
Introduction à la méthode des Éléments Finis.

Sonia Fliss, bureau 2.2.21 UMA

Chargés de TDs : Marc Bakry (CEA), Eliane Bécache (Inria, UMA),
Marcella Bonazzoli (UMA), Xavier Claeys (UMA),
Benjamin Graille (Orsay), Erell Jamelot (CEA), Pierre Marchand (UMA),
Edouard Meddouri-Bernard (UMA), Zoïs Moitier (UMA)

Séance 3: Analyse des formulations variationnelles

1. Théorème de Lax Milgram

- 2. Applications du Théorème de Lax Milgram sur quelques problèmes modèles
- 3. Application au Laplacien avec conditions de Dirichlet - Inégalités de Poincaré
- 4. Application au Laplacien avec conditions de Neumann
- 5. Lien entre F.V. et minimisation d'une fonctionnelle énergie

Théorème de Lax Milgram

On s'intéresse au problème suivant

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ telle que } a(\mathbf{u}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \quad (\text{F.V.})$$

où on suppose que:

- $(V, \|\cdot\|_V)$ est un **espace de Hilbert**
- a est une forme **bilinéaire** de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ qui est

- **continue**, c'est à dire

$$\exists M_a > 0, \quad \forall v, w \in V, \quad |a(v, w)| \leq M_a \|v\|_V \|w\|_V$$

- **coercive**, c'est à dire

$$\exists \alpha > 0, \quad \forall v \in V, \quad a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$$

- ℓ est une forme linéaire de V dans $\mathbb{R}$ qui est **continue**, c'est à dire

$$\exists M_\ell > 0, \quad \forall v \in V, \quad |\ell(v)| \leq M_\ell \|v\|_V$$

Alors il existe une unique solution $\mathbf{u}$ dans V de (F.V.),
et cette solution dépend continûment des données, c'est à dire

$$\|\mathbf{u}\|_V \leq \frac{M_\ell}{\alpha}$$

Preuve du théorème de Lax Milgram

Etape 1 : Ecriture de (F.V.) sous la forme « opérateur »

Rappel (Théorème de représentation de Riesz, voir Cours 1 ou Chapitre 2)

Soit $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur un espace de Hilbert V qui est **continue**, c'est à dire $\exists C > 0, \forall v \in V, |\ell(v)| \leq C \|v\|_V$
alors il existe un unique $F \in V$ (appelé représentant de Riesz) tel que $\forall v \in V, \ell(v) = (F, v)_V$

- L'application $v \mapsto \ell(v)$ est une forme linéaire continue sur V , donc

il existe $F \in V$ tel que $\forall v \in V, \ell(v) = (F, v)_V$.

- Pour tout w dans V , l'application $a_w : v \mapsto a(w, v)$ est une forme linéaire continue sur V , donc il existe un élément de V noté $A(w)$ tel que

$$\forall v \in V, a_w(v) \equiv a(w, v) = (A(w), v)_V$$

La **bilinéarité** de a entraîne la **linéarité** de $A : w \mapsto A(w)$  *A faire en exercice*

La **continuité** de a entraîne la **continuité** de $A : w \mapsto A(w)$

$$\forall w \in V, \|A(w)\|_V^2 = (A(w), A(w))_V = \underset{\text{Définition de } A}{a(w, A(w))} \leq \underset{\text{Continuité de } a}{M_a \|w\|_V \|A(w)\|_V} \Rightarrow \forall w \in V, \|A(w)\|_V \leq M_a \|w\|_V$$

Le problème variationnel (F.V.) se réécrit :

Trouver $u \in V$ telle que $A(u) = F$

Preuve du théorème de Lax Milgram

Trouver $u \in V$ telle que $A(u) = F$

Etape 2 : Preuve de la bijectivité de A

Pour démontrer le théorème, il faut donc montrer que A est **bijectif** de V dans V (ce qui implique l'existence et l'unicité de u).

- L'**injectivité** de A (et donc l'unicité de u) est une conséquence directe de la **coercivité** de a

$$\forall w \in V, \quad \underbrace{\alpha \|w\|_V^2}_{\text{Coercivité de } a} \leq \underbrace{a(w, w)}_{\text{Définition de } A} = (A(w), w)_V \leq \|A(w)\|_V \|w\|_V \Rightarrow \forall w \in V, \quad \|A(w)\|_V \geq \alpha \|w\|_V \quad \star$$

- La **surjectivité** de A (et donc l'existence de u) est plus délicate à prouver

1) On montre tout d'abord que $\text{Im } A$ est un sous espace **fermé** de V .

Soit $(A(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de $\text{Im } A$ qui converge vers $b \in V$. Montrons que $b \in \text{Im } A$.

D'après $\star$, $\alpha \|w_n - w_p\|_V \leq \|A(w_n) - A(w_p)\|_V \rightarrow 0$ quand $n, p \rightarrow +\infty$ car $(A(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Donc $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de V , comme V est complet, cette suite converge vers $w \in V$.

Par continuité de A , $(A(w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $A(w)$ et donc $A(w)=b$ soit $b \in \text{Im } A$.

2) On montre enfin que $\text{Im } A = V$.

Comme V est un espace de Hilbert et $\text{Im } A$ est fermé alors $V = \text{Im } A \oplus (\text{Im } A)^\perp$  voir Proposition 3.2.5

Soit $v \in (\text{Im } A)^\perp$, la coercivité de a implique que $\alpha \|v\|_V^2 \leq a(v, v) = (A(v), v)_V = 0 \Rightarrow v = 0$

$\Rightarrow \text{Im } A = V$ 5 / 23

Preuve du théorème de Lax Milgram

Trouver $u \in V$ telle que $A(u) = F$

Etape 2 : autre démonstration basée sur le théorème de point fixe de Picard.

Soit T une application linéaire sur un espace de Hilbert V qui est **contractante** alors T a un unique point fixe, c'est à dire un unique $u \in V$ tel que $T(u)=u$.

Preuve du théorème du point fixe de Picard.

En effet, soit une suite définie par $u_{k+1} = T(u_k)$, comme T est contractante cette suite est de Cauchy et comme V est un espace de Hilbert, elle converge vers une fonction u et $T(u)=u$ car T est continue.

Application à notre problème.

On montre que l'application $T: w \mapsto w - \rho(A(w) - f)$ avec $0 < \rho < \frac{2\alpha}{M^2}$ est **contractante**. En effet, on a

$$\begin{aligned} \|T(v) - T(w)\|_V^2 &= \|v - w - \rho A(v - w)\|_V^2 \\ &= \|v - w\|_V^2 - 2\rho a(v - w, v - w) + \rho^2 \|A(v - w)\|_V^2 \\ &\leq (1 - 2\rho\alpha + \rho^2 M_a^2) \|v - w\|_V^2 \quad \text{par coercivité de } a \text{ et continuité de } A. \\ &< \beta \|v - w\|_V^2 \quad \text{avec } 0 < \beta < 1 \end{aligned}$$

Il existe alors une unique solution dans V de $T(u)=u$ (c'est à dire de $A(u)=f$)

Preuve du théorème de Lax Milgram

Trouver $u \in V$ telle que $A(u) = F$

Etape 3 : stabilité

On vient de démontrer qu'il existe une unique solution de

Trouver $u \in V$ telle que $a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V$ (F.V.)

On a en particulier pour $v=u$:

$$\begin{array}{ccc} \alpha \|u\|_V^2 \leq & a(u, u) = \ell(u) & \leq M_\ell \|u\|_V \\ \downarrow & & \downarrow \\ a \text{ est coercive} & & \ell \text{ est continue} \end{array}$$

Et si $\ell \neq 0$ alors $u \neq 0$ et on en déduit que

$$\|u\|_V \leq \frac{M_\ell}{\alpha}$$

Quelques remarques sur la coercivité

a est une forme **bilinéaire** de $V \times V$ dans $\mathbb{R}$ qui est **coercive**, si $\exists \alpha > 0, \forall v \in V, a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2$

- L'hypothèse “ a coercive” ne peut pas être remplacée par a définie positive ~~$\forall v \in V \setminus \{0\}, a(v, v) > 0$~~
 Voir le TD3-Exo1.
- Si $\forall v \in V \setminus \{0\}, a(v, v) < 0$ alors il faut prouver la coercivité sur $-a$.
- Si $\exists v \in V \setminus \{0\}, a(v, v) = 0$ ou si $\exists v_n \in V \setminus \{0\}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a(v_n, v_n)}{\|v_n\|_V^2} = 0$
alors a n'est pas coercive dans $V \times V$.

Séance 3: Analyse des formulations variationnelles

1. Théorème de Lax Milgram

2. Applications du Théorème de Lax Milgram sur quelques problèmes modèles

3. Application au Laplacien avec conditions de Dirichlet - Inégalités de Poincaré

4. Application au Laplacien avec conditions de Neumann

5. Lien entre F.V. et minimisation d'une fonctionnelle énergie

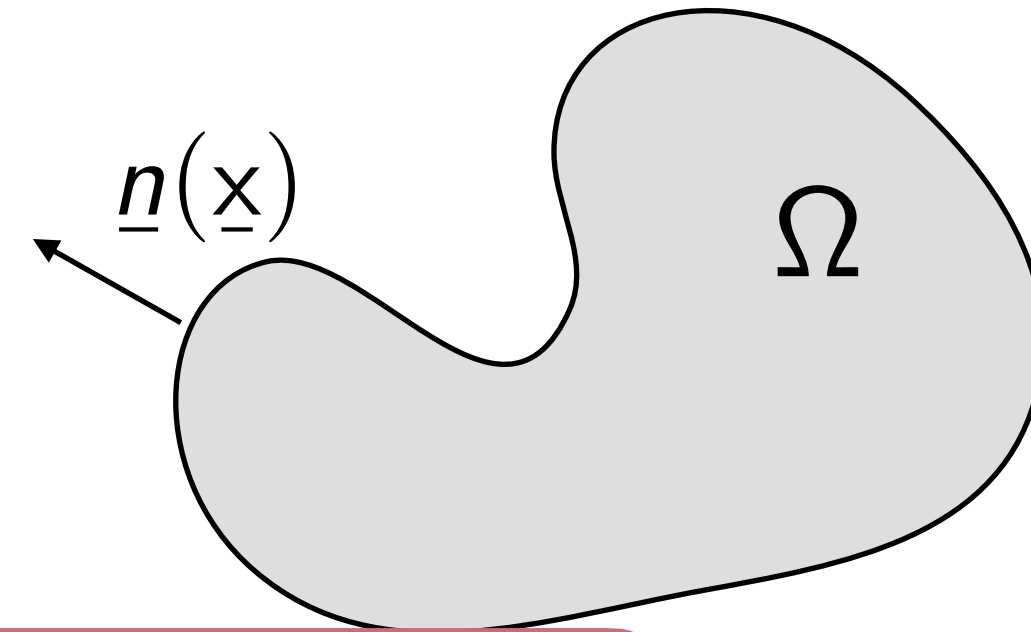
Problème modèle avec conditions de type Robin

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, $\lambda \geq 0$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} + \lambda u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\Updownarrow$



On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

$\downarrow$ (from $H^1(\Omega)$) $V = H^1(\Omega)$
 $\downarrow$ (from $\int_{\Omega} u v \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$) $a(u, v)$
 $\downarrow$ (from $\int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$) $\ell(v)$

- $V = H^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.

$$(w, v)_{H^1(\Omega)} = (w, v)_{L^2(\Omega)} + (\underline{\nabla} w, \underline{\nabla} v)_{L^2(\Omega)}$$

$$\|w\|_{H^1} = [(w, w)_{H^1(\Omega)}]^{1/2}$$

- a est une forme **bilinéaire** de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ qui est **continue** : (preuve au tableau)

Continuité de l'application trace : $\exists C_0 > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$

Problème modèle avec conditions de type Robin

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$, $\lambda \geq 0$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega + \lambda \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

$\downarrow$ $V = H^1(\Omega)$ $\downarrow$ $a(u, v)$ $\downarrow$ $\ell(v)$

- $V = H^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.
- a est une forme **bilinéaire** de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ qui est **continue** et **coercive** : *(preuve au tableau)*

 **Remarque:** pour $\lambda < 0$...

Continuité de l'application trace : $\exists C_0 > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$

- ℓ est une forme linéaire de $H^1(\Omega)$ qui est **continue** *(preuve au tableau)*

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe donc une unique solution u dans $H^1(\Omega)$ de ce problème et

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} + C_0 \|g\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

Problème de Dirichlet homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de $\forall v \in H_0^1(\Omega),$

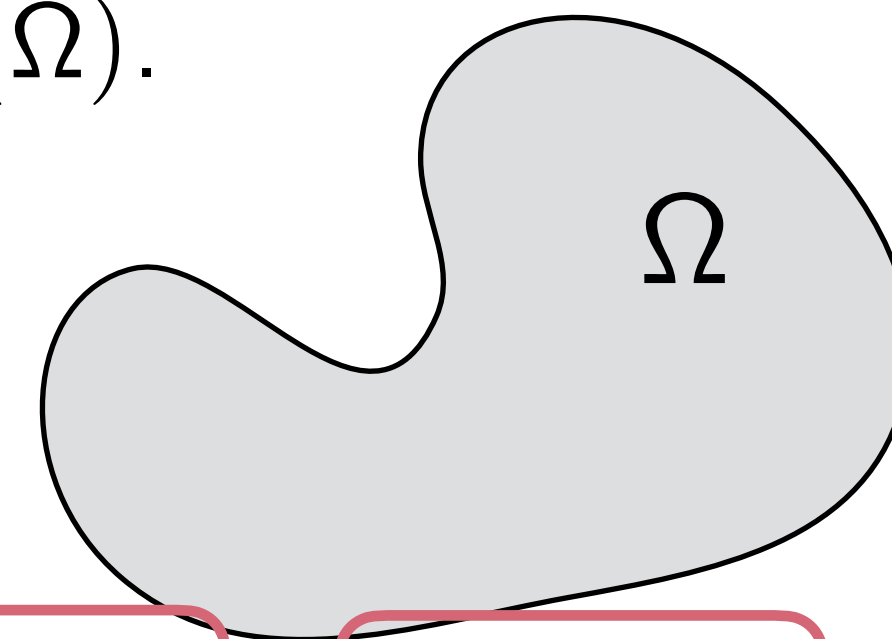
$\Downarrow$

$V = H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$

$a(u, v) \qquad \qquad \ell(v)$



- $V = H_0^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert, en tant que sous espace fermé de $H^1(\Omega)$
- a est une forme **bilinéaire** de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ qui est **continue** : *(preuve au tableau)*

et **coercive** : *(preuve au tableau)*

- ℓ est une forme linéaire de $H_0^1(\Omega)$ qui est **continue** *(preuve au tableau)*

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe donc une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$ de ce problème et

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

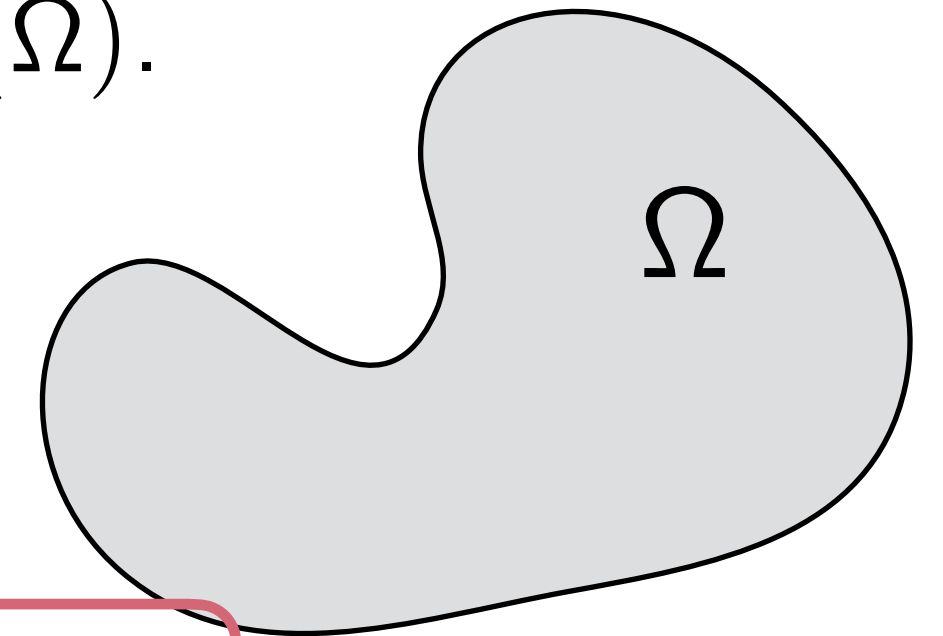
Séance 3: Analyse des formulations variationnelles

1. Théorème de Lax Milgram
2. Applications du Théorème de Lax Milgram sur quelques problèmes modèles
- 3. Application au Laplacien avec conditions de Dirichlet - Inégalités de Poincaré**
4. Application au Laplacien avec conditions de Neumann
5. Lien entre F.V. et minimisation d'une fonctionnelle énergie

Le laplacien avec conditions de Dirichlet

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
 



On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de $\forall v \in H_0^1(\Omega),$

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$a(u, v)$ $\ell(v)$

$V = H_0^1(\Omega)$

- $V = H_0^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert, en tant que sous espace fermé de $H^1(\Omega)$
- a est une forme **bilinéaire** de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ qui est **continue** : (preuve au tableau)

Est elle **coercive** ? $\exists \alpha > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), a(v, v) = \int_{\Omega} |\underline{\nabla} v|^2 \, d\Omega \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$

$$\int_{\Omega} [|\underline{\nabla} v|^2 + v^2] \, d\Omega$$

C'est beaucoup moins évident d'établir une telle inégalité que précédemment...

Pensez à v la fonction constante!

*Comme on cherche cette inégalité dans $H_0^1(\Omega)$, on va s'en sortir grâce à l'**inégalité de Poincaré**!*

Inégalité de Poincaré

Théorème

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**.

$$\exists C_p > 0, \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} v^2 d\Omega \leq C_p \int_{\Omega} |\nabla v|^2 d\Omega$$

Idées de la preuve • on le prouve pour $v \in D(\Omega)$ puis on conclut par densité de $D(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Pour $v \in D(\Omega)$, on prouve l'inégalité en 1D puis on raisonne par cartes locales.  Voir le TD3-Exo2.

• par l'absurde et en utilisant le théorème de Rellich (hors programme)  Voir le TD3-Exo5.

 **Remarque:** Une telle inégalité est fausse dès que v est une constante non nulle!

En fait elle est vraie dans tous les espaces dans lesquels **la seule fonction constante existante est la constante nulle**: $\{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma} = 0\}$ où Γ est une partie de $\partial\Omega$

$$\{v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v = 0\} \quad \{v \in H^1(\Omega), \int_{\mathcal{O}} v = 0\} \quad \text{où } \mathcal{O} \subset \Omega$$

Corollaire

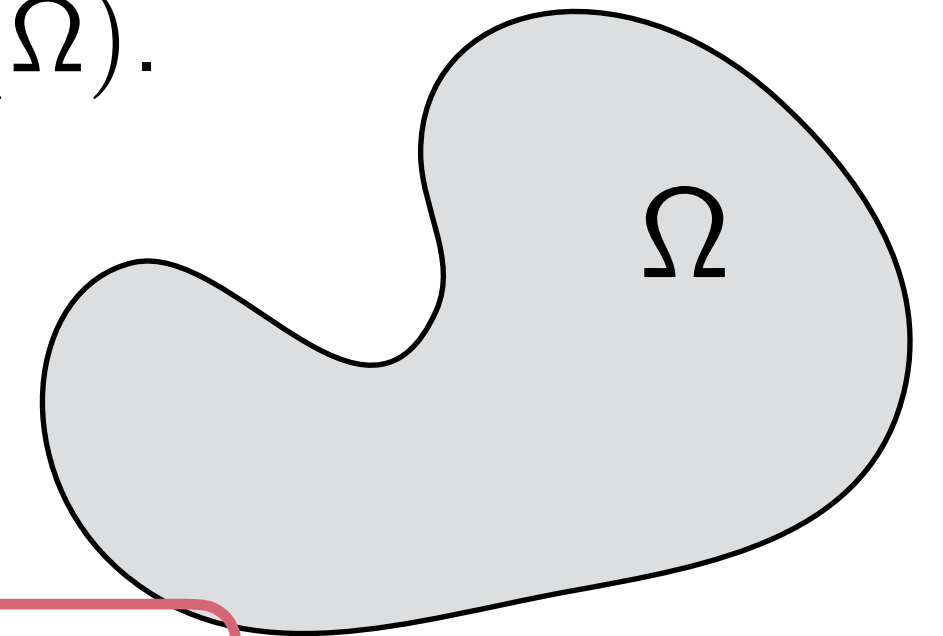
 Voir le TD3-Exo2.

Dans $H_0^1(\Omega)$, la semi-norme $|\cdot|_{H^1} := \|\nabla \cdot\|_{L^2}$ est une norme, équivalente à $\|\cdot\|_{H^1} := [\|\cdot\|_{L^2}^2 + \|\nabla \cdot\|_{L^2}^2]^{1/2}$

Le laplacian avec conditions de Dirichlet

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
 



On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de $\forall v \in H_0^1(\Omega),$

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$\downarrow$ $a(u, v)$ $\downarrow$ $\ell(v)$

$V = H_0^1(\Omega)$

- $V = H_0^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert, en tant que sous espace fermé de $H^1(\Omega)$
- a est une forme **bilinéaire** de $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ qui est **continue** et **coercive**

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} [|\underline{\nabla} v|^2 + v^2] \, d\Omega \leq (1 + C_p) \int_{\Omega} |\underline{\nabla} v|^2 \, d\Omega$$

$$\Leftrightarrow \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad a(v, v) = \int_{\Omega} |\underline{\nabla} v|^2 \, d\Omega \geq \frac{1}{1 + C_p} \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$$

- ℓ est une forme linéaire de $H_0^1(\Omega)$ qui est **continue** (*même preuve que précédemment*)

D'après le théorème de Lax-Milgram, il existe donc une unique solution u dans $H_0^1(\Omega)$ de ce problème et

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq (1 + C_p) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Séance 3: Analyse des formulations variationnelles

1. Théorème de Lax Milgram
2. Applications du Théorème de Lax Milgram sur quelques problèmes modèles
3. Application au Laplacien avec conditions de Dirichlet - Inégalités de Poincaré
- 4. Application au Laplacien avec conditions de Neumann**
5. Lien entre F.V. et minimisation d'une fonctionnelle énergie

Le laplacien avec conditions de Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
 



On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

$a(u, v)$ $\ell(v)$

- $V = H^1(\Omega)$ muni de $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ est un espace de Hilbert.
- a est une forme **bilinéaire** de $H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ qui est **continue** : (même preuve que précédemment)
- ℓ est une forme linéaire de $H^1(\Omega)$ qui est **continue** (même preuve que précédemment)

Est ce que a est **coercive** ? $\exists \alpha > 0, \forall v \in H^1(\Omega), a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, d\Omega \geq \alpha \|v\|_{H^1(\Omega)}^2$

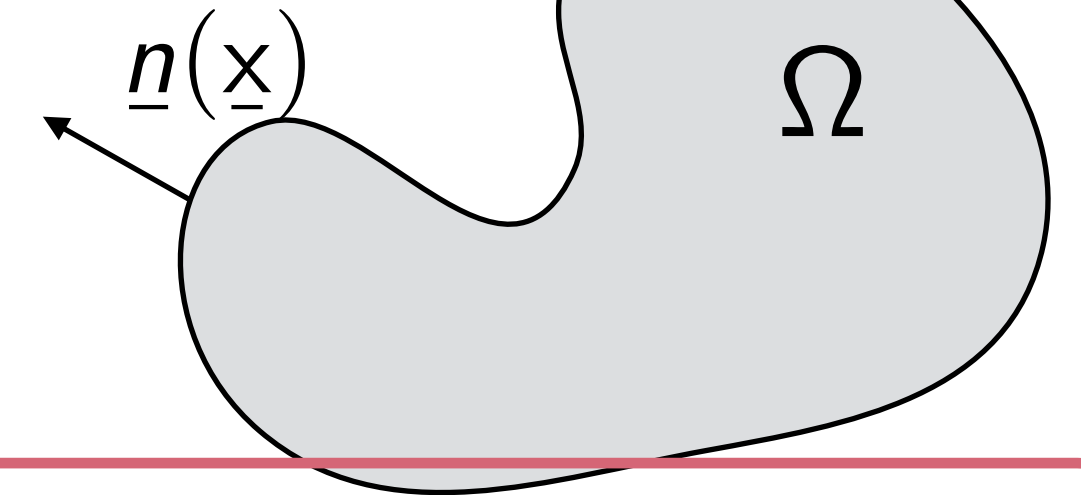
La réponse est **NON** : une telle inégalité ne peut être vérifiée pour v constante.

 Voir le TD3-Exo4.

Le laplacien avec conditions de Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de $\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$ 



On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de $\forall v \in H^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma \quad (F.V.)$$

$a(u, v)$ $\ell(v)$

- Il n'y a pas unicité de la solution dans $H^1(\Omega)$

Supposons qu'il existe une solution u alors $u +$ toute fonction constante est également solution!

- Il n'y a pas nécessairement solution!

Si il existe une solution u dans $H^1(\Omega)$ alors en prenant $v=1$ dans la (F.V.) on trouve

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, d\Gamma = 0$$

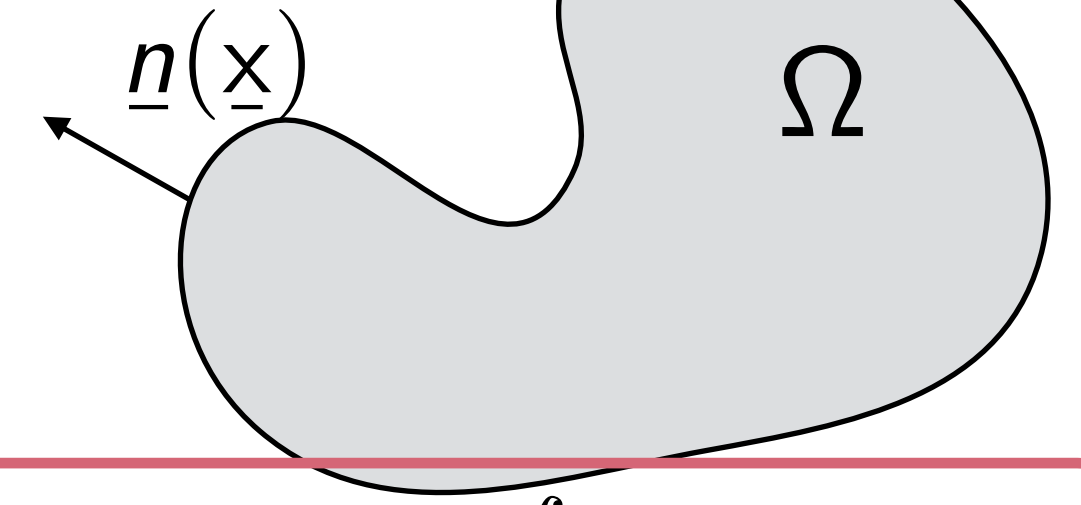
Si cette condition sur f et g n'est pas vérifiée, il ne peut pas exister de solution!

 Voir le TD3-Exo4.

Le laplacien avec conditions de Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
 



On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de $\forall v \in H^1(\Omega),$
$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma \quad (F.V.)$$

$\downarrow$ $a(u, v)$ $\downarrow$ $\ell(v)$

- Ce problème n'est pas bien posé dans $H^1(\Omega)$

- Si $\int_{\Omega} f \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g \, d\Gamma = 0$ et si on cherche u dans $V := \{v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} v \, d\Omega = 0\}$

on montre que le problème : On cherche $u \in V$ solution de $\forall v \in V,$

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

est **bien posé** et il est équivalent à

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \int_{\Omega} u \, d\Omega = 0 \\ \nabla u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

 Voir le TD3-Exo4.

Séance 3: Analyse des formulations variationnelles

1. Théorème de Lax Milgram
2. Applications du Théorème de Lax Milgram sur quelques problèmes modèles
3. Application au Laplacien avec conditions de Dirichlet - Inégalités de Poincaré
4. Application au Laplacien avec conditions de Neumann
5. Lien entre F.V. et minimisation d'une fonctionnelle énergie

Lien avec la minimisation d'une fonctionnelle Energie

Soit la formulation variationnelle suivante

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in V \text{ telle que } a(\mathbf{u}, v) = \ell(v), \quad \forall v \in V \quad (\text{F.V.})$$

On suppose les hypothèses du théorème de Lax-Milgram vérifiées. On suppose de plus que a est symétrique :

$$\forall v, w \in V, \quad a(v, w) = a(w, v)$$

Théorème

Sous les hypothèses ci-dessus :

u solution de (F.V)

$\Leftrightarrow$

$\mathbf{u}$ minimum de $\mathcal{E}$

$$\mathcal{E}(\mathbf{u}) = \min_{v \in V} \mathcal{E}(v)$$

où $\mathcal{E}(v) : V \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonctionnelle Energie
$$v \mapsto \frac{1}{2}a(v, v) - \ell(v)$$



Remarques:

- C'est le principe de la moindre quantité d'action pour la mécanique (1744)
- C'est souvent en partant d'un problème de minimisation d'une certaine énergie, que la F.V. puis que (EDP) + (C.L) sont construites.

 voir le chapitre 1

Lien avec la minimisation d'une fonctionnelle Energie

Preuve : $\mathcal{E}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathcal{E}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \frac{1}{2} a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) + \ell(\mathbf{u})$

$$= \boxed{\frac{1}{2} (a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a(\mathbf{v}, \mathbf{u}))} + \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v})$$

car a est symétrique

$$= \boxed{a(\mathbf{u}, \mathbf{v})} + \frac{1}{2} \boxed{a(\mathbf{v}, \mathbf{v})} - \ell(\mathbf{v})$$

car a est continue $a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq M_a \|\mathbf{v}\|_V^2$

$$= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v}) + \boxed{o(\|\mathbf{v}\|_V)}$$

$$= d\mathcal{E}(\mathbf{u})(\mathbf{v}) + o(\|\mathbf{v}\|_V) \quad \text{avec } \forall \mathbf{v} \in V, \quad d\mathcal{E}(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v})$$

$\mathbf{u}$ solution de (F.V.) $\Rightarrow \forall \mathbf{v} \in V, \quad \mathcal{E}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathcal{E}(\mathbf{u}) = \underbrace{a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \ell(\mathbf{v})}_{=0} + \frac{1}{2} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \frac{\alpha}{2} \|\mathbf{v}\|_V^2$

car a est coercive

$\Rightarrow \mathbf{u}$ minimum (strict) de $\mathcal{E}$

$\mathbf{u}$ minimum de $\mathcal{E} \Rightarrow \forall \mathbf{v} \in V, \quad d\mathcal{E}(\mathbf{u})(\mathbf{v}) = 0 \quad \text{car } \mathcal{E} \text{ est différentiable.}$

$\Rightarrow \mathbf{u}$ solution de (F.V.)

Prochaine Séance : La méthode des éléments finis

Apporter votre ordinateur portable la semaine prochaine.

Merci de suivre les indications d'installation que vous allez recevoir par mail.