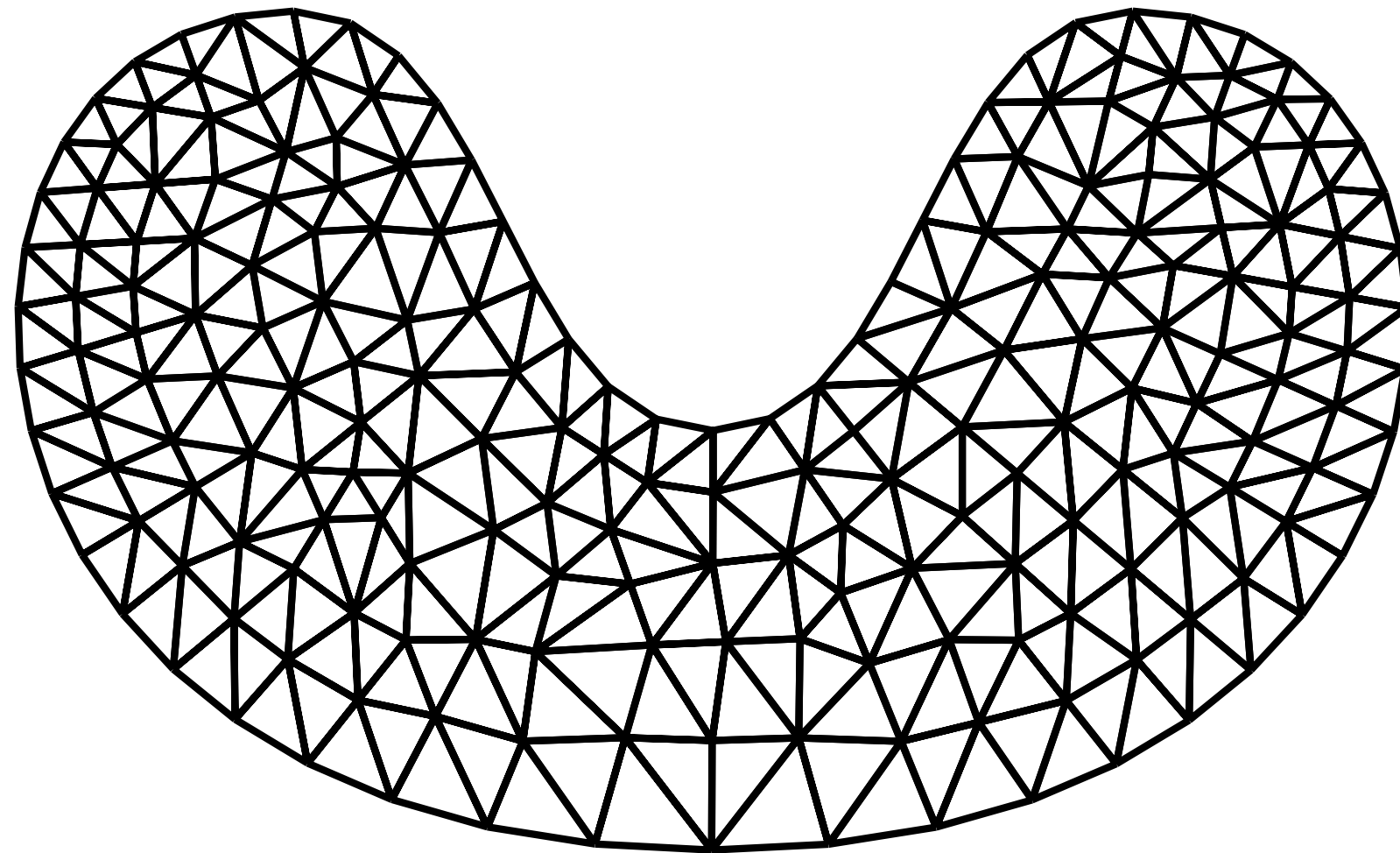
$$h = \max_{1 \leq l \leq N_e} h_l$$

$$h \rightarrow 0 \Rightarrow N_e \rightarrow +\infty$$

Exemple de maillages pour un domaine polyédrique



△ Domaine courbe



Structures de données pour un maillage triangulaire



Coordneu
Tableau de coordonnées des sommets

$\underline{S}_1$	x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{S}_i$	x_i	y_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{S}_{N_s}$	x_{N_s}	y_{N_s}

Refneu
Références des sommets

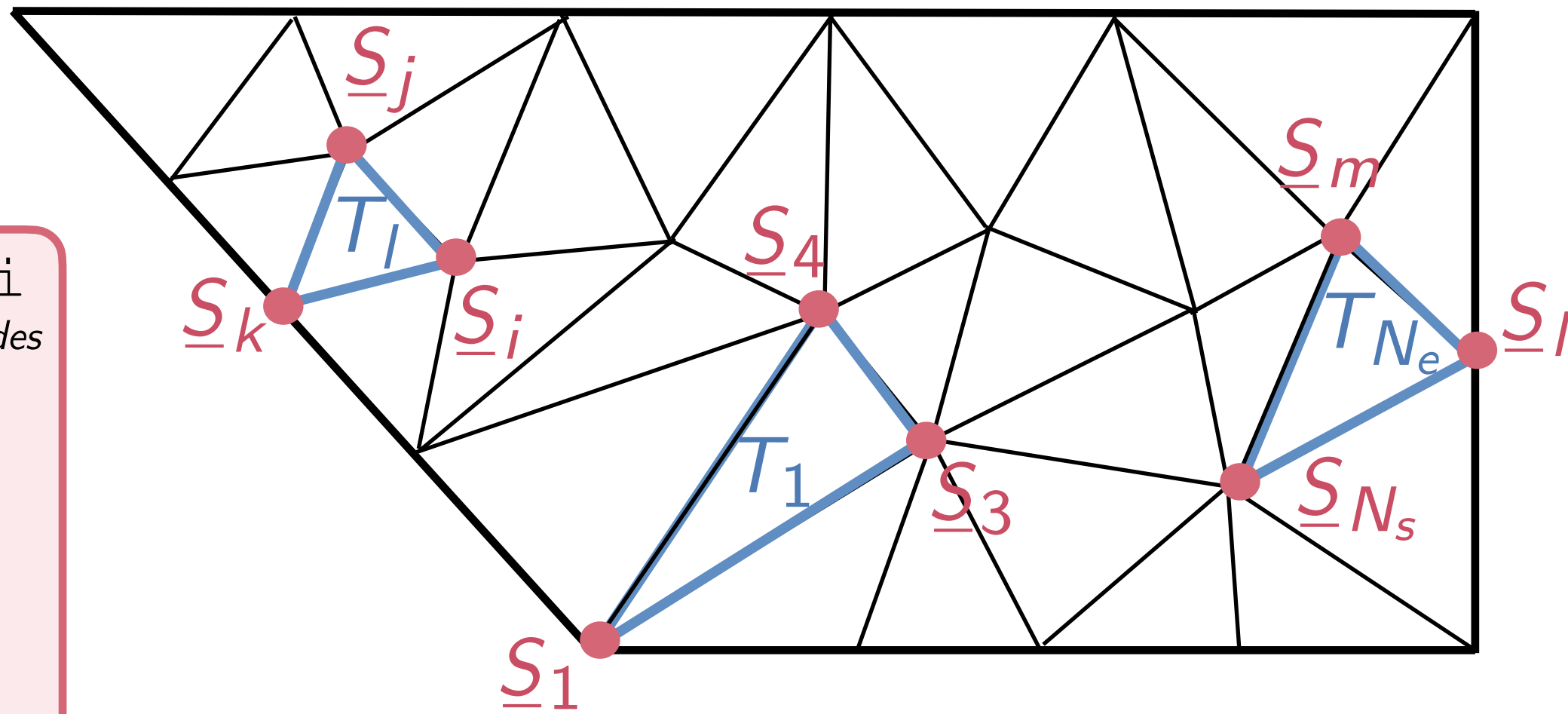
1
$\vdots$
0
$\vdots$
0

tabtri
Tableau des triangles

T_1	1	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_l	i	j	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_{N_e}	l	m	N_s

Reftri
Références des triangles

1
$\vdots$
1
$\vdots$
1



- N_s : Nombre de sommets
- N_b : Nombre de sommets sur le bord
- N_e : Nombre de triangles
- N_a : Nombre d'arêtes

Structures de données pour un maillage triangulaire



Coordneu
Tableau de coordonnées des sommets

$\underline{S}_1$	x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{S}_i$	x_i	y_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{S}_{N_s}$	x_{N_s}	y_{N_s}

Refneu
Références des sommets

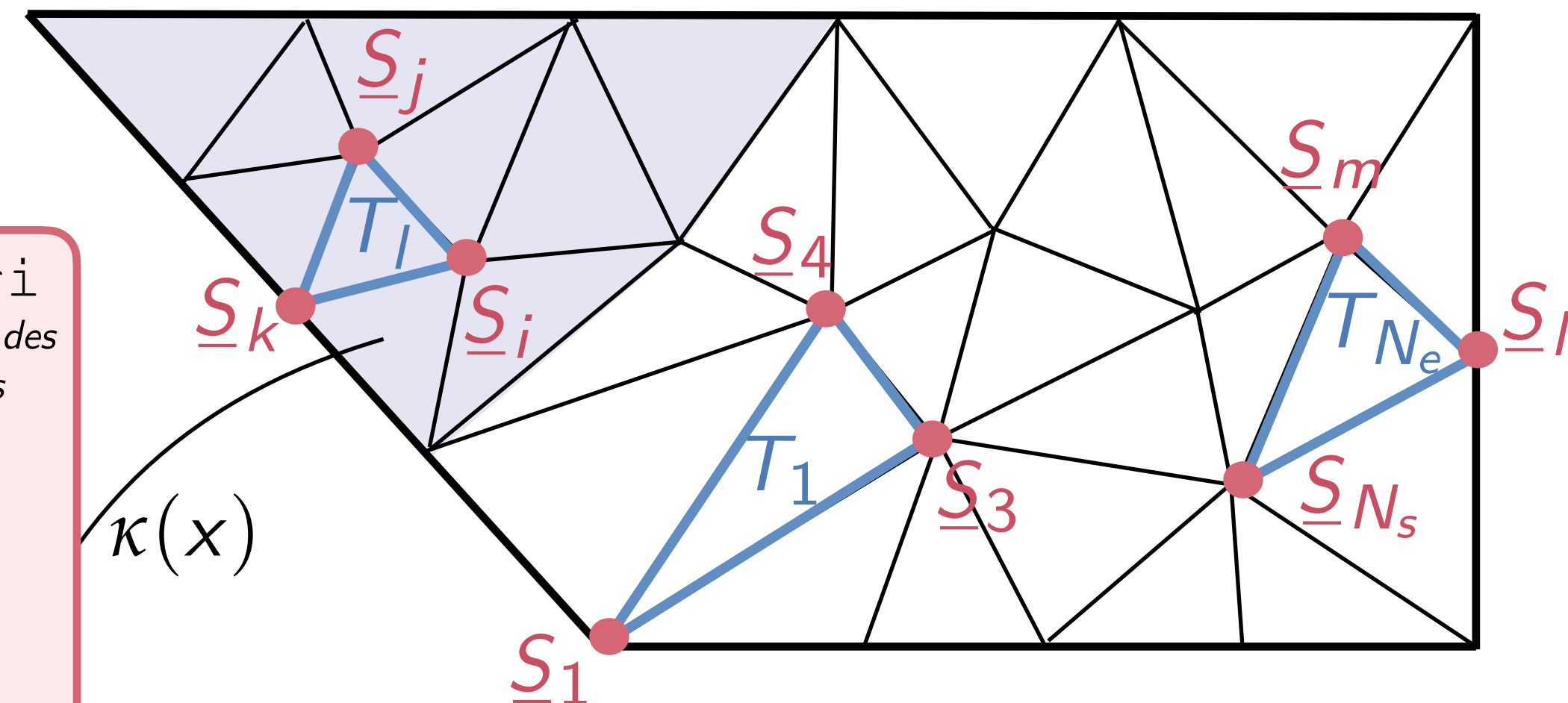
1
$\vdots$
0
$\vdots$
0

tabtri
Tableau des triangles

T_1	1	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_l	i	j	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_{N_e}	l	m	N_s

Reftri
Références des triangles

1
$\vdots$
2
$\vdots$
1



N_s : Nombre de sommets

N_b : Nombre de sommets sur le bord

N_e : Nombre de triangles

N_a : Nombre d'arêtes

Théorème: Relations d'Euler en 2D

$$N_e = 2N_s - N_b - 2$$

$$N_a = 3N_s - N_b - 3$$

Séance 4 : la méthode des éléments finis

Méthode de Galerkin

Maillage et structure des données

Élément fini P1

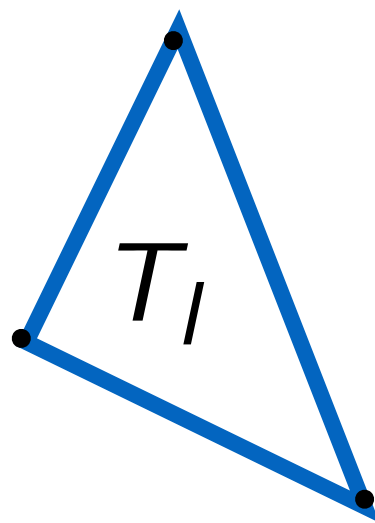
Matrices élémentaires

Procédure d'assemblage et résolution

Définition:

$$V_h = \left\{ v_h \in C^0(\bar{\Omega}), \quad \forall 0 \leq I \leq N_e, v_h|_{T_I} \in \mathbb{P}_1(T_I) \right\}$$

$$\text{où } \mathbb{P}_1(T_I) = \left\{ u : T_I \ni (x, y) \mapsto ax + by + c \in \mathbb{R}, \quad (a, b, c) \in \mathbb{R} \right\}.$$

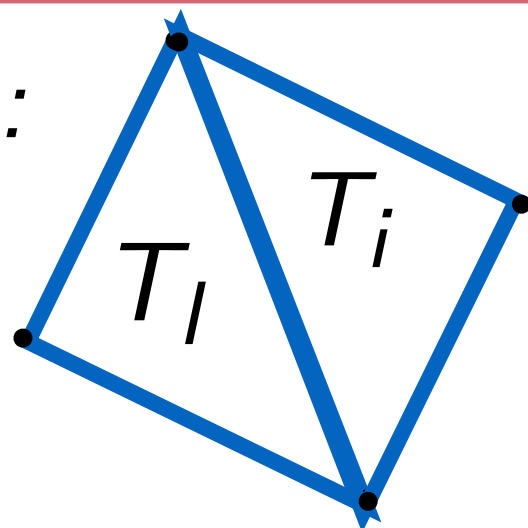


Remarque: soit $v_h \in V_h$. Pour déterminer entièrement v_h sur un triangle T_I , il suffit de la connaître en 3 points non alignés (par exemple les 3 sommets)
De plus, sa restriction à un segment non réduit à un point est déterminée entièrement par les valeurs qu'elle prend aux deux extrémités de ce segment.

Proposition

$$V_h \subset H^1(\Omega)$$

Preuve:



Soit $v_h \in V_h$, on a tout d'abord $\forall I \in \{1, \dots, N_e\}, v_h|_{T_I} \in C^1(\bar{T}_I) \subset H^1(T_I)$
Soit $Q = T_i \cup T_I$, pour que $v_h|_Q \in H^1(Q)$, il faut et il suffit que v_h soit continue à l'interface, ce qui est le cas.



voir le TD1, exo2

v_h étant C^1 dans chaque triangle et continue aux interfaces entre les triangles, elle est H^1 .

Théorème:

L'espace V_h est un espace vectoriel de dimension $N = N_s$ dont une base est donnée par les fonctions affines par morceaux sur chaque triangle $(\phi_i)_{1 \leq i \leq N_s} \in V_h$ définies par

$$\phi_i(\underline{S}_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve:

• *c'est une famille libre:* Soit $(v^1, \dots, v^{N_s})$, tel que $\forall \underline{x} \in \Omega, \sum_{1 \leq i \leq N_s} v^i \phi_i(\underline{x}) = 0$

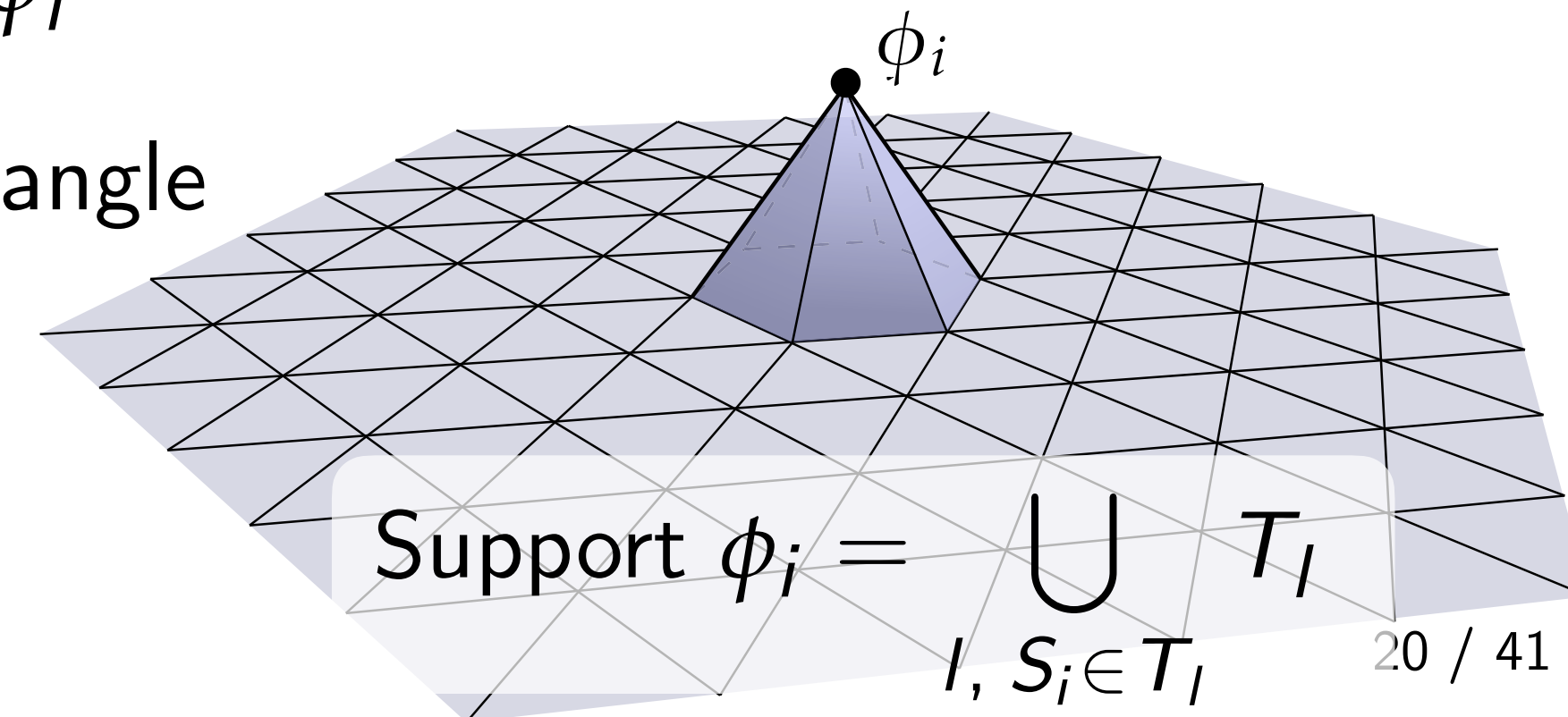
$$\Rightarrow \forall 1 \leq j \leq N_s, \sum_{1 \leq i \leq N_s} v^i \phi_i(\underline{S}_j) = 0 \Rightarrow \forall 1 \leq j \leq N_s, v^j = 0$$

• *c'est une famille génératrice:* Soient $v_h \in V_h$ et $\tilde{v}_h := \sum_{1 \leq i \leq N_s} v_h(\underline{S}_i) \phi_i$

Ces deux fonctions coïncident sur chaque sommet donc sur chaque triangle et chaque arête donc sur $\bar{\Omega}$.

Corollaire.

$$\forall v_h \in V_h \quad v_h = \sum_{1 \leq i \leq N_s} v_h(\underline{S}_i) \phi_i$$



Les coordonnées barycentriques: du global au local

Caractérisation des fonctions de base sur chaque triangle

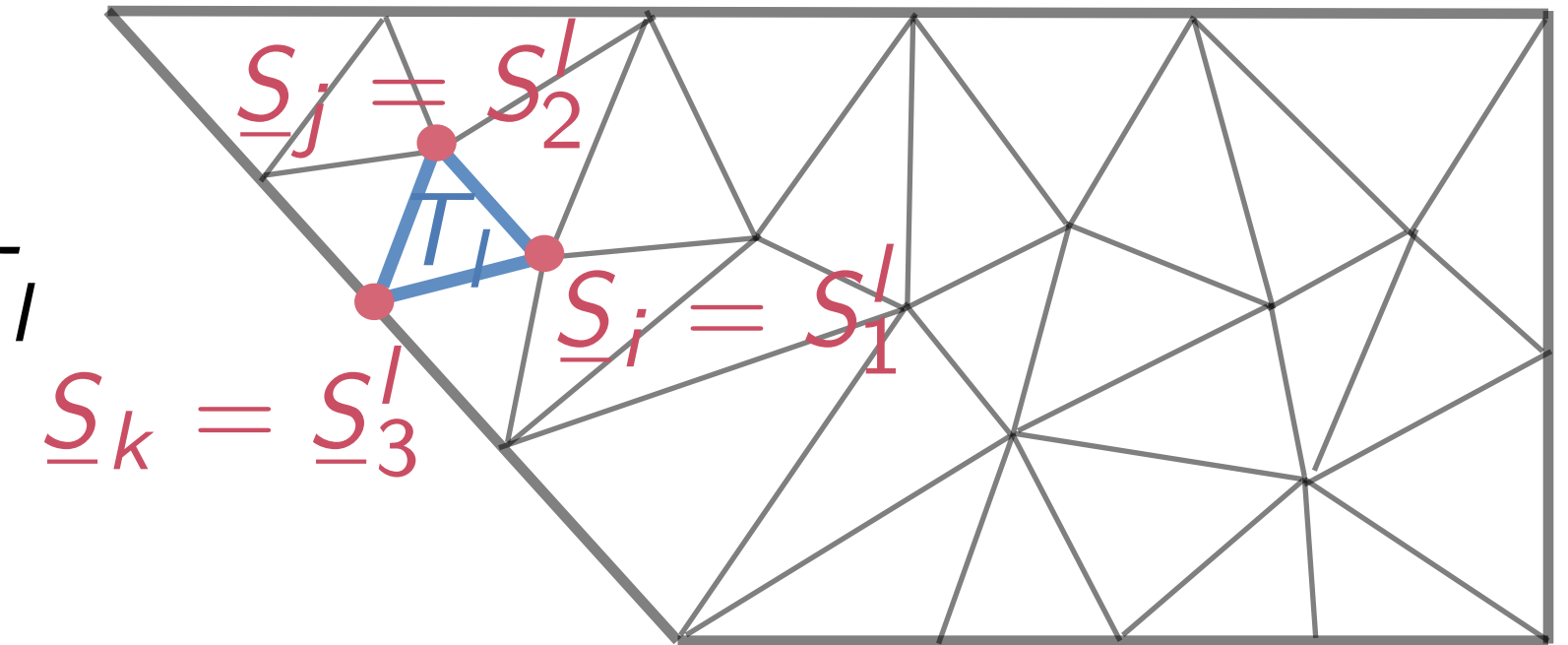
Numérotation
globale:

tabtri
Tableau des triangles

⋮	⋮	⋮	⋮
T_i	i	j	k
⋮	⋮	⋮	⋮

Numérotation
locale à l'élément T_i

1 2 3



Proposition:

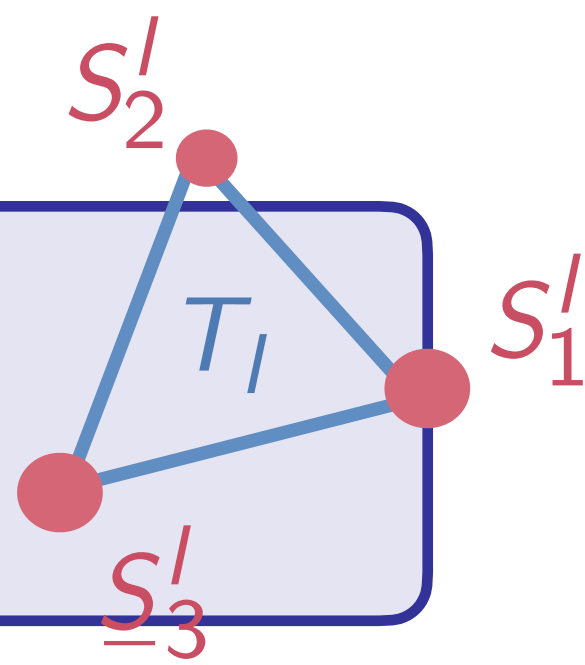
$\phi_i|_{T_i}$, $\phi_j|_{T_i}$ et $\phi_k|_{T_i}$ sont les coordonnées barycentriques associées respectivement aux points $S'_1 = \underline{S}_i$, $S'_2 = \underline{S}_j$, $S'_3 = \underline{S}_k$

Rappel : $\forall \underline{M} \in T_i, \quad \underline{M} = \lambda'_1(\underline{M})\underline{S}'_1 + \lambda'_2(\underline{M})\underline{S}'_2 + \lambda'_3(\underline{M})\underline{S}'_3$
 $\lambda'_1(\underline{M}) + \lambda'_2(\underline{M}) + \lambda'_3(\underline{M}) = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad 0 \leq \lambda'_i(\underline{M}) \leq 1$

Preuve : Les coordonnées barycentriques sont affines sur T_i et vérifient $\forall (\hat{i}, \hat{j}) \in \{1, 2, 3\}^2, \quad \lambda'_{\hat{i}}(S'_{\hat{j}}) = \delta_{\hat{i}}^{\hat{j}}$

Les coordonnées barycentriques

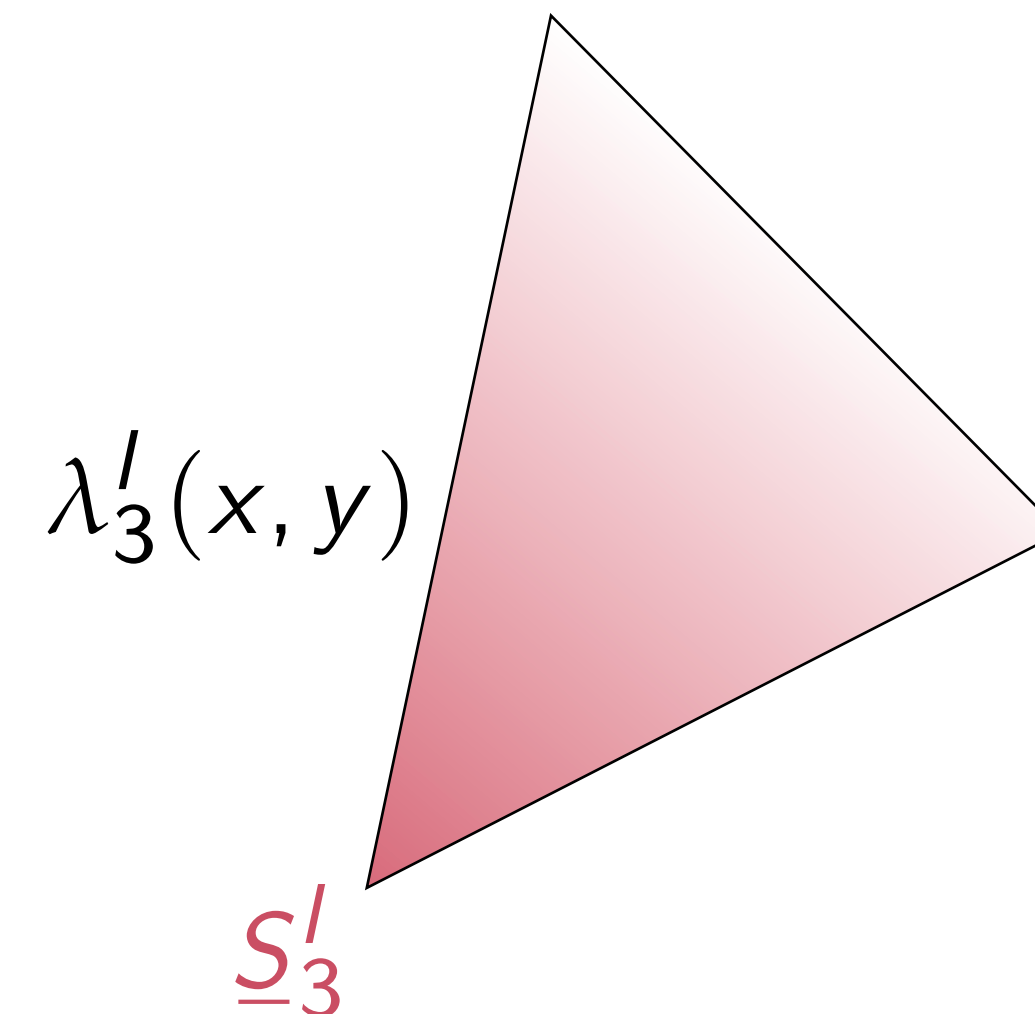
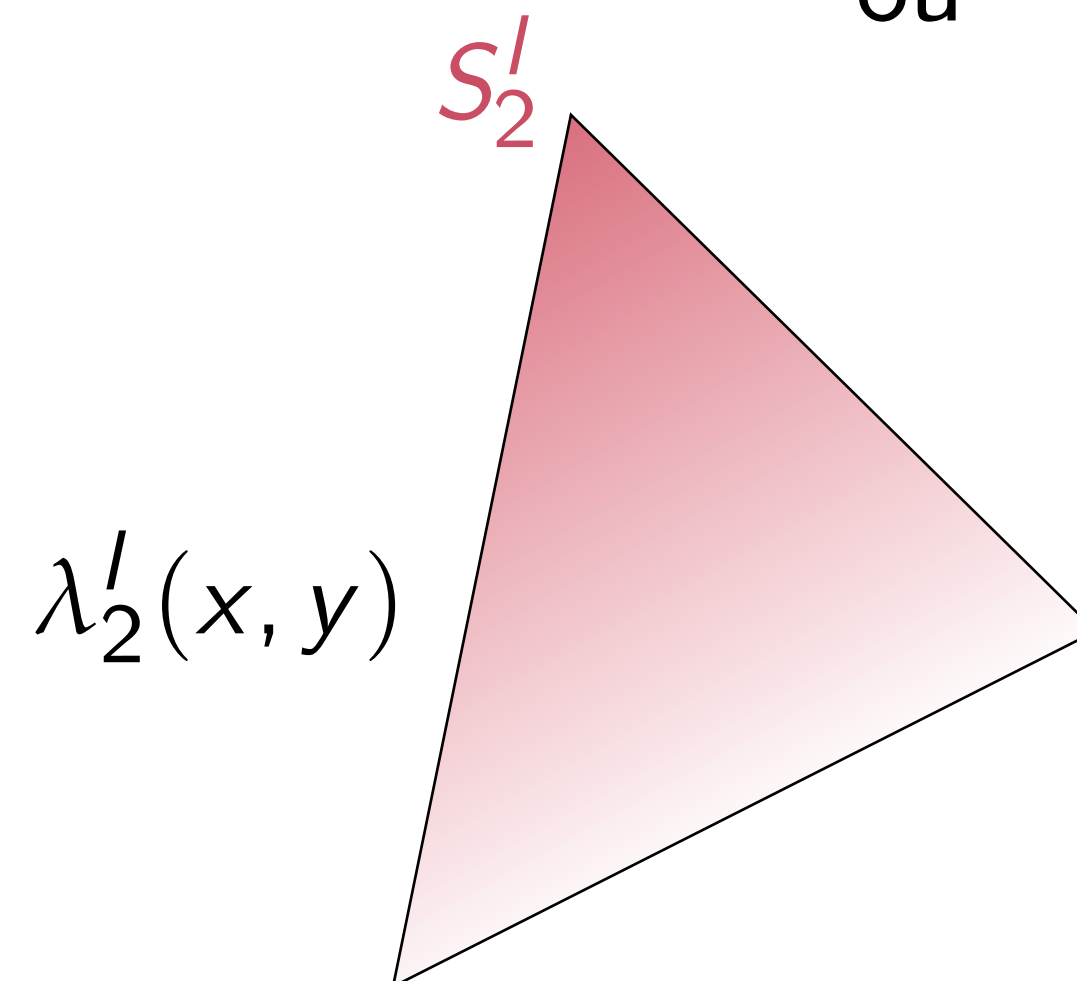
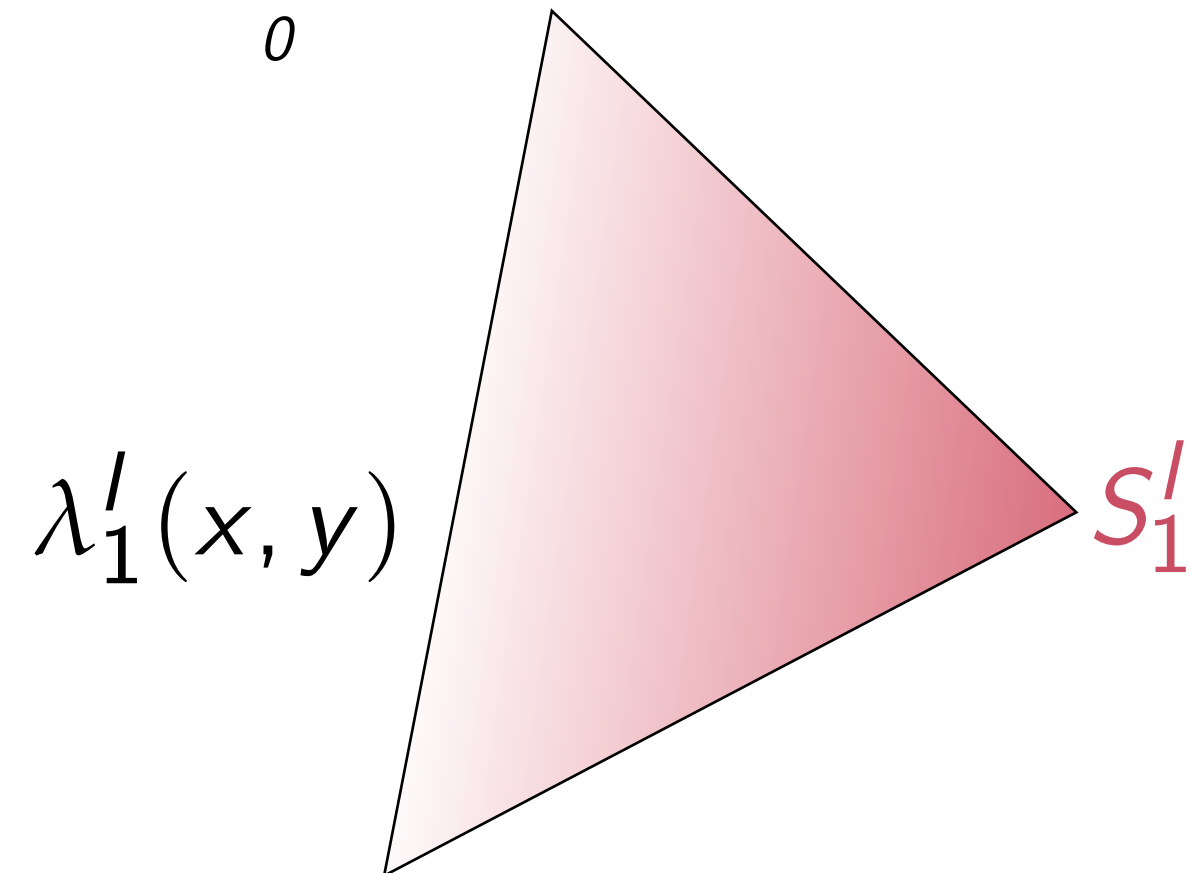
Rappel : $\forall \underline{M} \in T_I, \quad \underline{M} = \lambda_1'(\underline{M})\underline{S}_1' + \lambda_2'(\underline{M})\underline{S}_2' + \lambda_3'(\underline{M})\underline{S}_3'$
 $\lambda_1'(\underline{M}) + \lambda_2'(\underline{M}) + \lambda_3'(\underline{M}) = 1 \quad \forall i \in \{1, 2, 3\}, \quad 0 \leq \lambda_i'(\underline{M}) \leq 1$



$$\left| \begin{array}{l} x_1' \lambda_1'(x, y) + x_2' \lambda_2'(x, y) + x_3' \lambda_3'(x, y) = x \\ y_1' \lambda_1'(x, y) + y_2' \lambda_2'(x, y) + y_3' \lambda_3'(x, y) = y \\ \lambda_1'(x, y) + \lambda_2'(x, y) + \lambda_3'(x, y) = 1 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda_1'(x, y) = \frac{1}{D_I} \left[(y_2' - y_3')(x - x_3') - (x_2' - x_3')(y - y_3') \right] \\ \lambda_2'(x, y) = \frac{1}{D_I} \left[(y_3' - y_1')(x - x_1') - (x_3' - x_1')(y - y_1') \right] \\ \lambda_3'(x, y) = \frac{1}{D_I} \left[(y_1' - y_2')(x - x_2') - (x_1' - x_2')(y - y_2') \right] \end{array} \right|$$

où $D_I = (x_2' - x_3')(y_3' - y_1') - (y_2' - y_3')(x_3' - x_1')$,

Colormap



Séance 4 : la méthode des éléments finis

Méthode de Galerkin

Maillage et structure des données

Élément fini P1

Matrices élémentaires

Procédure d'assemblage et résolution

Matrice de masse

- On décompose le calcul de chaque terme de la matrice $\mathbb{M} \in \mathcal{M}_{N_s}(\mathbb{R})$ sur les triangles

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N_s \rrbracket^2, \quad \mathbb{M}^{ij} = \int_{\Omega} \phi_j(\underline{x}) \phi_i(\underline{x}) \, d\Omega = \sum_{T_I \in \mathcal{T}_h} \int_{T_I} \phi_j(\underline{x}) \phi_i(\underline{x}) \, d\Omega$$

- On est ramené à calculer des quantités contenues dans $\mathbb{M}_I^{\text{el}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\forall (\hat{i}, \hat{j}) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, \quad (\mathbb{M}_I^{\text{el}})^{\hat{i}, \hat{j}} = \int_{T_I} \lambda_{\hat{j}}^I(\underline{x}) \lambda_{\hat{i}}^I(\underline{x}) \, d\Omega$$

Lemme:

Soit $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{N}^3$, alors

$$\int_{T_I} (\lambda_1^I)^{k_1} (\lambda_2^I)^{k_2} (\lambda_3^I)^{k_3} \, d\Omega = 2 \frac{k_1! k_2! k_3!}{(k_1 + k_2 + k_3 + 2)!} |T_I|$$

- On en déduit

$$\mathbb{M}_I^{\text{el}} = \frac{|T_I|}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrice de rigidité

- On décompose le calcul de chaque terme de la matrice $\mathbb{K} \in \mathcal{M}_{N_s}(\mathbb{R})$ sur les triangles

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, N_s \rrbracket^2, \quad \mathbb{K}^{ij} = \int_{\Omega} \underline{\nabla} \phi_j(\underline{x}) \cdot \underline{\nabla} \phi_i(\underline{x}) \, d\Omega = \sum_{T_I \in \mathcal{T}_h} \int_{T_I} \underline{\nabla} \phi_j(\underline{x}) \cdot \underline{\nabla} \phi_i(\underline{x}) \, d\Omega$$

- On est donc ramené à calculer $\mathbb{K}_I^{\text{el}} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

$$\forall (\hat{i}, \hat{j}) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2, \quad (\mathbb{K}_I^{\text{el}})^{\hat{i}, \hat{j}} = \int_{T_I} \underline{\nabla} \lambda_j^I(\underline{x}) \cdot \underline{\nabla} \lambda_i^I(\underline{x}) \, d\Omega$$

où les gradients des coordonnées barycentriques sont constants

$$\underline{\nabla} \lambda_1^I(x, y) = \frac{1}{D_I} \begin{pmatrix} y_2^I - y_3^I \\ x_3^I - x_2^I \end{pmatrix} = \frac{1}{D_I} \underline{v}_1^I, \quad \underline{\nabla} \lambda_2^I(x, y) = \frac{1}{D_I} \begin{pmatrix} y_3^I - y_1^I \\ x_1^I - x_3^I \end{pmatrix} = \frac{1}{D_I} \underline{v}_2^I, \quad \underline{\nabla} \lambda_3^I(x, y) = \frac{1}{D_I} \begin{pmatrix} y_1^I - y_2^I \\ x_2^I - x_1^I \end{pmatrix} = \frac{1}{D_I} \underline{v}_3^I$$

- On en déduit

$$(\mathbb{K}_I^{\text{el}}) = \frac{\text{aire}(T_I)}{D_I^2} (\underline{v}_1^I \ \underline{v}_2^I \ \underline{v}_3^I)^{\top} (\underline{v}_1^I \ \underline{v}_2^I \ \underline{v}_3^I)$$

Remarque:

On verra la prochaine fois, une autre méthode pour calculer les matrices élémentaires, qui passe par l' « élément fini référence ».

Séance 4 : la méthode des éléments finis

Méthode de Galerkin

Maillage et structure des données

Élément fini P1

Matrices élémentaires

Procédure d'assemblage et résolution

Procédure d'assemblage

Elle est basée sur la structure des données du maillage



Coordneu

Tableau de coordonnées des sommets

$\underline{S}_1$	x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{S}_i$	x_i	y_i
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{S}_{N_s}$	x_{N_s}	y_{N_s}

Refneu

Références des sommets

1
$\vdots$
0
$\vdots$
0

tabtri

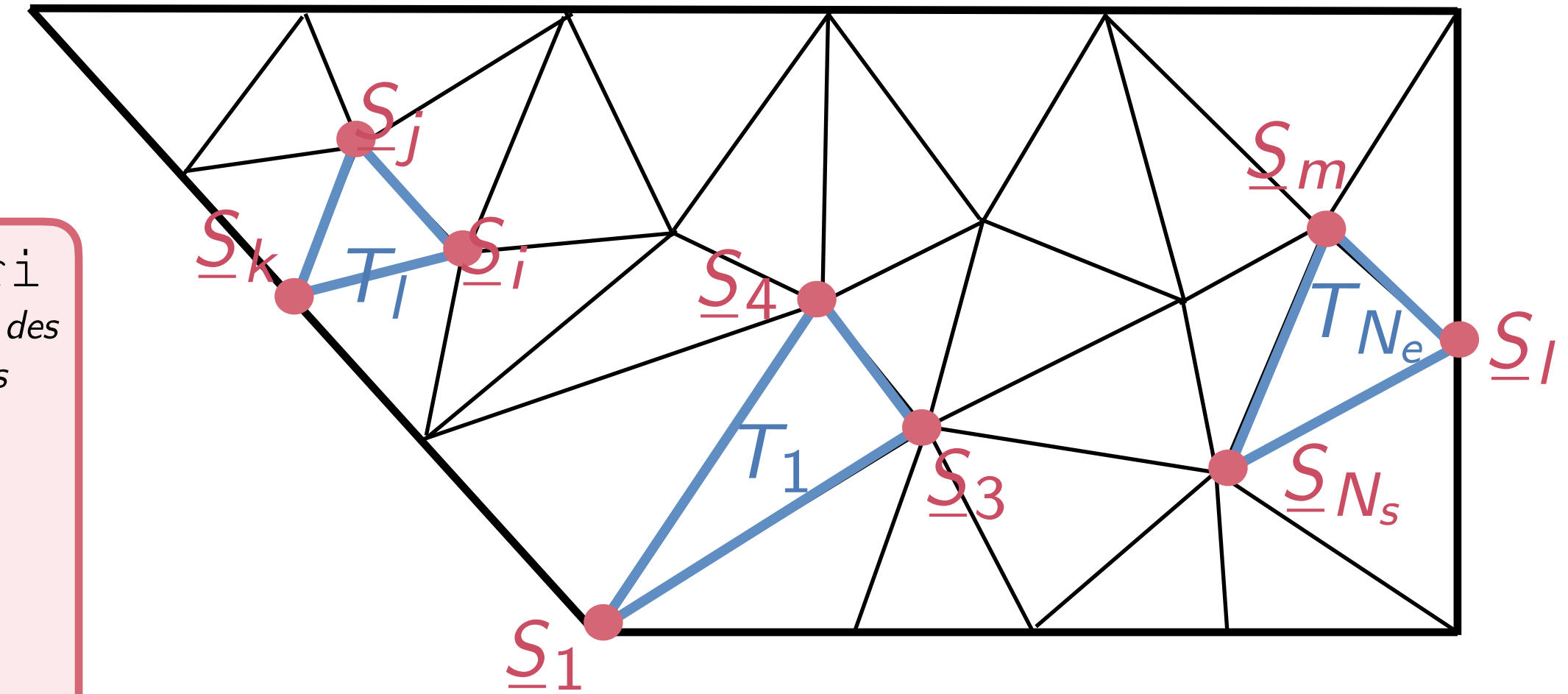
Tableau des triangles

T_1	1	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_l	i	j	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_{N_e}	l	m	N_s

Reftri

Références des triangles

1
$\vdots$
1
$\vdots$
1



N_s : Nombre de sommets

N_b : Nombre de sommets sur le bord

N_e : Nombre de triangles

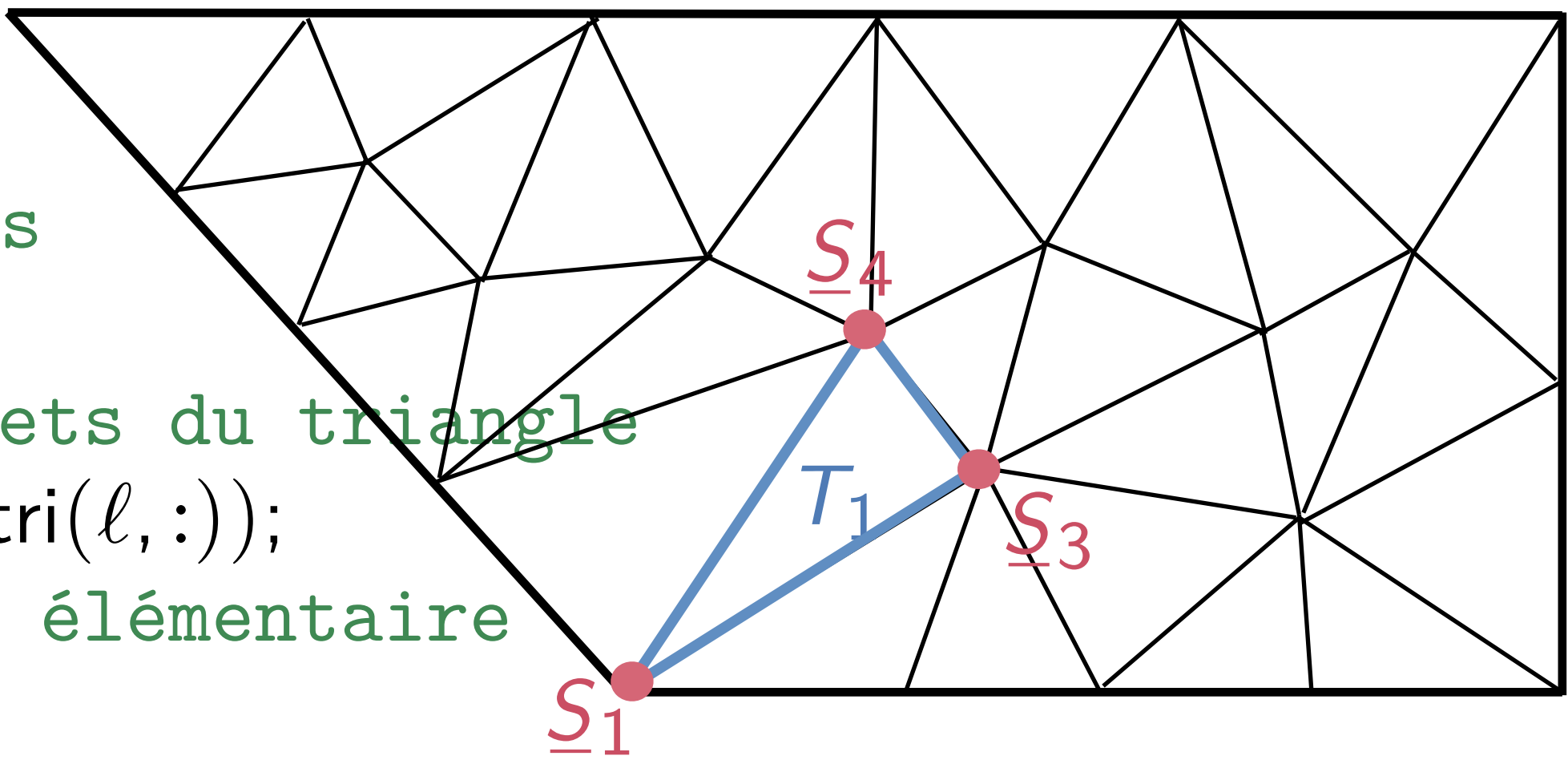
N_a : Nombre d'arêtes

et sur le fait qu'on cherche à calculer

$$u_h, v_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = \int_{\Omega} [\underline{\nabla} u_h \cdot \underline{\nabla} v_h + u_h v_h] d\Omega = \sum_{T_l} a_l(u_h, v_h)$$

$$\text{où} \quad a_l(u_h, v_h) = \int_{T_l} [\underline{\nabla} u_h \cdot \underline{\nabla} v_h + u_h v_h] d\Omega$$

Du local au global



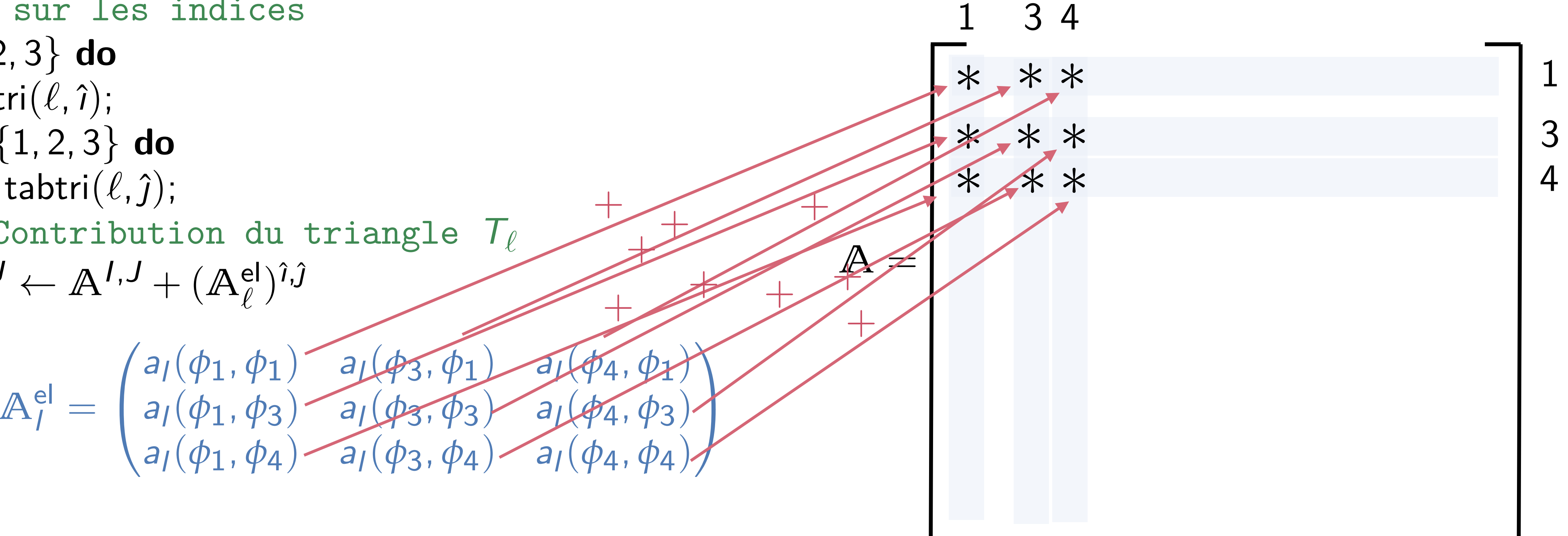
Coordneu
Tableau de coordonnées des
sommets

$\underline{S_1}$	x_1	y_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{S_i}$	x_i	y_i
$\underline{S_4}$	x_4	y_4
$\underline{S_{N_s}}$	x_{N_s}	y_{N_s}

tabtri
Tableau des triangles

T_1	1	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_l	i	j	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_{N_e}	l	m	N_s

```
 $\mathbb{A} \leftarrow 0;$   
/* Boucle sur les triangles  
for  $\ell \in \{1, \dots, N_e\}$  do  
  /* Coordonnées des sommets du triangle  
   $S_I, S_J, S_K \leftarrow \text{Coordneu}(\text{tabtri}(\ell, :));$   
  /* Calcul de la matrice élémentaire  
   $\mathbb{A}_\ell^{\text{el}} \leftarrow S_I, S_J, S_K;$   
  /* Boucle sur les indices  
  for  $\hat{i} \in \{1, 2, 3\}$  do  
     $I = \text{tabtri}(\ell, \hat{i});$   
    for  $\hat{j} \in \{1, 2, 3\}$  do  
       $J = \text{tabtri}(\ell, \hat{j});$   
      /* Contribution du triangle  $T_\ell$   
       $\mathbb{A}^{I,J} \leftarrow \mathbb{A}^{I,J} + (\mathbb{A}_\ell^{\text{el}})^{\hat{i},\hat{j}}$   
    end  
  end  
end
```



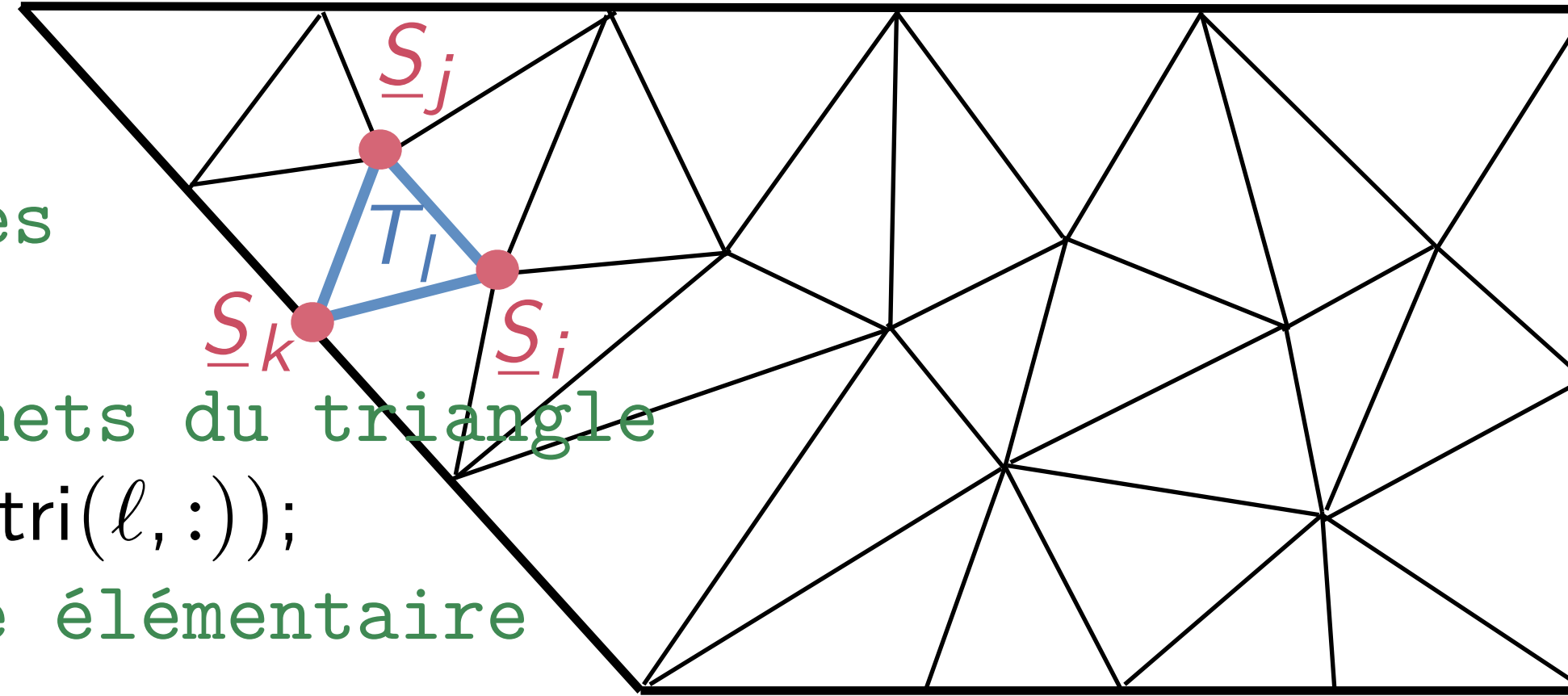
$$\mathbb{A}_l^{\text{el}} = \begin{pmatrix} a_l(\phi_1, \phi_1) & a_l(\phi_3, \phi_1) & a_l(\phi_4, \phi_1) \\ a_l(\phi_1, \phi_3) & a_l(\phi_3, \phi_3) & a_l(\phi_4, \phi_3) \\ a_l(\phi_1, \phi_4) & a_l(\phi_3, \phi_4) & a_l(\phi_4, \phi_4) \end{pmatrix}$$

Du local au global

```

 $\mathbb{A} \leftarrow 0;$ 
/* Boucle sur les triangles
for  $\ell \in \{1, \dots, N_e\}$  do
  /* Coordonnées des sommets du triangle
   $S_I, S_J, S_K \leftarrow \text{Coordneu}(\text{tabtri}(\ell, :));$ 
  /* Calcul de la matrice élémentaire
   $\mathbb{A}_\ell^{\text{el}} \leftarrow S_I, S_J, S_K;$ 
  /* Boucle sur les indices
  for  $\hat{i} \in \{1, 2, 3\}$  do
     $I = \text{tabtri}(\ell, \hat{i});$ 
    for  $\hat{j} \in \{1, 2, 3\}$  do
       $J = \text{tabtri}(\ell, \hat{j});$ 
      /* Contribution du triangle  $T_\ell$ 
       $\mathbb{A}^{I,J} \leftarrow \mathbb{A}^{I,J} + (\mathbb{A}_\ell^{\text{el}})^{\hat{i},\hat{j}}$ 
    end
  end
end
end

```



Coordneu
Tableau de coordonnées des sommets

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{S_i}$	x_i	y_i
$\underline{S_j}$	x_j	y_j
$\underline{S_k}$	x_k	y_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

tabtri
Tableau des triangles

T_1	1	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_l	i	j	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_{N_e}	l	m	N_s

$$\mathbb{A}_l^{\text{el}} = \begin{pmatrix} a_l(\phi_i, \phi_i) & a_l(\phi_j, \phi_i) & a_l(\phi_k, \phi_i) \\ a_l(\phi_i, \phi_j) & a_l(\phi_j, \phi_j) & a_l(\phi_k, \phi_j) \\ a_l(\phi_i, \phi_k) & a_l(\phi_j, \phi_k) & a_l(\phi_k, \phi_k) \end{pmatrix}$$

$\mathbb{A} =$

$$\begin{bmatrix} & i & j & k \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ i & & & \\ j & & & \\ k & & & \end{bmatrix}$$

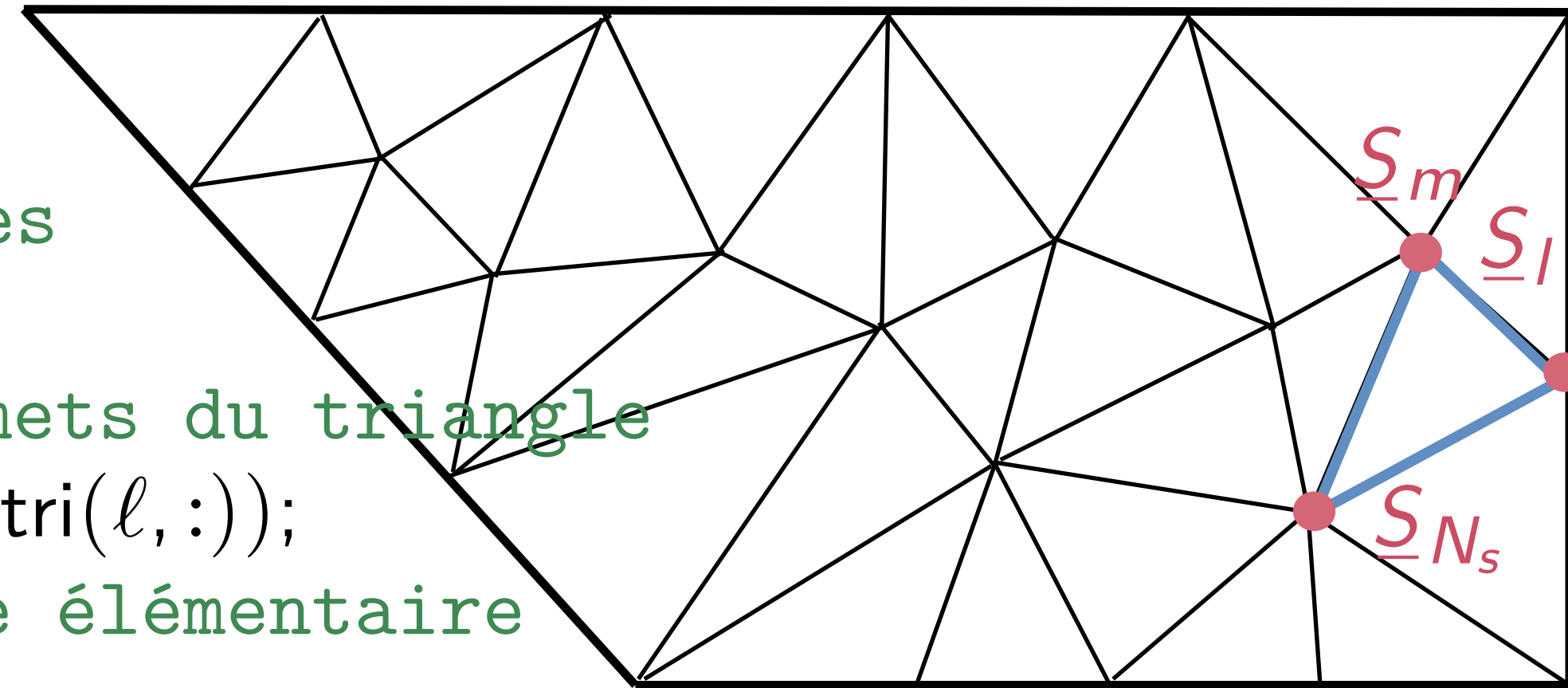
Du local au global

```

 $\mathbb{A} \leftarrow 0;$ 
/* Boucle sur les triangles
for  $\ell \in \{1, \dots, N_e\}$  do
  /* Coordonnées des sommets du triangle
   $S_I, S_J, S_K \leftarrow \text{Coordneu}(\text{tabtri}(\ell, :));$ 
  /* Calcul de la matrice élémentaire
   $\mathbb{A}_\ell^{\text{el}} \leftarrow S_I, S_J, S_K;$ 
  /* Boucle sur les indices
  for  $\hat{i} \in \{1, 2, 3\}$  do
     $I = \text{tabtri}(\ell, \hat{i});$ 
    for  $\hat{j} \in \{1, 2, 3\}$  do
       $J = \text{tabtri}(\ell, \hat{j});$ 
      /* Contribution du triangle  $T_\ell$ 
       $\mathbb{A}^{I,J} \leftarrow \mathbb{A}^{I,J} + (\mathbb{A}_\ell^{\text{el}})^{\hat{i},\hat{j}}$ 
    end
  end
end
end

```

$$\mathbb{A}_I^{\text{el}} = \begin{pmatrix} a_I(\phi_I, \phi_I) & a_I(\phi_m, \phi_I) & a_I(\phi_{N_s}, \phi_I) \\ a_I(\phi_I, \phi_m) & a_I(\phi_m, \phi_m) & a_I(\phi_{N_s}, \phi_m) \\ a_I(\phi_I, \phi_{N_s}) & a_I(\phi_m, \phi_{N_s}) & a_I(\phi_{N_s}, \phi_{N_s}) \end{pmatrix}$$



Coordneu
Tableau de coordonnées des sommets

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\underline{S}_i$	x_i	y_i
$\underline{S}_j$	x_j	y_j
$\underline{S}_k$	x_k	y_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

tabtri
Tableau des triangles

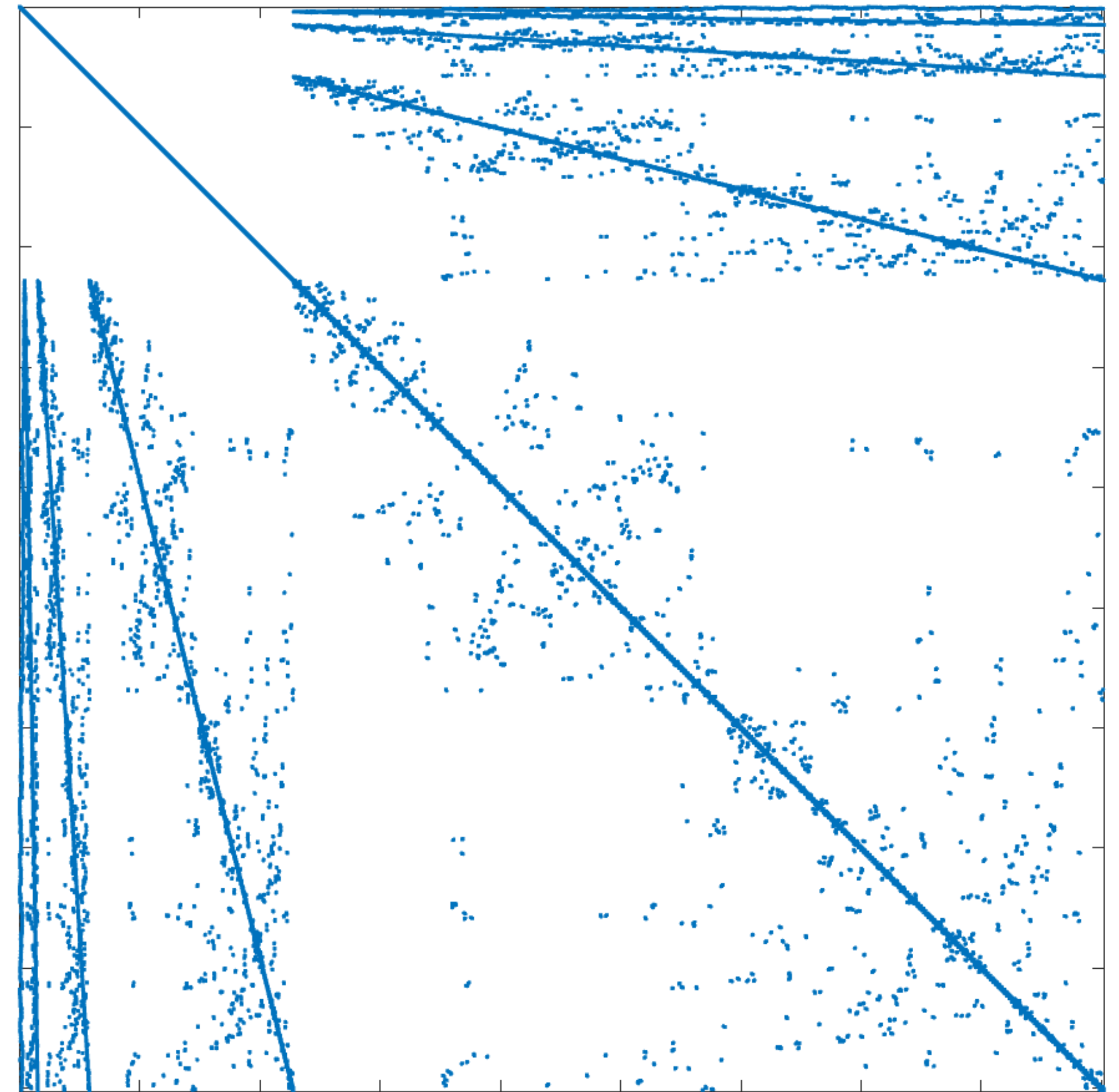
T_1	1	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_I	i	j	k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
T_{N_e}	l	m	N_s

$$\mathbb{A} = \begin{bmatrix} & m & I & N_s \\ & * & * & * \\ & * & * & * \\ & * & * & * \end{bmatrix} \begin{matrix} m \\ I \\ N_s \end{matrix}$$

Matrice creuse

● Coefficient non nul

- Memoire
 - $N = 45113$
 - Si la matrice etait stockée comme une matrice pleine (en stockant les zéros!)
16.2 GB in memory
 - Si la matrice est stockée comme une matrice creuse
5.3 MB
- Le squelette de la matrice peut en fait être construit *a priori*



Calcul du second membre

- On peut approcher f par interpolation si $f \in C^0(\bar{\Omega})$

$$f \simeq f_h = \sum_{1 \leq j \leq N} f(\underline{S}_j) \phi_j$$

et dans ce cas, on approche le second membre de la façon suivante

$$\ell^i = \int_{\Omega} f \phi_i d\Omega \approx \sum_{1 \leq j \leq N_s} f(\underline{S}_j) \int_{\Omega} \phi_j \phi_i d\Omega = \ell_h^i \quad \text{avec} \quad \vec{\ell}_h = \mathbb{M}_h \vec{f}_h$$

- Cela revient à résoudre une formulation variationnelle discrète approchée

Trouver $\tilde{u}_h \in V_h$ tel que $a(\tilde{u}_h, v_h) = \ell_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h$

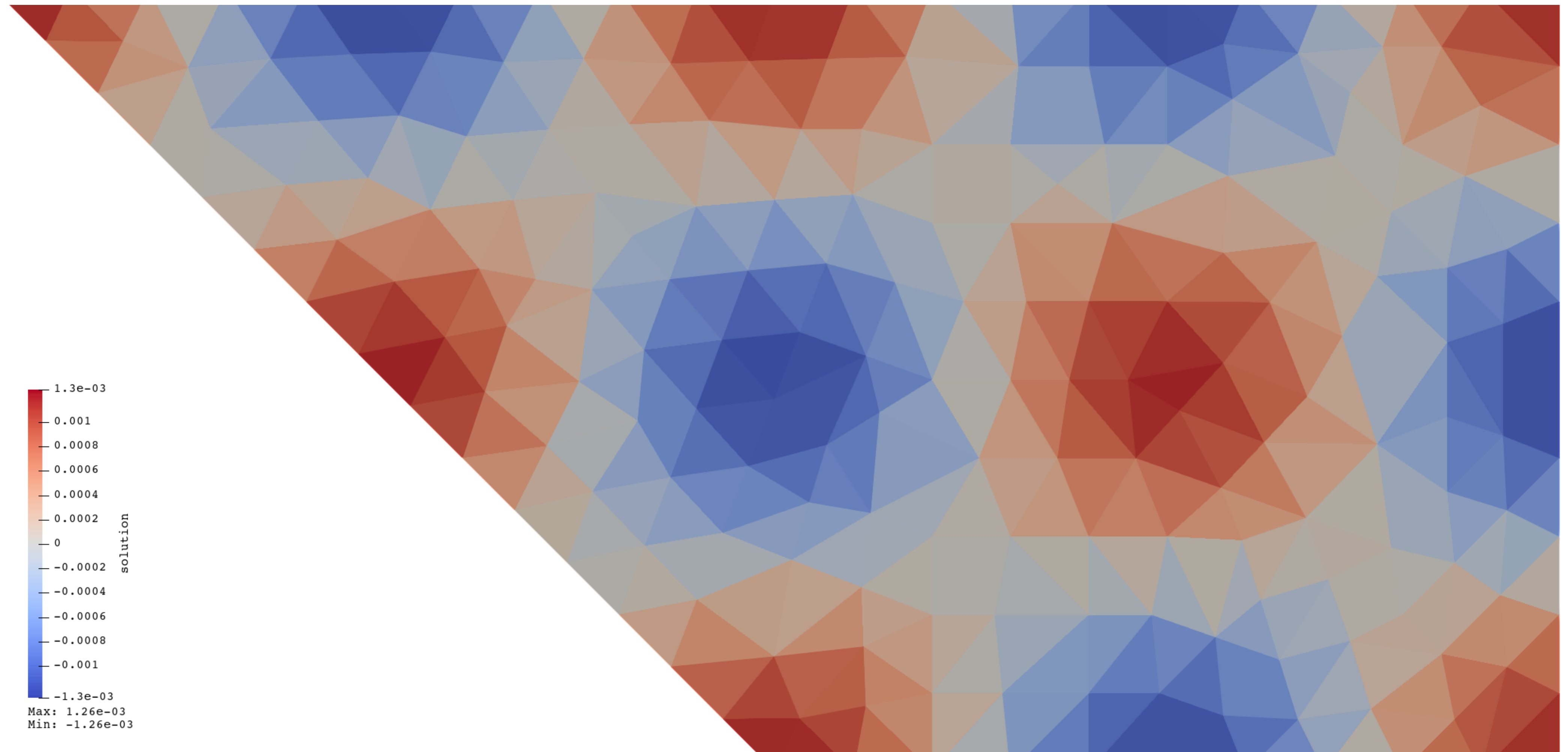
$$\text{où} \quad \forall v \in \mathcal{V}_h, \quad \ell_h(v) = \int_{\Omega} f_h(\underline{x}) v(\underline{x}) d\Omega$$

On verra que l'approximation de la méthode n'est pas altérée par une telle approximation.

 voir Amphi 6

Illustration numérique pour des maillages de plus en plus raffinés

- On considère $f : (x, y) \mapsto \cos(2\pi x)\cos(2\pi y)$



Prochaine Séance : La méthode des éléments finis (suite)

Le TP1 est à faire seul. Restez dans votre groupe de TP.

Sans aide extérieure.

Il n'est pas obligatoire de rendre le TP mais c'est recommandé.

TP à envoyer à votre chargé.e de TD.

Bonus de max 3 points sur la note de TP.