
Introduction à la méthode des Éléments Finis.

Sonia Fliss, bureau 2.2.21 UMA

Chargés de TDs : Marc Bakry (CEA), Eliane Bécache (Inria, UMA),
Marcella Bonazzoli (UMA), Xavier Claeys (UMA),
Benjamin Graille (Orsay), Erell Jamelot (CEA), Pierre Marchand (UMA),
Edouard Meddouri-Bernard (UMA), Zoïs Moitier (UMA)

Théorème

L'application trace par $\gamma_0 : C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\partial\Omega) = \{f \text{ mes. sur } \partial\Omega \text{ t.q. } \int_{\partial\Omega} |f|^2 d\Gamma < +\infty\}$

$$v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

est bien définie et vérifie

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$



voir le TD1- Exo4 pour la preuve dans un cas particulier.

Comme $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, on peut appliquer le théorème de prolongement par continuité :

L'application trace se prolonge par continuité en $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ et vérifie

$$v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Remarque 1 : On peut définir de la même façon l'application trace $v \mapsto v|_\Gamma$ sur un bout du bord $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Remarque 2 : L'inégalité est fausse quand on remplace $H^1(\Omega)$ par $L^2(\Omega)$ car

$$\exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^\infty(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}, \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \|v_n\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On ne peut pas parler de la trace d'une fonction de $L^2(\Omega)$ qui n'est pas dans $H^1(\Omega)$!

Premier théorème de trace

Théorème

L'application trace se prolonge par continuité en $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ et vérifie

$$v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

L'application trace n'est pas surjective!

L'image de l'application trace, $\text{Im}\gamma_0$, est un sous espace strict de $L^2(\partial\Omega)$ qui est **dense** dans $L^2(\partial\Omega)$.

Cet espace sera noté en général dans le cours $\text{Im}\gamma_0$. Il est souvent noté dans la littérature $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

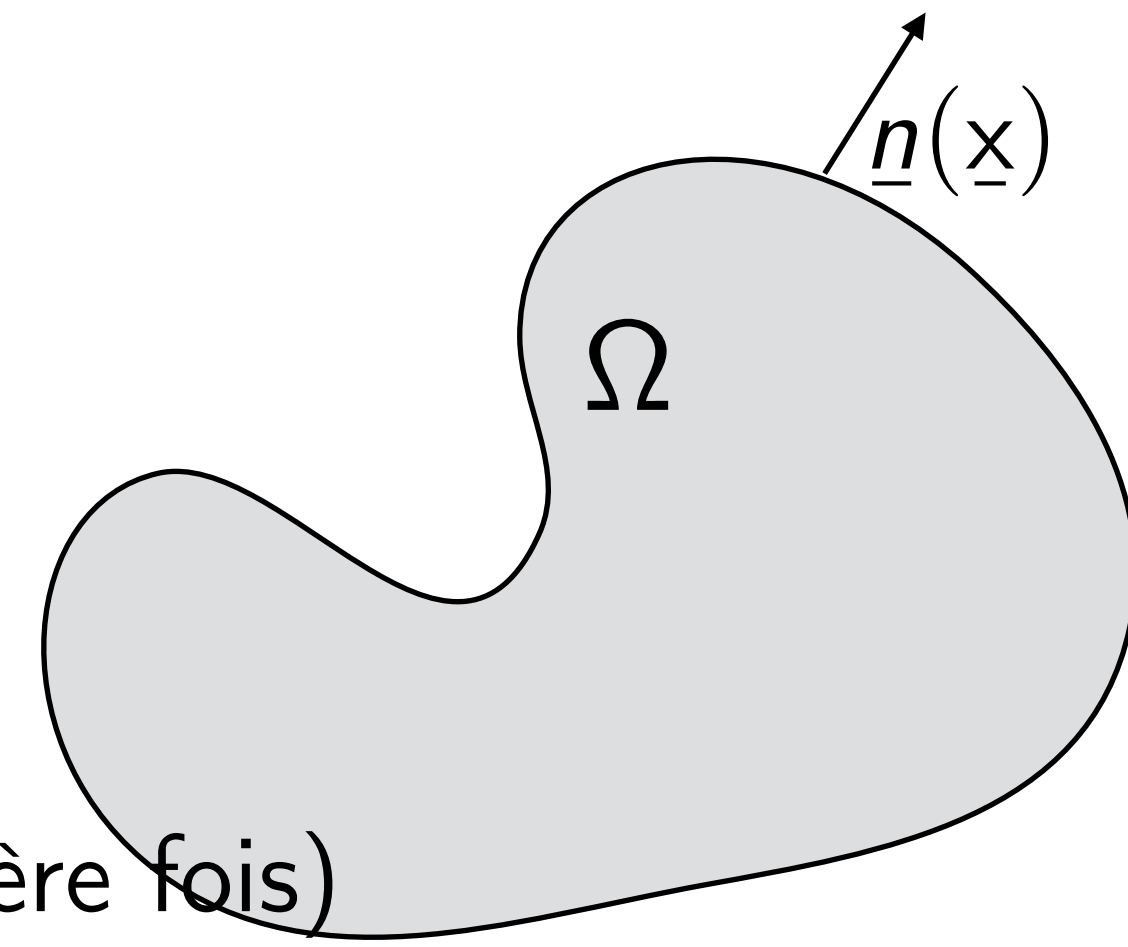
L'application trace n'est pas injective!

Le noyau de l'application trace est $H_0^1(\Omega)$. Autrement dit, $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$

Généralisation de la première formule de Green

Peut on étendre aux fonctions de $H^1(\Omega)$ la formule de Green

$$\forall w \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$



- L'application $w \mapsto \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega$ s'étend aux fonctions de $H^1(\Omega)$ (preuve la dernière fois)

- L'application $w \mapsto \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma$ s'étend aussi aux fonctions de $H^1(\Omega)$ puisque

$$\forall w \in C^\infty(\bar{\Omega}), \quad \left| \int_{\partial\Omega} \gamma_0 w n_i d\Gamma \right| \leq \left(\int_{\partial\Omega} |n_i|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |\gamma_0 w|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \leq C_\Omega \|\gamma_0 w\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C'_\Omega \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

d'après la continuité de l'application trace

Il suffit ensuite d'utiliser le prolongement par continuité puisque $C^\infty(\bar{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

- Comme l'égalité est vraie dans $C^\infty(\bar{\Omega})$, elle est vraie dans $H^1(\Omega)$!  **A faire en exercice**

$$\forall w \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w|_{\partial\Omega} n_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$

En utilisant le même type d'arguments, on montre aussi que:  **A faire en exercice**

$$\forall u, v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u|_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} n_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$

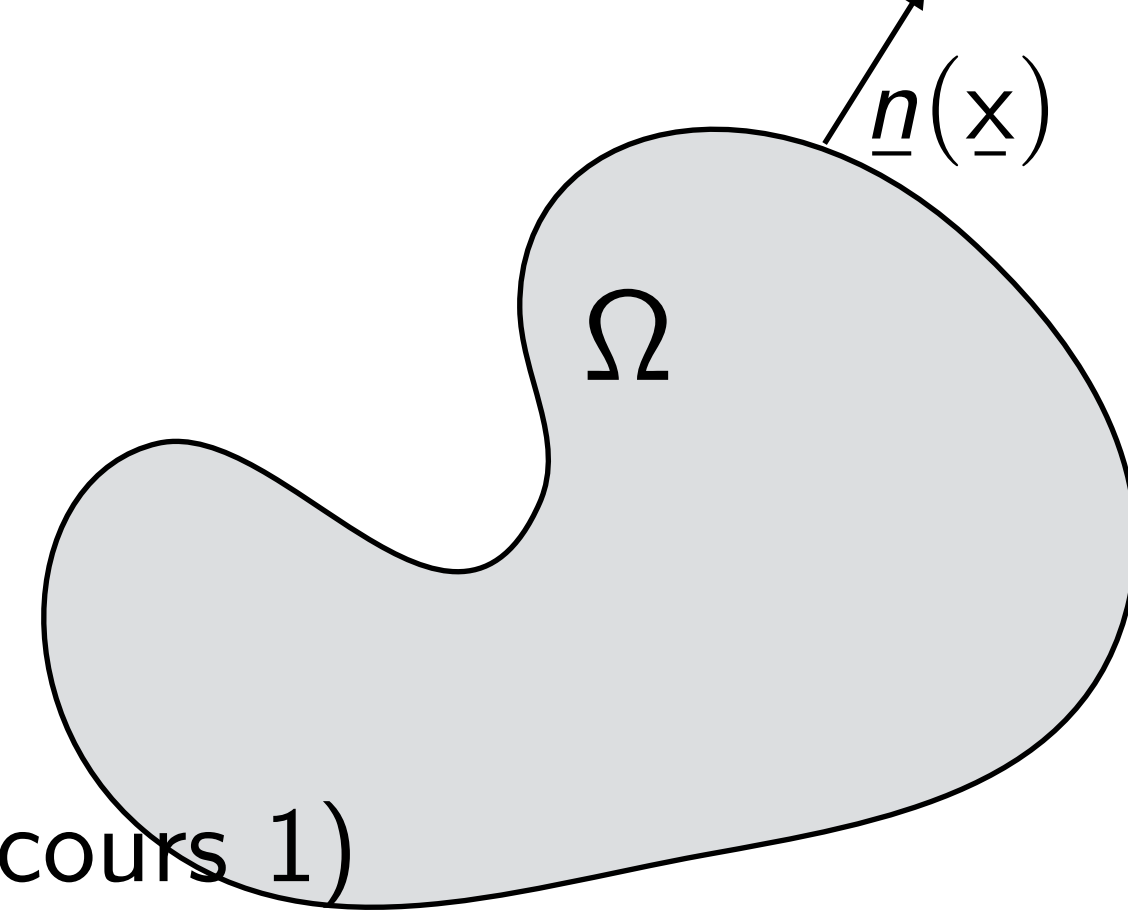
Séance 2

1. **Extension aux autres Formules de Green**
2. Formulation variationnelle pour un problème de type Dirichlet
3. Formulation variationnelle pour un problème de type Neumann

Généralisation de la formule de Stokes

Peut on généraliser la formule de Green

$$\forall \underline{U} \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^d \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{U} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{U} \cdot \underline{n} \, d\Gamma$$



- L'application $w \mapsto \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \, d\Omega$ s'étend aux fonctions de $H^1(\Omega)$ (preuve dans le cours 1)

Donc l'application $\int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{U} \, d\Omega \equiv \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \, d\Omega$ s'étend aux champs de vecteurs $\underline{U} \in [H^1(\Omega)]^d$

- L'application $w \mapsto \int_{\partial\Omega} w n_i \, d\Gamma$ s'étend aussi aux fonctions de $H^1(\Omega)$ (preuve dans le cours 1)

Donc l'application $\underline{U} \mapsto \int_{\partial\Omega} \underline{U} \cdot \underline{n} \, d\Gamma \equiv \sum_{i=1}^d \int_{\partial\Omega} U_i n_i \, d\Gamma$ s'étend aux champs de vecteurs $\underline{U} \in [H^1(\Omega)]^d$

- Comme l'égalité est vraie dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, elle est vraie dans $[H^1(\Omega)]^d$!  *A faire en exercice*

$$\forall \underline{U} \in [H^1(\Omega)]^d \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} \cdot \underline{U} \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{U}|_{\partial\Omega} \cdot \underline{n} \, d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$

En utilisant le même type d'arguments, on montre aussi que:  *A faire en exercice*

$$\forall v \in H^1(\Omega), \underline{W} \in [H^1(\Omega)]^d \quad \int_{\Omega} \left[v \underline{\nabla} \cdot \underline{W} + \underline{\nabla} v \cdot \underline{W} \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} [\underline{W} \cdot \underline{n}]|_{\partial\Omega} d\Gamma$$

$$\forall v \in H^1(\Omega), u \in H^2(\Omega) \quad \int_{\Omega} \left[v \Delta u + \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} u \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} [\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}]|_{\partial\Omega} d\Gamma$$

Petite parenthèse hors programme

On vient de voir que $\forall v \in H^1(\Omega), u \in H^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left[v \Delta u + \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} u \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} [\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}]|_{\partial\Omega} d\Gamma$$

Plus tard, nous devrons manipuler des fonctions $u \in H(\Omega, \Delta)$ qui ne sont nécessairement dans $H^2(\Omega)$!

Peut-on étendre aux fonctions qui sont seulement $u \in H(\Omega, \Delta)$?

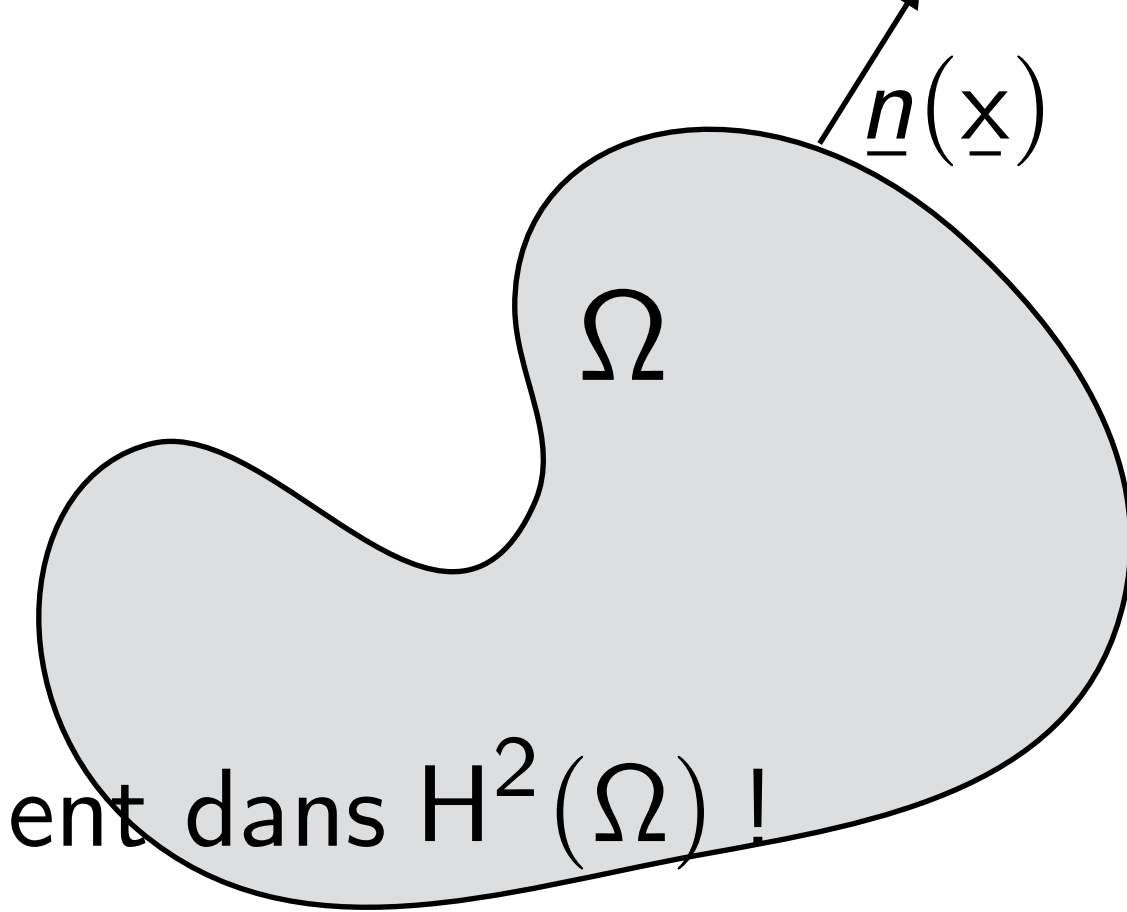
Rappels $H^2(\Omega) := \{v \in H^1(\Omega), \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, d\}\} \subsetneq H(\Omega, \Delta) := \{v \in H^1(\Omega), \Delta v \in L^2(\Omega)\}$

- Les intégrales volumiques s'étendent aux fonctions $u \in H(\Omega, \Delta)$

$$\left| \int_{\Omega} \Delta u v d\Omega \right|_{\text{C.S.}} \leq \left(\int_{\Omega} |\Delta u|^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \|\Delta u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{H^1(\Omega, \Delta)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

$$\left| \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v d\Omega \right|_{\text{C.S.}} \leq \left(\int_{\Omega} |\vec{\nabla} u|^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |\vec{\nabla} v|^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \leq \|u\|_{H^1(\Omega, \Delta)} \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

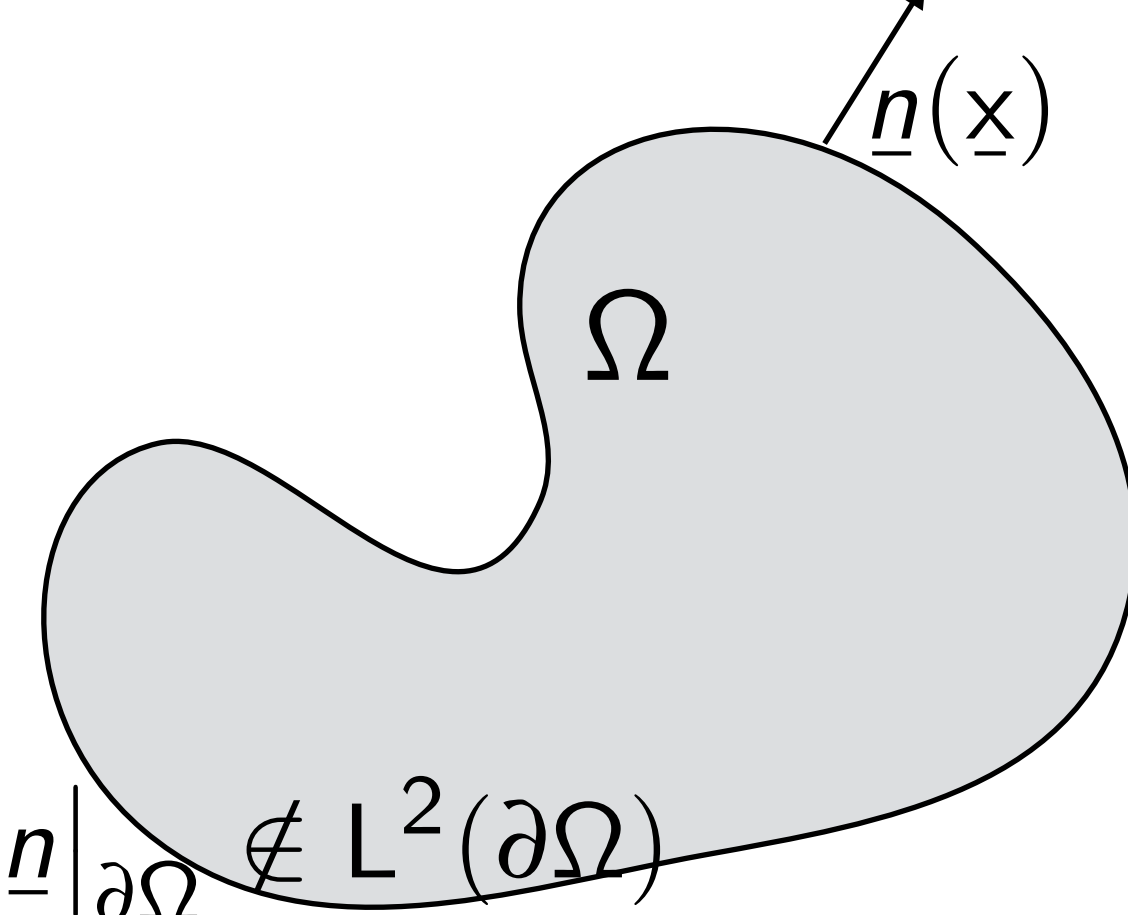
$$\|v\|_{H^1(\Omega, \Delta)}^2 = \|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} \right|^2 d\Omega$$



Petite parenthèse hors programme

On vient de voir que $\forall v \in H^1(\Omega), u \in H^2(\Omega)$

$$\int_{\Omega} [v \Delta u + \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} u] d\Omega = \int_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} [\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}]|_{\partial\Omega} d\Gamma$$



• Quant à l'intégrale surfacique? On peut trouver des $u \in H(\Omega, \Delta)$ tels que $\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega} \notin L^2(\partial\Omega)$ mais on montre que $\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega}$ a un sens plus faible: c'est une forme linéaire de $\text{Im } \gamma_0$ ($\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega} \in [\text{Im } \gamma_0]'$) définie par

$$\forall v \in H^1(\Omega), [\text{Im } \gamma_0]' \langle \underline{\nabla} u \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega} \rangle_{\text{Im } \gamma_0} = \int_{\Omega} [v \Delta u + \underline{\nabla} v \cdot \underline{\nabla} u] d\Omega$$

et d'après la formule de Green:

$$\text{Pour } u \in H^2(\Omega) \quad \forall v \in H^1(\Omega), [\text{Im } \gamma_0]' \langle \underline{\nabla} u \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega}, v|_{\partial\Omega} \rangle_{\text{Im } \gamma_0} = \int_{\partial\Omega} v|_{\partial\Omega} [\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}]|_{\partial\Omega} d\Gamma$$

On peut donc étendre la formule de Green aux fonctions qui sont seulement $H(\Omega, \Delta)$ mais c'est plus délicat!

Dans ce cours, dès qu'une fonction est dans $H(\Omega, \Delta)$, on fera l'hypothèse qu'elle est dans $H^2(\Omega)$ pour simplifier et on appliquera la formule de Green avec des intégrales.

On admettra que sans cette hypothèse, les preuves sont un peu plus techniques mais ne changent pas le résultat.

Séance 2

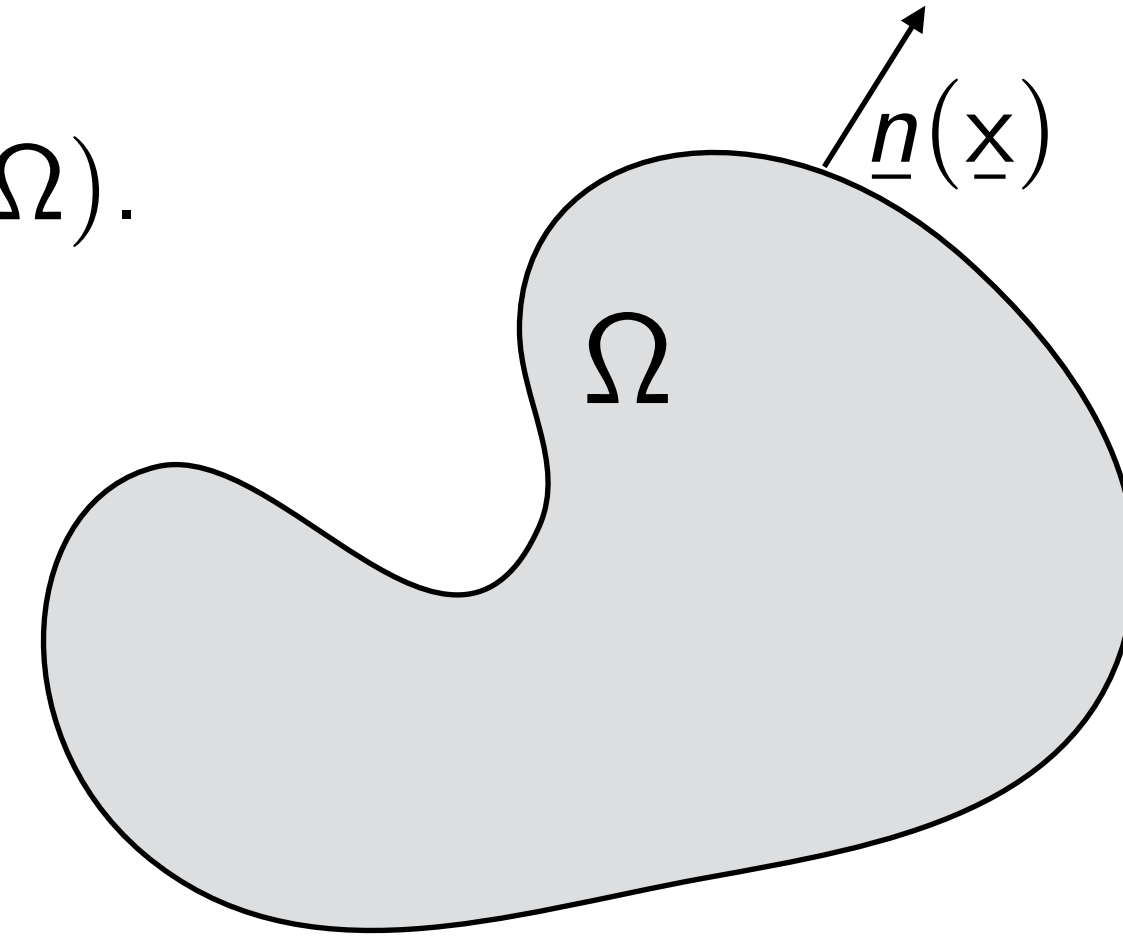
1. Extension aux autres Formules de Green
- 2. Formulation variationnelle pour un problème de type Dirichlet**
3. Formulation variationnelle pour un problème de type Neumann

Problème de Dirichlet homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

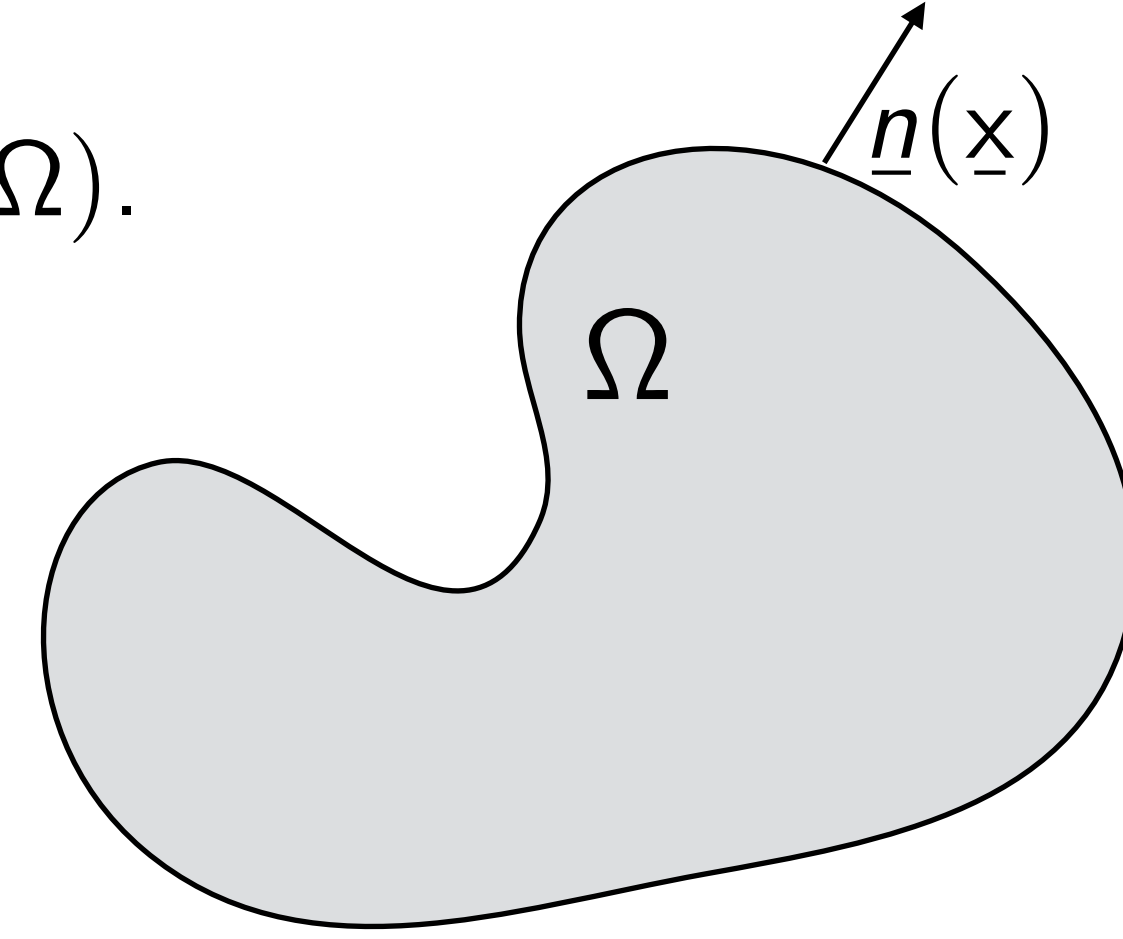
Construction de la formulation variationnelle. (au tableau)



Problème de Dirichlet homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$



On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de
$$\Downarrow \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Remarques.

- La solution u et les fonctions test v appartiennent au même espace $H_0^1(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert.
- La condition aux limites apparaît dans la définition de l'espace (ici $H_0^1(\Omega)$) :

On parle de **condition aux limites essentielle**.

*Montrons maintenant que la F.V. et le problème de départ sont **équivalents**.*

Problème de Dirichlet homogène

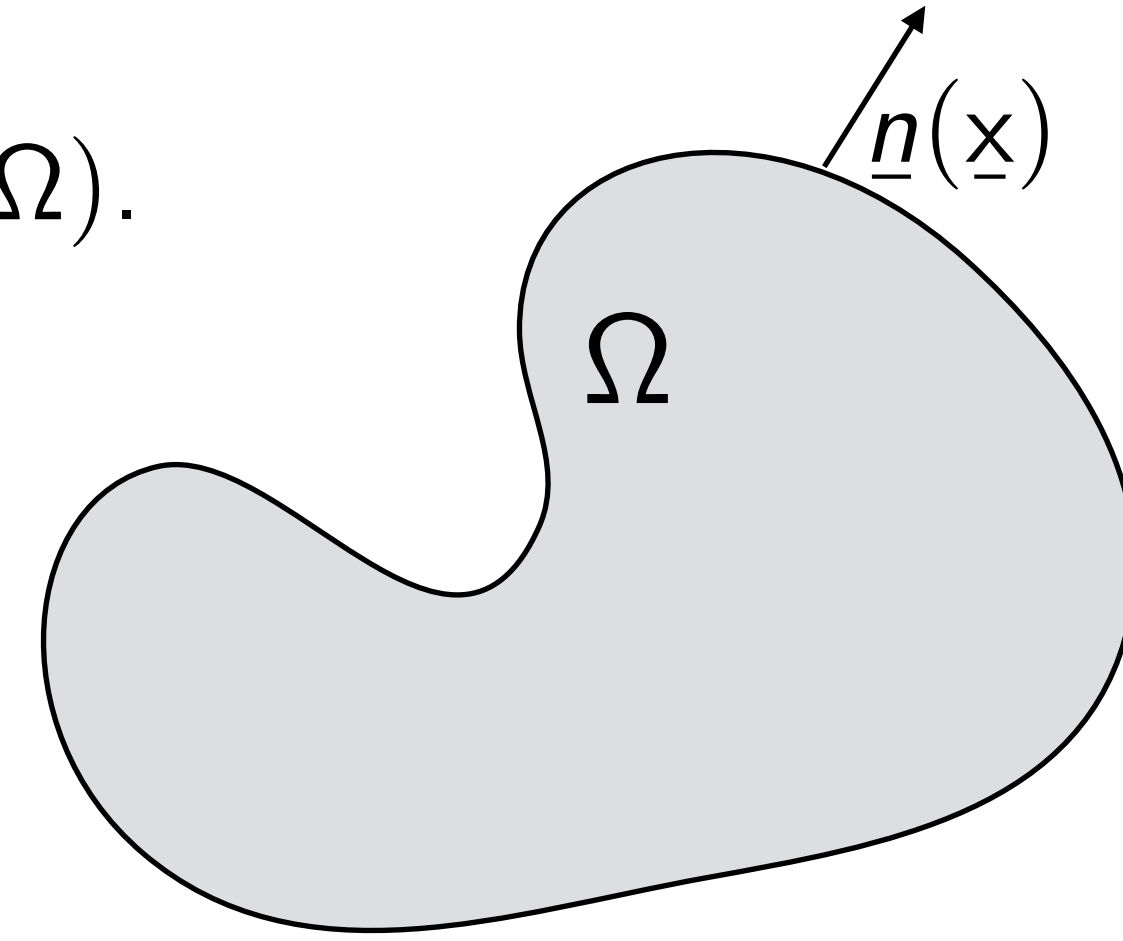
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

Montrons que u vérifie bien la condition aux limites. (au tableau)

Montrons que u vérifie bien l'EDP. (au tableau)



Problème de Dirichlet homogène

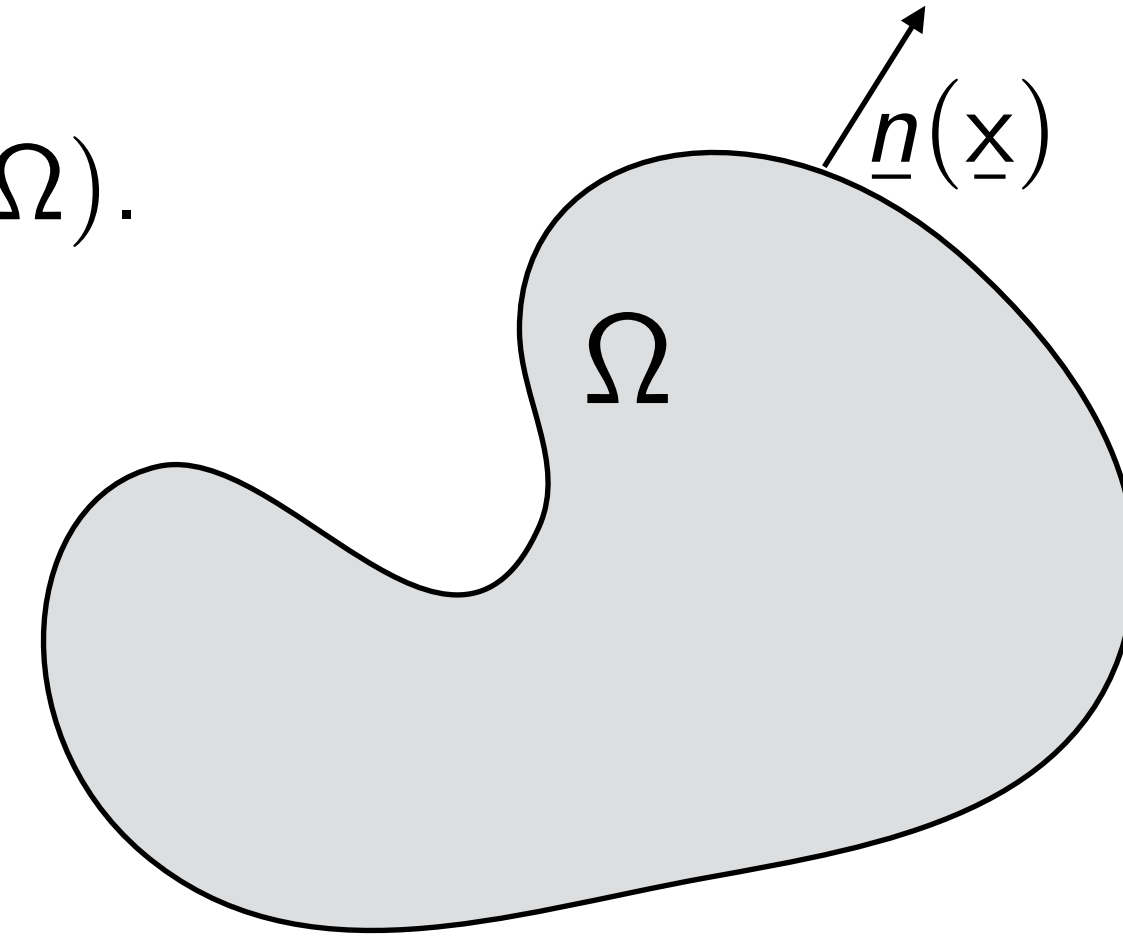
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$



On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

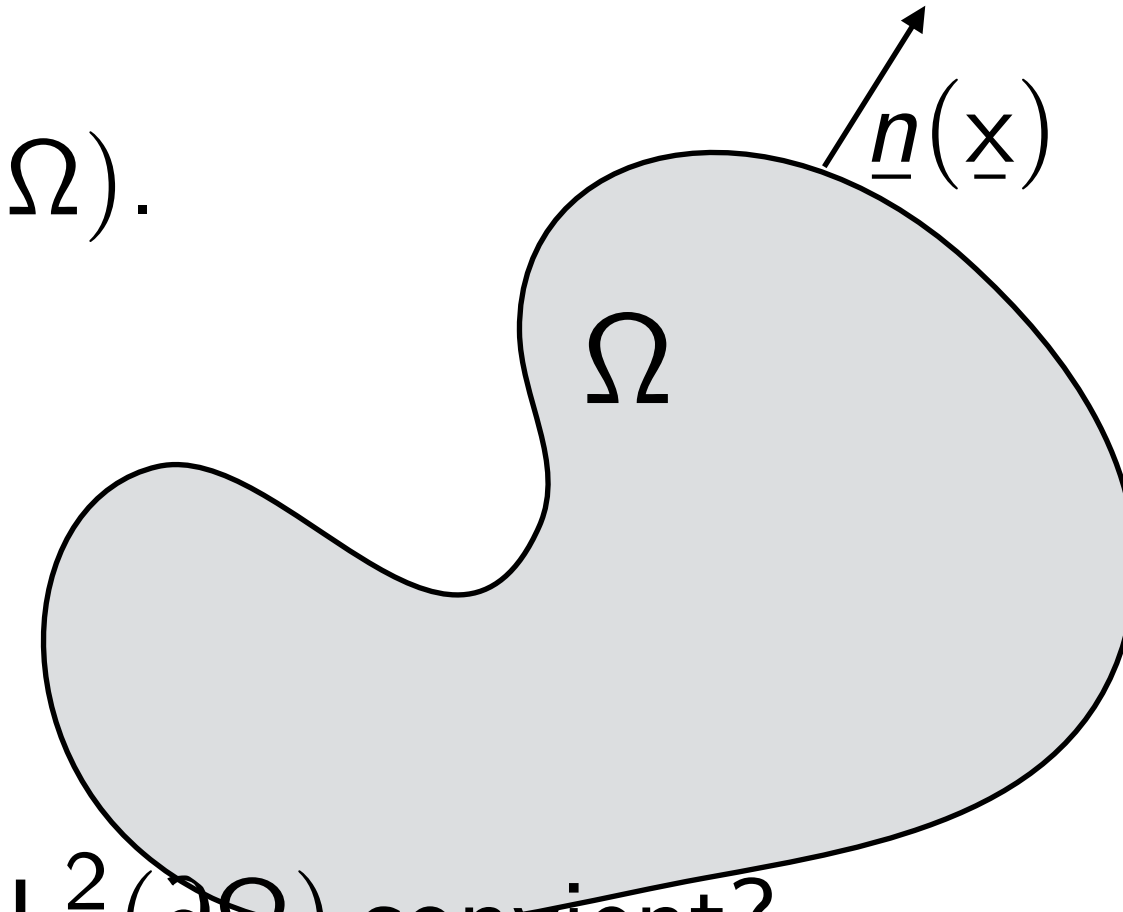


*Nous avons donc montré que problème fort (EDP+C.L.) est **équivalent** au problème faible (F.V.).
On verra à la prochaine séance qu'on peut bien appliquer le **théorème de Lax Milgram** à la F.V.*

Problème de Dirichlet non homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$



A quel espace doit appartenir g (*une donnée surfacique*)? Est-ce qu'une donnée $g \in L^2(\partial\Omega)$ convient?

Comme on cherche $u \in H^1(\Omega)$, g doit être assez régulière pour pouvoir être la trace d'une fonction de $H^1(\Omega)$

On suppose $g \in \text{Im}(\gamma_0)$.

L'image de l'application trace, $\text{Im}\gamma_0$, est un sous espace strict de $L^2(\partial\Omega)$.

Construction de la formulation variationnelle. (au tableau)

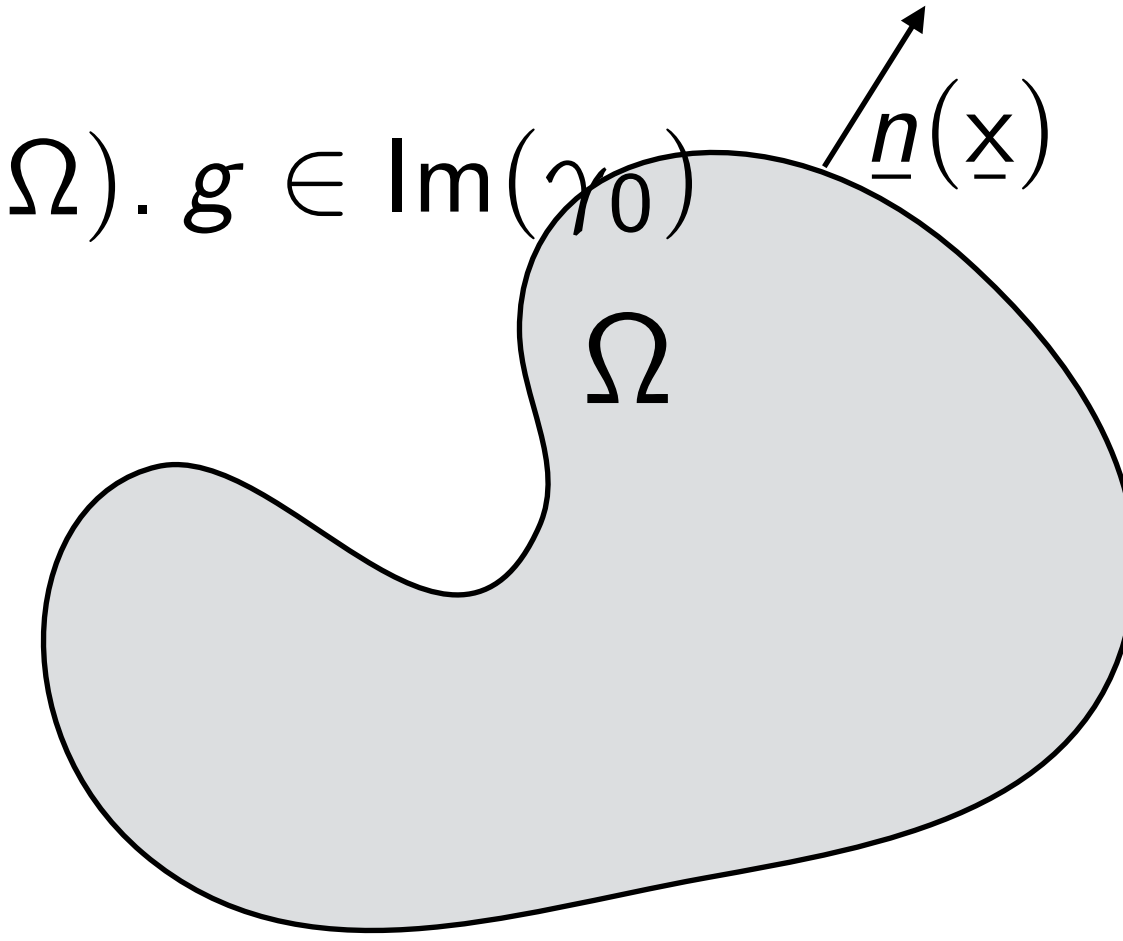
Problème de Dirichlet non homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$. $g \in \text{Im}(\gamma_0)$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\Downarrow \qquad \Uparrow$



On cherche $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u = g$ sur $\partial\Omega$, solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$



Remarques.

- La F.V. et le problème de départ sont **équivalents** (même preuve que précédemment).

- La solution u et les fonctions test v n'appartiennent pas au même espace !

Comme γ_0 est surjective de $H^1(\Omega)$ dans $\text{Im}(\gamma_0)$, on sait que $\exists u_g \in H^1(\Omega)$, $u_g|_{\partial\Omega} = g$

On dit que u_g est un relèvement de g .

On montre facilement que $u_0 = u - u_g$ est dans $H_0^1(\Omega)$, et vérifie

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u_0 \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u_0 v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(f v - \vec{\nabla} u_g \cdot \vec{\nabla} v - u_g v \right) d\Omega$$

Problème de Dirichlet non homogène

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$. $g \in \text{Im}(\gamma_0)$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

$\Downarrow \qquad \Uparrow$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u = g$ sur $\partial\Omega$, solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

$\Updownarrow$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ telle que $u = u_0 + u_g$ avec $u_g \in H^1(\Omega)$, $u_g|_{\partial\Omega} = g$
 $u_0 \in H^1(\Omega)$ solution de

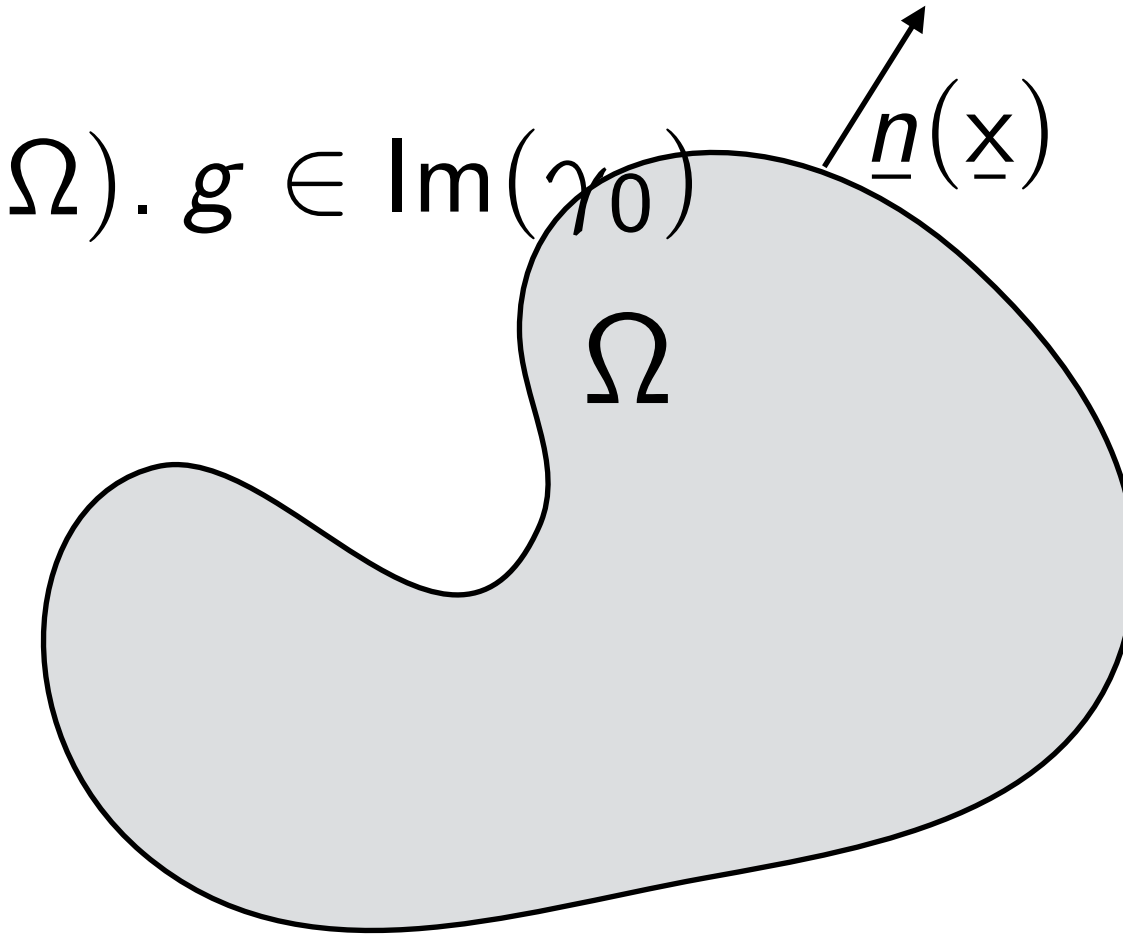
$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \vec{\nabla} u_0 \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u_0 v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left(f v - \vec{\nabla} u_g \cdot \vec{\nabla} v - u_g v \right) d\Omega$$



Remarques. • La solution est indépendante du choix du relèvement!

• Pour tout $g \in \text{Im}(\gamma_0)$, comment construire un tel u_g ?

En général, on verra qu'on aura simplement besoin d'un relèvement discret!



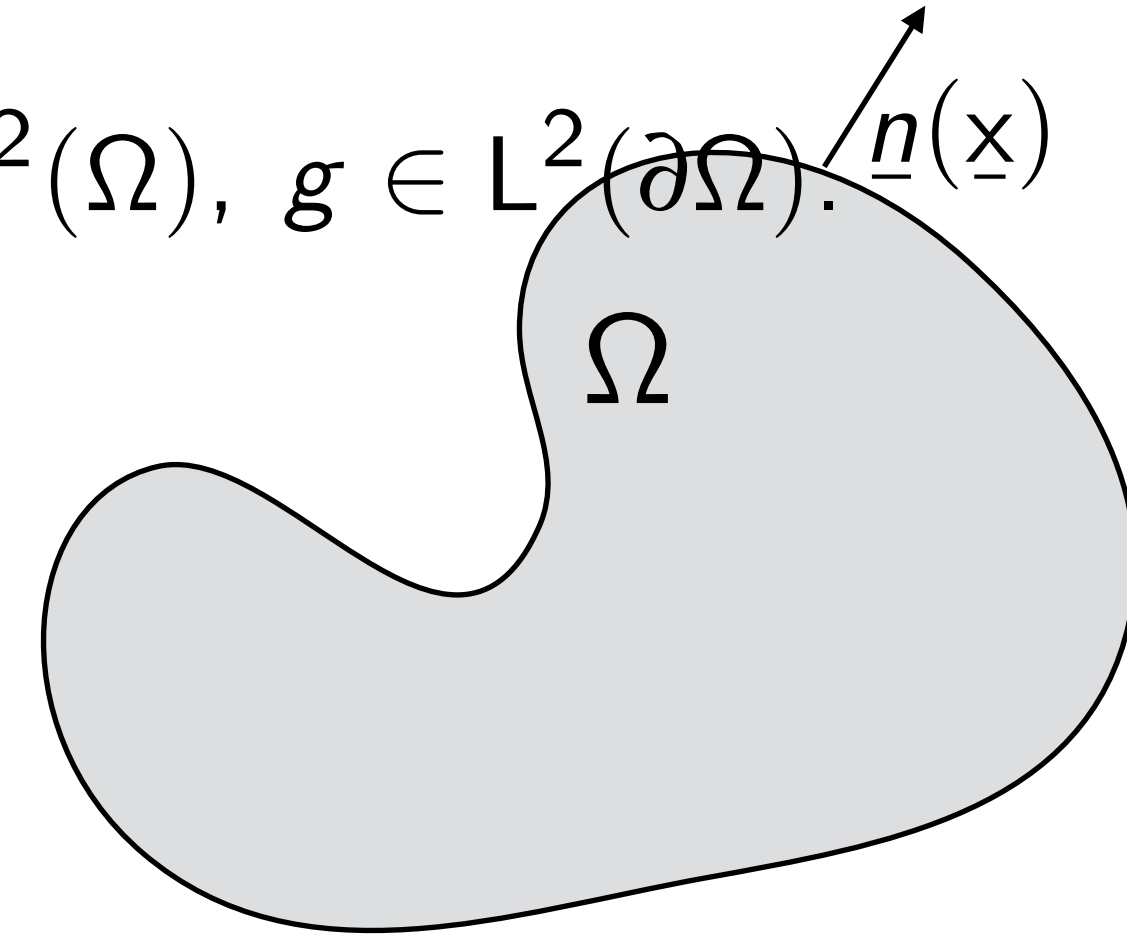
Séance 2

1. Extension aux autres Formules de Green
2. Formulation variationnelle pour un problème de type Dirichlet
- 3. Formulation variationnelle pour un problème de type Neumann**

Problème de type Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

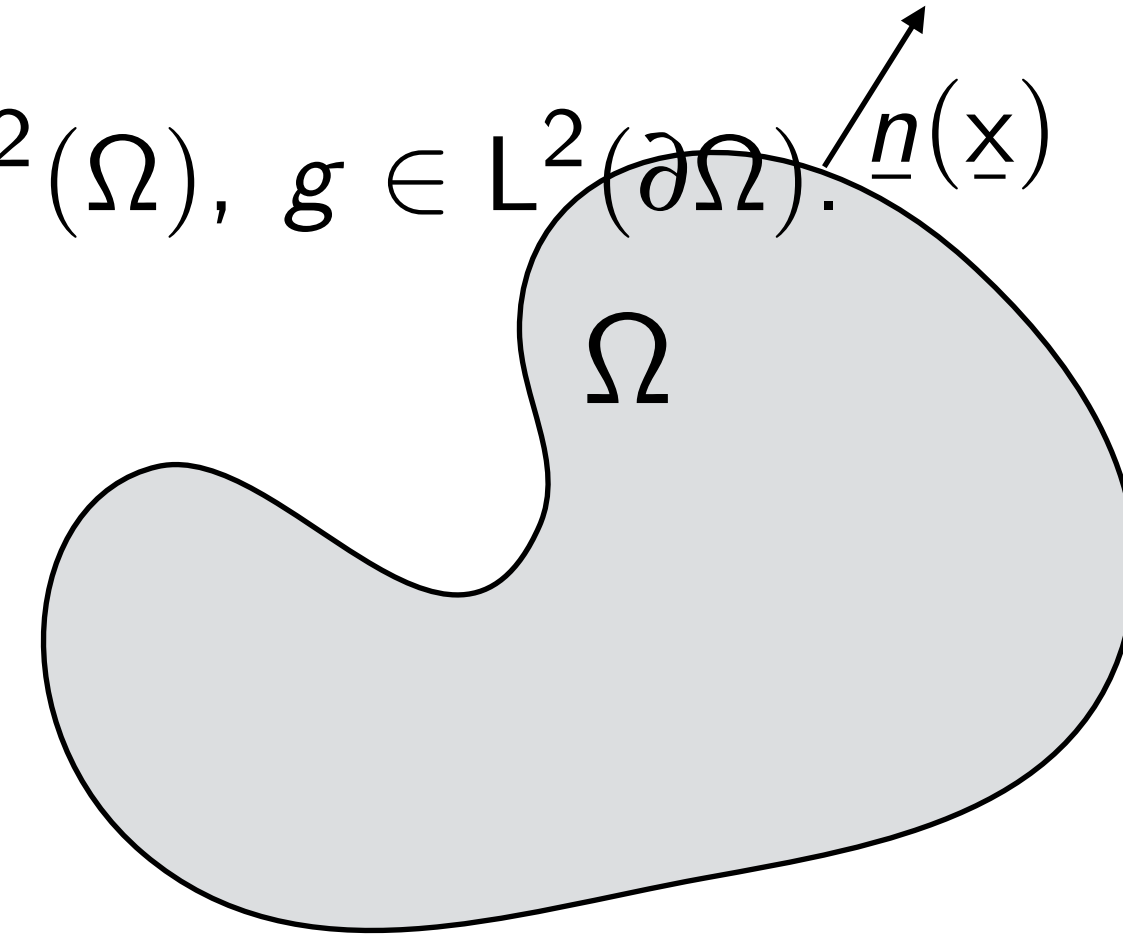
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$


Construction de la formulation variationnelle. (au tableau)

Problème de type Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soient $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^2(\partial\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$


On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

! Remarques.

- La solution u et les fonctions test v appartiennent au même espace $H^1(\Omega)$, qui est un espace de Hilbert.
- La condition aux limites n'apparaît pas dans la définition de l'espace mais est intégrée dans la F.V.

On parle de **condition aux limites naturelle**.

*Montrons maintenant que la F.V. et le problème de départ sont **équivalents**.*

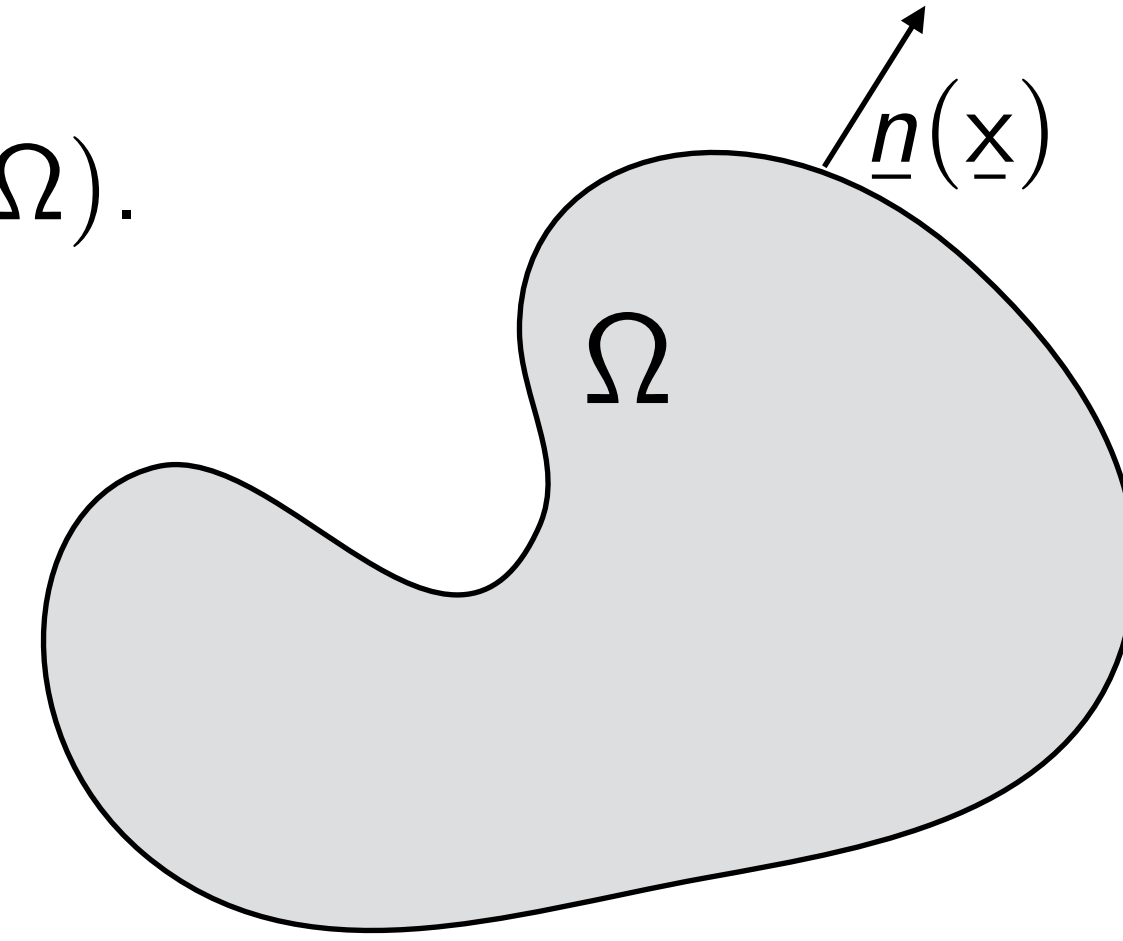
Problème de type Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

Montrons que u vérifie bien l'EDP. (au tableau)



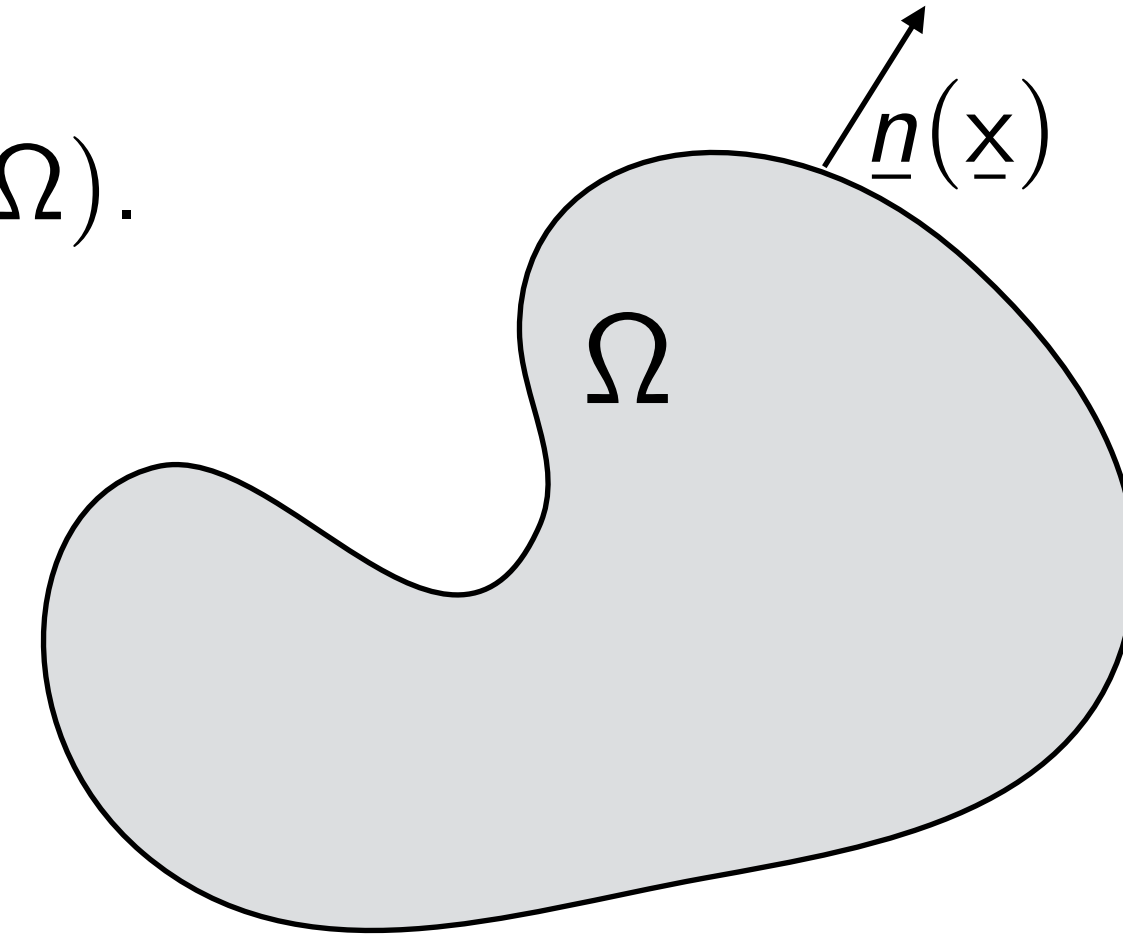
Problème de type Neumann

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$

Montrons que u vérifie bien la condition aux limites. (au tableau)

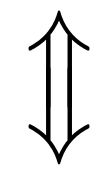


Problème de type Neumann

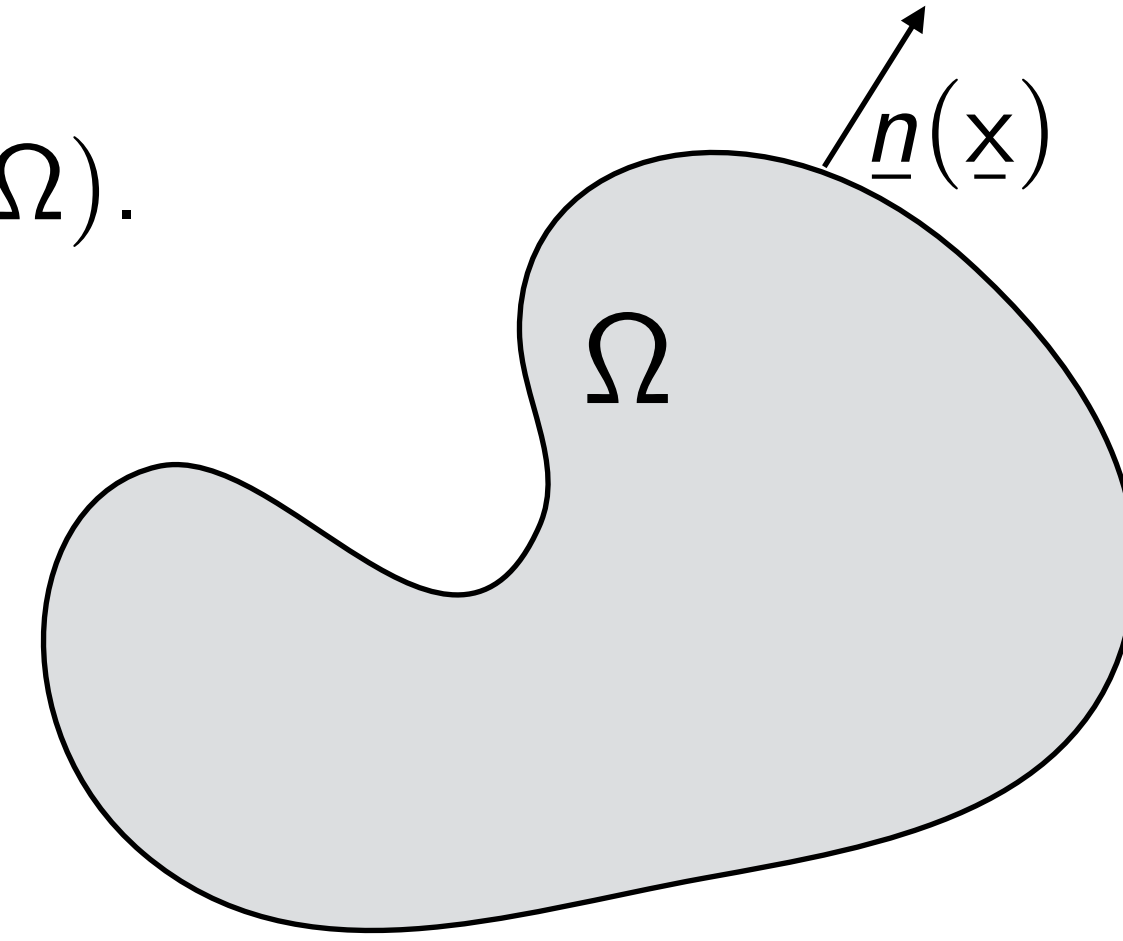
Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**. Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v|_{\partial\Omega} \, d\Gamma$$



On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$



*Nous avons donc montré que problème fort (EDP+C.L.) est **équivalent** au problème faible (F.V.).
On verra à la prochaine séance qu'on peut bien appliquer le **théorème de Lax Milgram** à la F.V.*

Commentaires sur les conditions aux limites essentielles et naturelles

Soit $f \in L^2(\Omega)$.

On cherche $u \in H_0^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- La condition aux limites intervient dans l'espace:
Condition aux limites essentielle.
- Pourquoi ne pas prendre $v \in H^1(\Omega)$, et garder le terme

$$\int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot n v \, d\Gamma \quad ?$$

u et v ne seraient plus dans le même espace.

On ne pourrait pas appliquer le théorème de Lax Milgram.

- Il est impossible de prendre en compte cette condition directement et exactement dans la F.V.

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\forall v \in H^1(\Omega), \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega + \int_{\Omega} u v \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega$$

On cherche $u \in H^1(\Omega)$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \nabla u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- La condition aux limites intervient naturellement dans la F.V.: **Condition aux limites naturelle.**
- Dans la F.V. pourquoi ne pas chercher u dans ...

$$\left[v \in H^1(\Omega), \nabla v \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right]$$

Pour une fonction de $H^1(\Omega)$, $\nabla v \cdot \underline{n}|_{\partial\Omega}$ n'a pas de sens.

$$\left[v \in H^2(\Omega), \nabla v \cdot \underline{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \right]$$

On ne pourrait pas appliquer le thm. de Lax Milgram.

- Il est impossible de prendre en compte cette condition dans l'espace.

Séance 2

1. Extension aux autres Formules de Green
2. Formulation variationnelle pour un problème de type Dirichlet
3. Formulation variationnelle pour un problème de type Neumann



Voir le TD2-Exo1 pour le cas des conditions de Robin.

Séance 3

Théorème de Lax Milgram et Applications