
Introduction à la méthode des Éléments Finis.

Sonia Fliss

Chargés de TDs : Marc Bakry (CEA), Eliane Bécache (Inria, UMA),
Marcella Bonazzoli (UMA), Pierre Boulogne (UMA), Xavier Claeys (UMA),
Benjamin Graille (Orsay), Erell Jamelot (CEA), Pierre Marchand (UMA),
Edouard Meddouri-Bernard (UMA), Zoïs Moitier (UMA)

Présentation générale

Déroulement du cours

- 6 cours magistraux de 1h15 de 8h30 à 9h45 (transparents disponibles sur le moodle et mon site web avant la séance)
- 3 TDs de 2h de 10h à 12h (corrigés disponibles sur le moodle et mon site web après la séance)
- 3 TPs de 2h de 10h à 12h
 - Un premier TP à faire sur la première séance à faire seul, sans aide extérieure.
 - Un mini-projet TP à faire sur les 2 séances suivantes : à faire en binôme, pas de mélange entre les groupes de TP!
 - Documents et IA permis pour ce projet mais attention au plagiat et tout doit être compris et maîtrisé
 - Prise d'initiative sur les sujets très encouragée
 - Soutenance orale de 20 minutes les 16 et 17 novembre après-midis (détails sur les attendus à suivre)
- Un examen le 02 novembre de 2h suivi d'un cours d'ouverture d'1h

	7/09	14/09	21/09	28/09	5/10	12/10
8h30-9h45	Cours					
10h-12h	TD1	TD2	TD3	TP1	TD+TP2	TP2

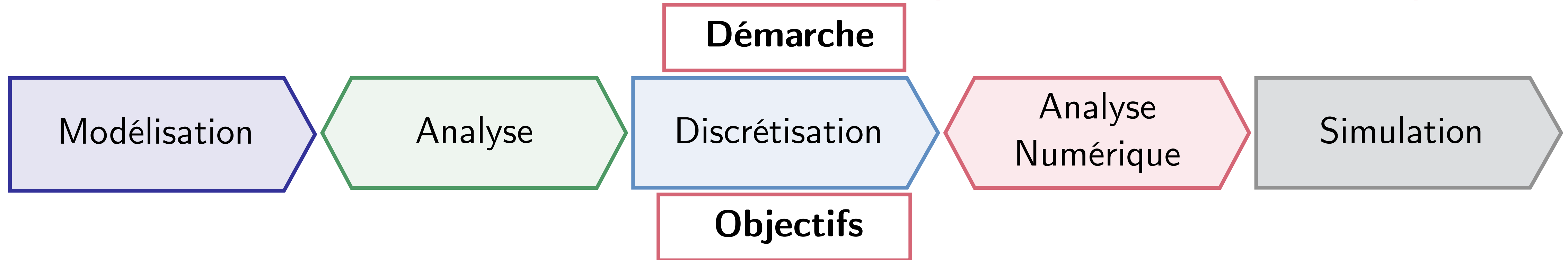
02/11
Examen
Cours

$$\text{Note} = 0.6\text{Examen} + 0.4(\text{TP} + \text{Bonus} \leq 3)$$

- Le polycopié est rédigé avec Philippe Moireau, professeur du cours de l'X: « Analyse variationnelle des EDPS ». Chapitres étudiés dans ce cours: 1 , 2, 3, 4, 6 et 7. Les transparents donnent les résultats principaux.

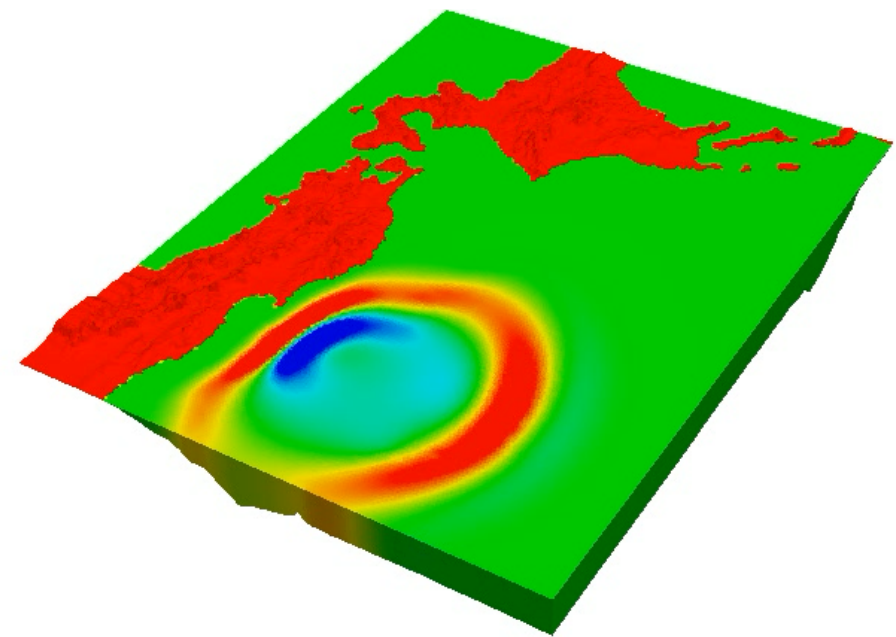
Objectifs du cours

Introduction à la modélisation mathématique et au calcul scientifique

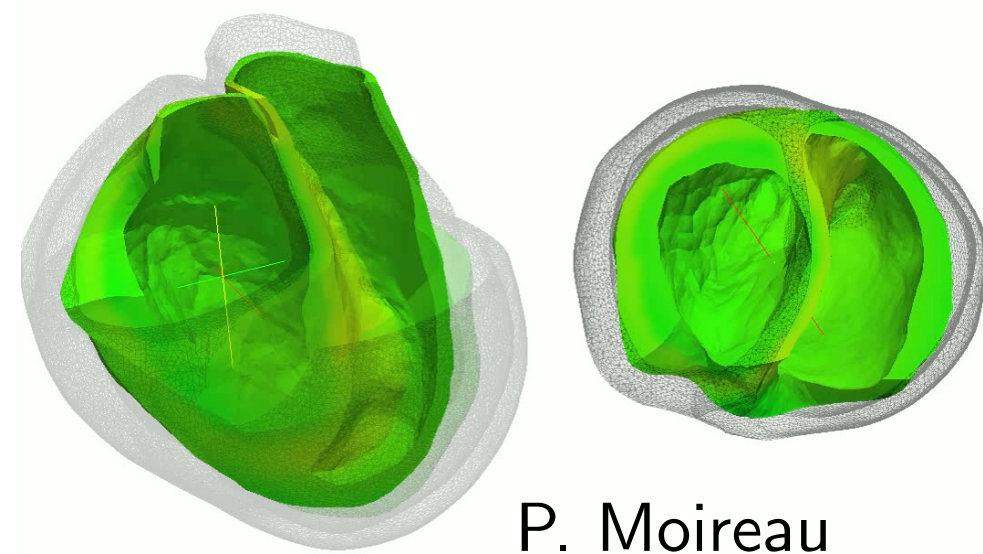


- **Prédire**

- Météorologie, climatologie, sciences environnementales, médecine, économie,



J. Sainte-Marie, Inria



P. Moireau

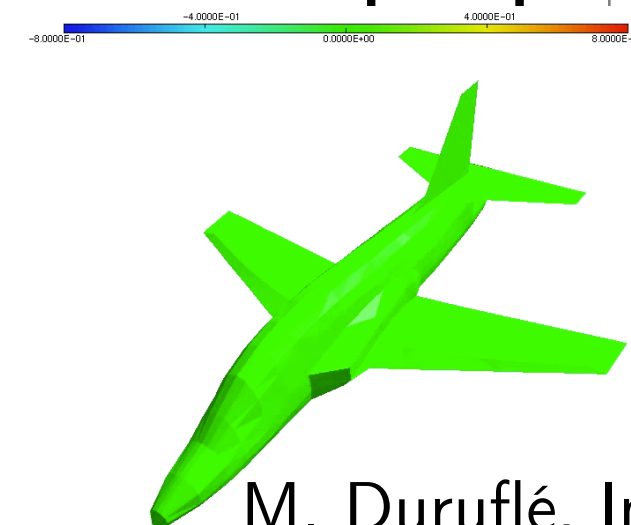
- **Comprendre**



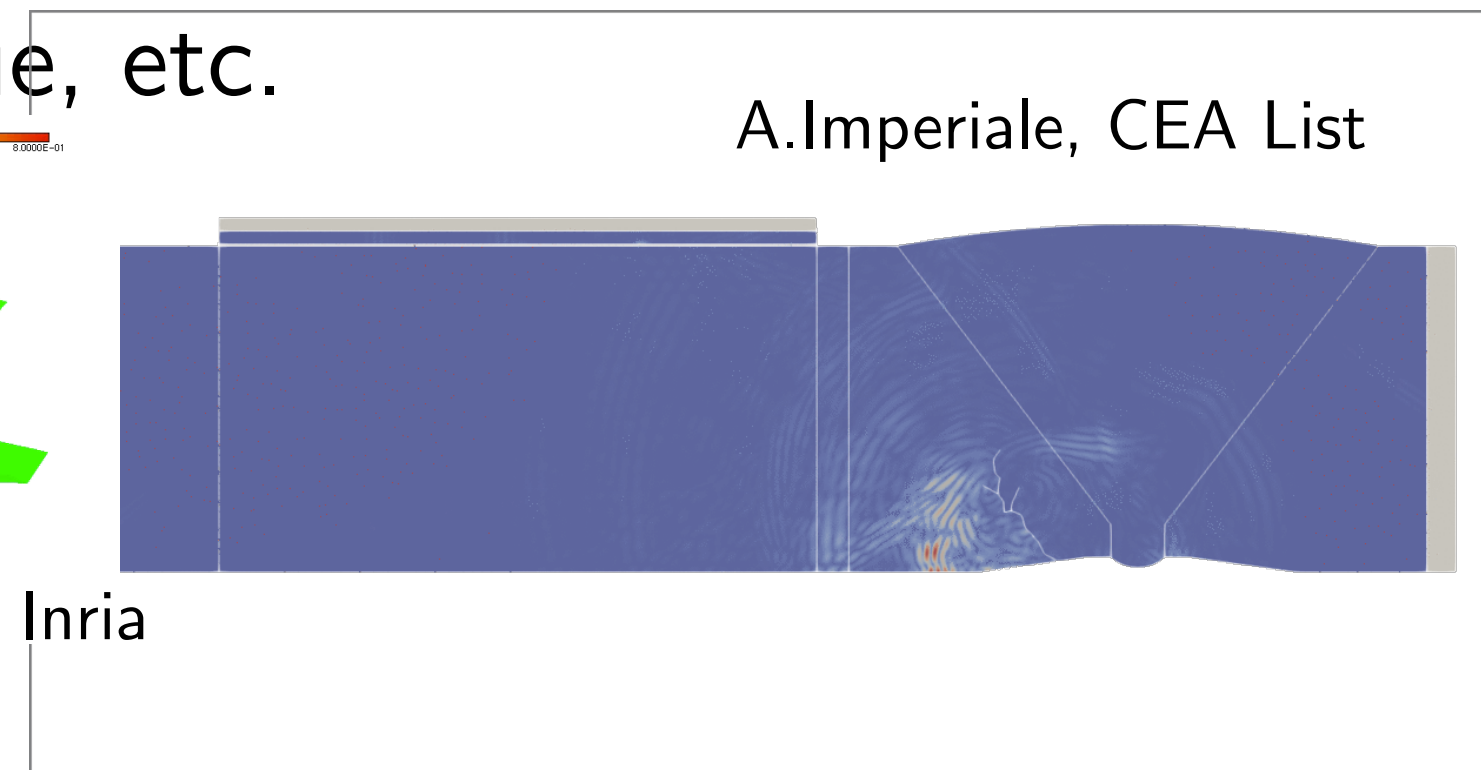
Déformation 3D de la table d'harmonie

- **Construire**

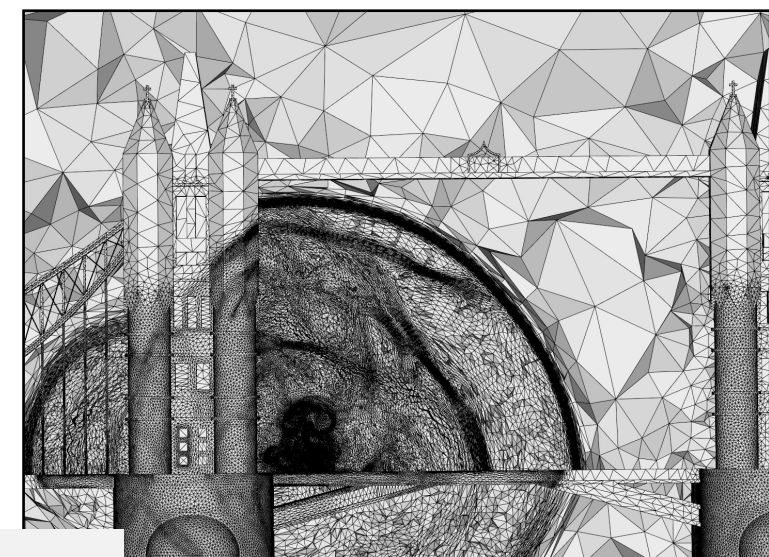
- Électromagnétisme, Aéronautique, calcul des structures, optique, etc.



M. Duruflé, Inria

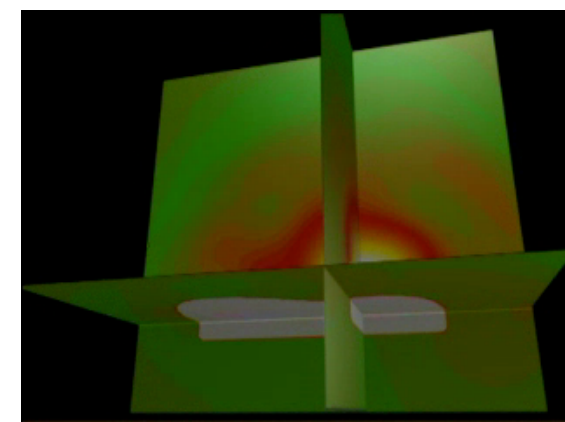


A. Imperiale, CEA List

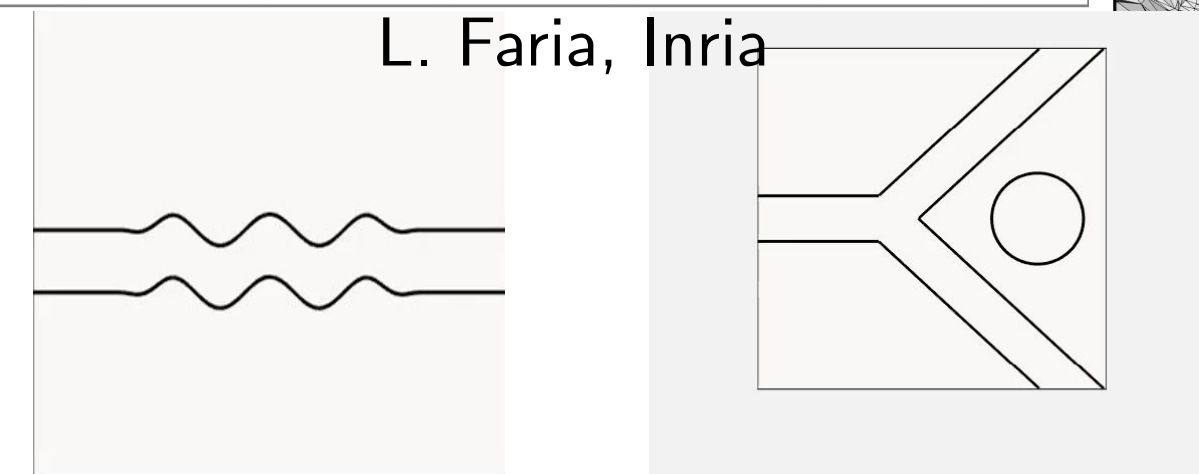


F. Alauzet, Inria

G. Derveaux



L. Faria, Inria



Ce cours est un cours d'introduction (les problèmes modèles seront assez simples).

Pour aller plus loin, il faudra suivre ANN2, SIM3, ANA2 puis le Parcours 3A « Modélisation et Simulation »

Un modèle 2D simple : Conduction de la chaleur

- Équation volumique dans le domaine Ω

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t}(\underline{x}, t) + \underline{\nabla} \cdot \underline{j}(\underline{x}, t) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega \quad \text{Loi de conservation}$$

$$\underline{j}(\underline{x}, t) = -\kappa(\underline{x}) \underline{\nabla} u(\underline{x}, t) \quad \text{Loi de comportement}$$

- Échanges aux bords: $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$

- Température fixée (fenêtre ouverte):

$$u(\underline{x}, t) = u_{\text{ext}}(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_D$$

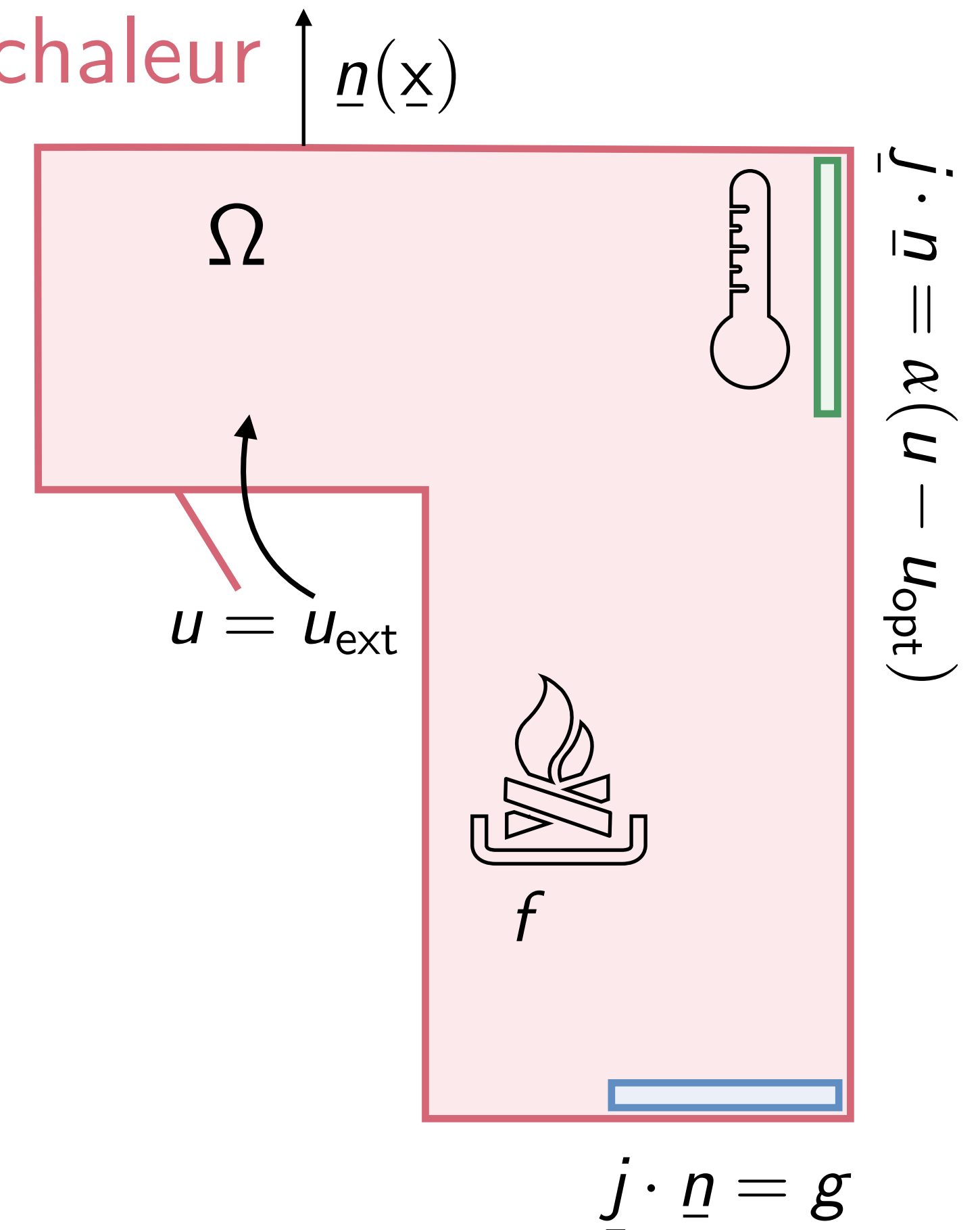
- Flux imposé (radiateur):

$$\underline{j}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = g, \quad \underline{x} \in \Gamma_N$$

- Flux contrôlé (climatiseur réglé):

$$\underline{j}(\underline{x}, t) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = \beta(u(\underline{x}, t) - u_{\text{opt}}(\underline{x})), \quad \underline{x} \in \Gamma_R$$

- Problème stationnaire : $u(\underline{x}) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(\underline{x}, t) \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t} = 0$



Rappels

$$\underline{\nabla} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)_{1 \leq j \leq d}$$

$$\text{div } \underline{j} = \underline{\nabla} \cdot \underline{j} = \sum_{1 \leq i \leq d} \frac{\partial j_i}{\partial x_i}$$

$$\text{où } \underline{j} = (j_i)_{1 \leq i \leq d}$$

Un modèle 2D simple : Conduction de la chaleur

- Problème stationnaire correspondant

$$-\underline{\nabla} \cdot (\kappa \underline{\nabla} u)(\underline{x}) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega$$

si $\kappa(\underline{x}) = \bar{\kappa}$ constante, $\underline{x} \in \Omega$

$$-\bar{\kappa} \Delta u(\underline{x}) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega$$

- Conditions aux limites : $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$

- de Dirichlet:

$$u(\underline{x}) = u_D(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_D$$

- de Neumann:

$$(\kappa \underline{\nabla} u)(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_N$$

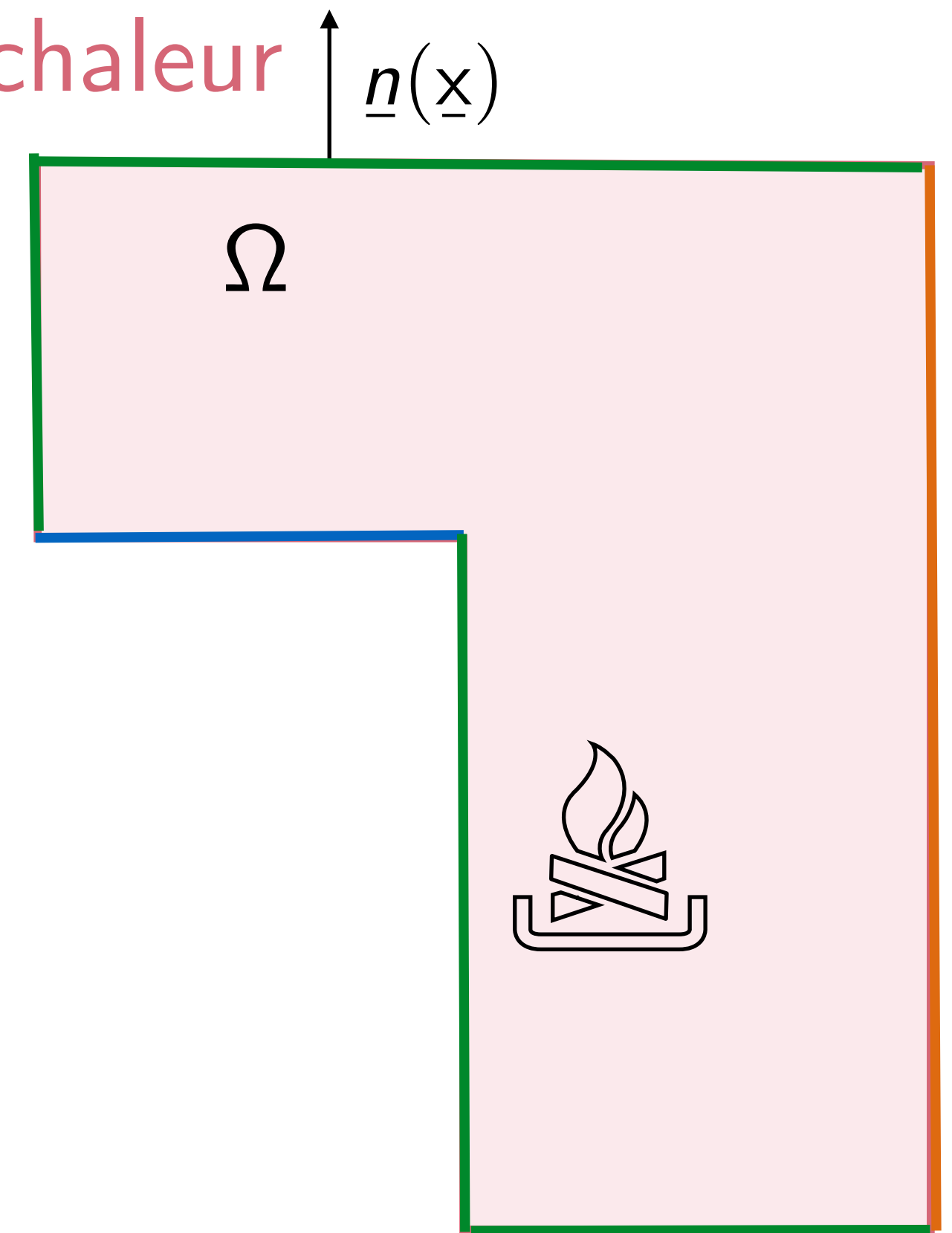
- de Robin (ou de Fourier):

$$(\kappa \underline{\nabla} u)(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) + \beta(u(\underline{x}) - u_0(\underline{x})) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_R$$

Des équations similaires peuvent être obtenues quand on s'intéresse au déplacement latéral d'une membrane, la diffusion neutronique, la diffusion de nutriments dans un milieu cellulaire,...



voir le chapitre 1 pour d'autres exemples



Rappel

$$\Delta u := \sum \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} u$$

Notation

$$\frac{\partial u}{\partial n} := \underline{\nabla} u \cdot \underline{n}$$

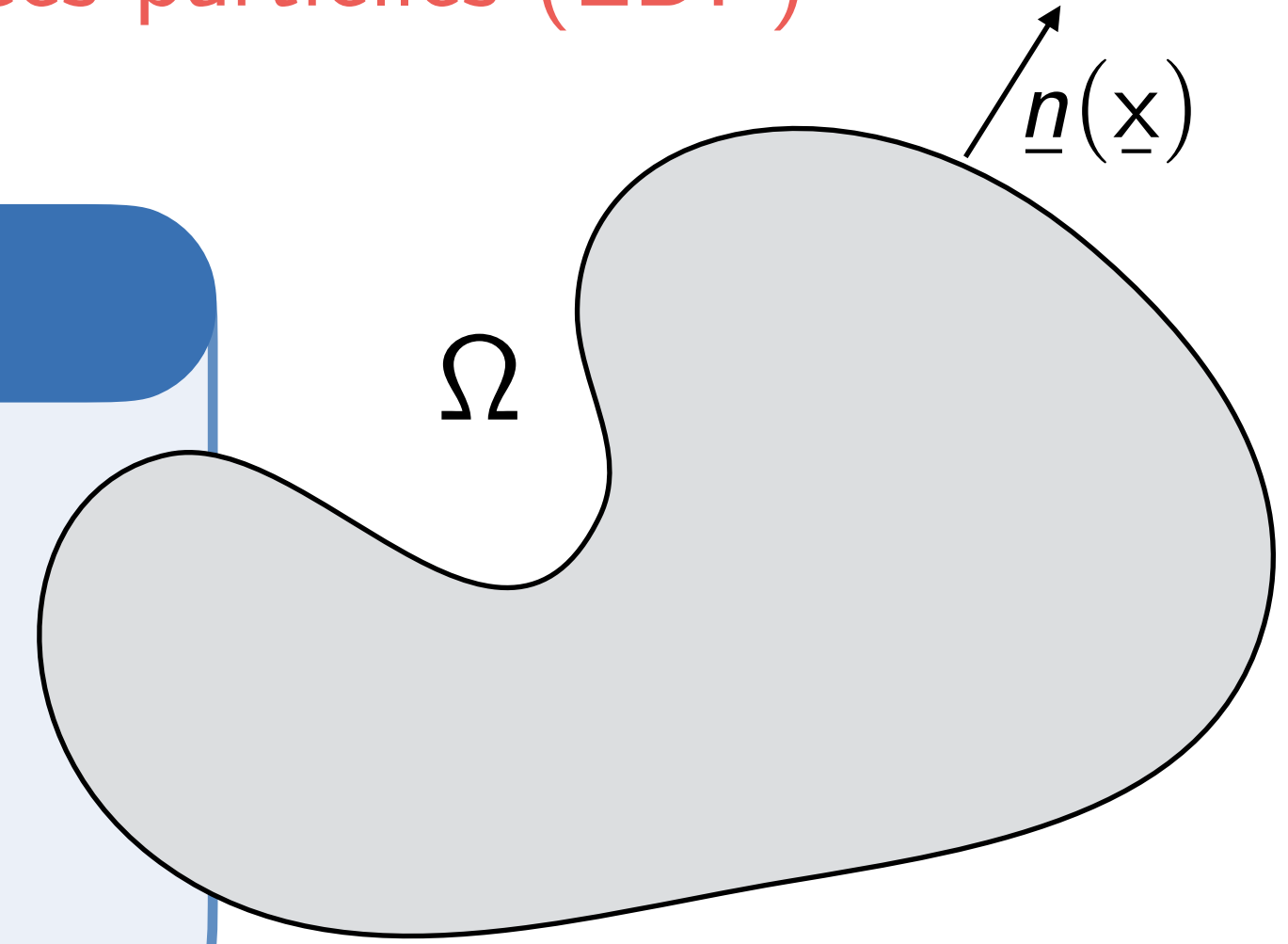
Problème modèle étudié dans ce cours

Étant donné un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on se donne une **équation aux dérivées partielles (EDP)** dite **elliptique**

Definition des EDPs elliptiques.

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(\underline{x}) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(\underline{x}) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(\underline{x}) u = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^d$$

est elliptique si $\underline{a}(\underline{x}) = (a_{ij}(\underline{x}))_{1 \leq i,j \leq n}$ est symétrique, des valeurs propres non nulles & de même signe.



Exemples : $-\underline{\nabla} \cdot (\kappa \underline{\nabla} u)(\underline{x}) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega$

$$-\bar{\kappa} \Delta u(\underline{x}) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$-\underline{\nabla} \cdot (\kappa \underline{\nabla} u)(\underline{x}) + c(\underline{x}) u(\underline{x}) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega$$

$$-\bar{\kappa} \Delta u(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x}) \cdot \underline{\nabla} u(\underline{x}) = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega$$

Ces équations sont écrites au sens presque partout dans Ω , c'est à dire pour presque tout $\underline{x}$.

Cette EDP est complétée d'une ou plusieurs **conditions aux limites (CL)** $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N \cup \Gamma_R$

de Dirichlet:

$$u(\underline{x}) = u_D(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_D$$

de Neumann:

$$(\kappa \underline{\nabla} u)(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_N$$

de Robin (ou de Fourier):

$$(\kappa \underline{\nabla} u)(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) + \beta(u(\underline{x}) - u_0(\underline{x})) = g(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Gamma_R$$

Objectif du cours

- **Ecrire** une formulation variationnelle

Exemple

Amphi 1 et TD1

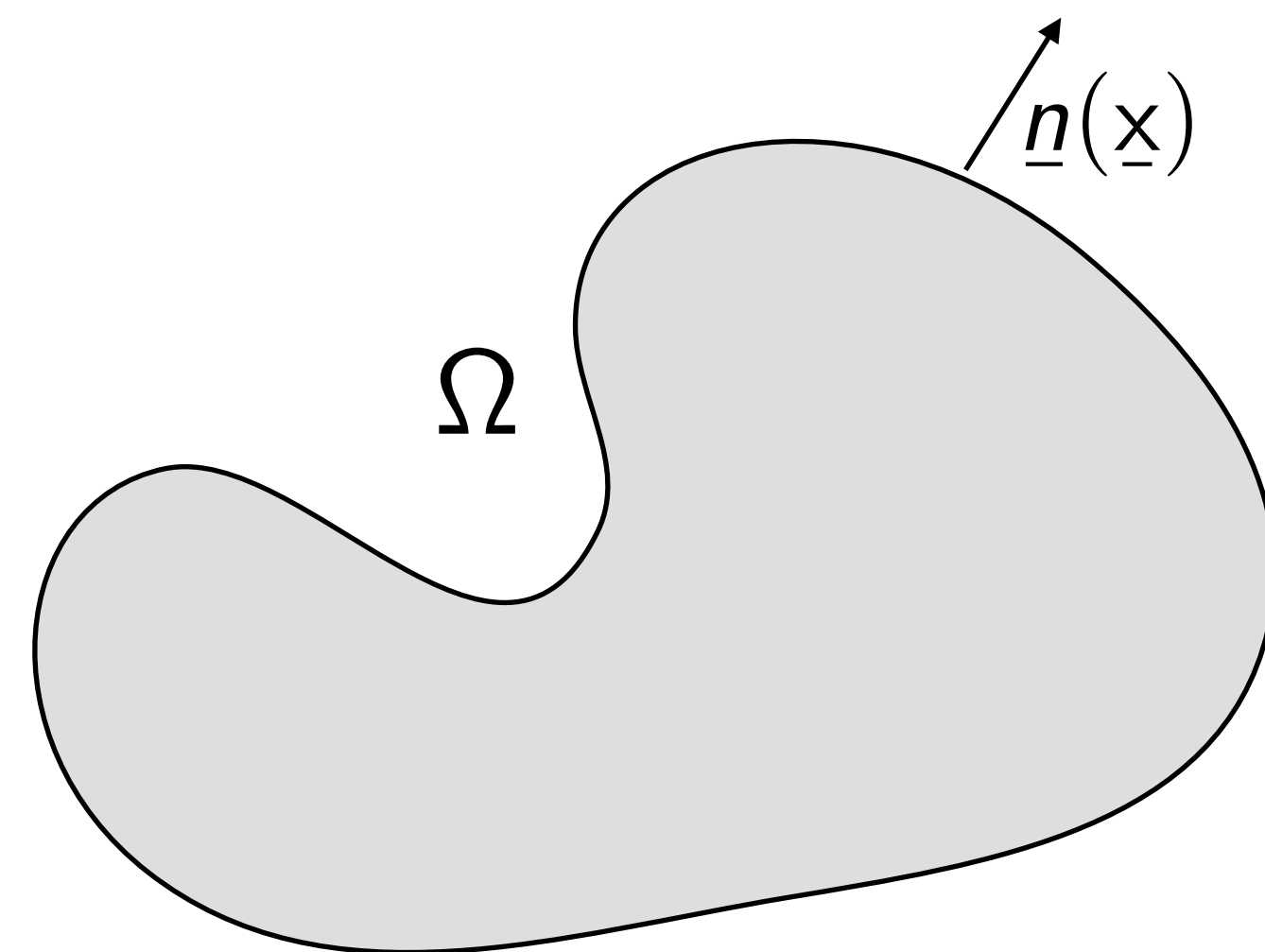
Trouver $u \in ???$ solution de

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Amphi 2 et TD2

Trouver $u \in ???$ solution de

$$\forall v \in ??? \quad \int_{\Omega} [\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + uv] d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v d\Gamma$$



- **Montrer** l'équivalence entre le problème fort (EDP+CL) et le problème faible (FV). Amphi 2 et TD2
- **Prouver** que le problème faible est bien posé. Amphi 3 et TD3
- **Choisir** une méthode d'approximation/de discrétisation Amphi 4
- **Construire** le problème discrétisé Amphi 4 et 5
- **Evaluer** a priori la qualité de la solution approchée (**précision** de la méthode et **erreur** commise par rapport à la solution exacte) Amphi 6
- **Résoudre** le problème discrétisé et **valider** les résultats TP
- **Connaitre** quelques extensions à des cas plus complexes. Amphi 7 (Cours d'ouverture)

Outils mathématiques

1. Formules de Green pour les fonctions régulières
2. Espaces de Sobolev, Dérivation faible dans L^2
3. Théorème de trace
4. Retour sur les formules de Green

Outils mathématiques

1. Formules de Green pour les fonctions régulières
2. Espaces de Sobolev, Dérivation faible dans L^2
3. Théorème de trace
4. Retour sur les formules de Green

Le domaine physique

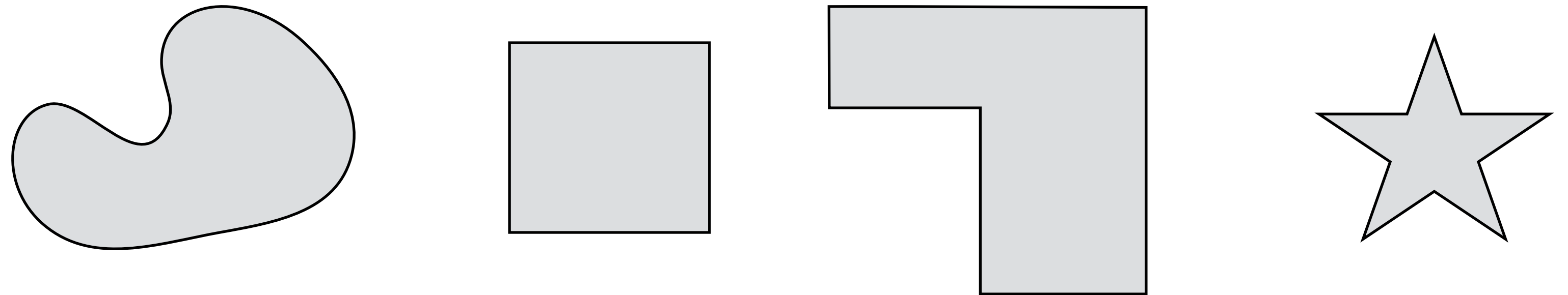
Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est supposé être un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**.

Definition

La frontière $\partial\Omega$ est dite suffisamment régulière si en tout point de $\partial\Omega$

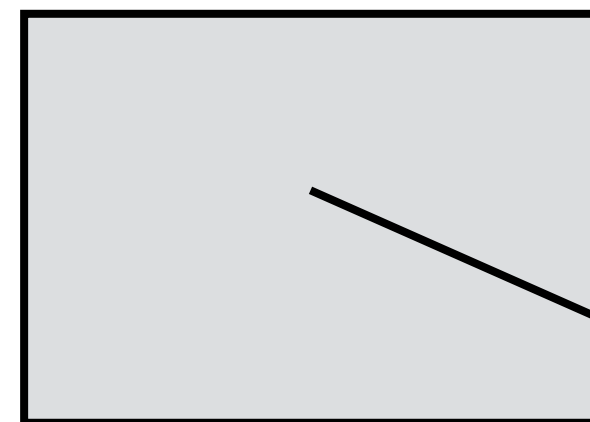
- *Ω est localement d'un seul côté de la frontière $\partial\Omega$*
- *On peut localement cartographier la frontière par une application lipschitzienne*

Exemples de domaine d'étude

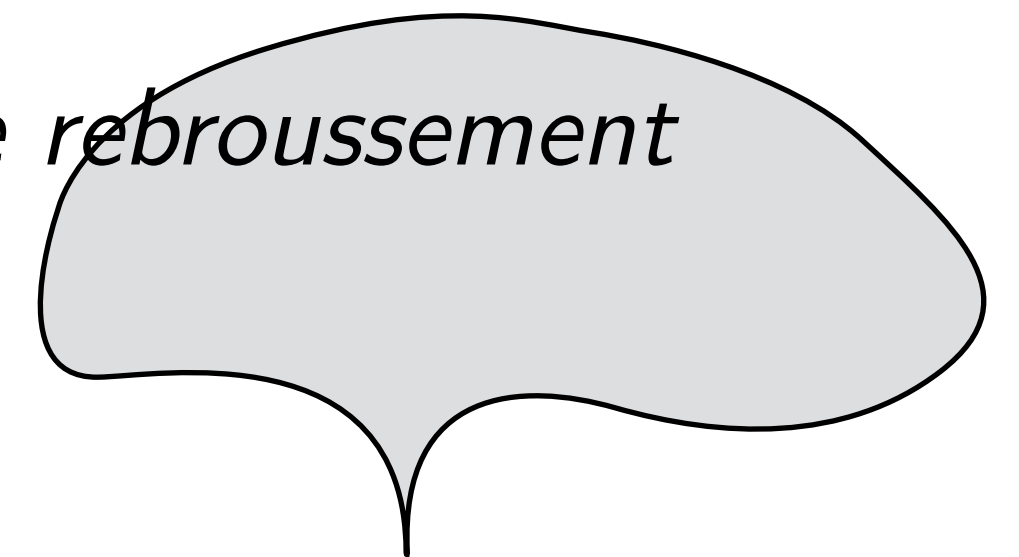


Exemples de domaine exclus

Domaines fissurés



Domaines avec point de rebroussement



Rappel $f : X \rightarrow Y$ lipchitzienne ssi $\exists \eta > 0, \forall x, x' \in X, \|f(x) - f(x')\|_Y \leq \eta \|x - x'\|_X$.

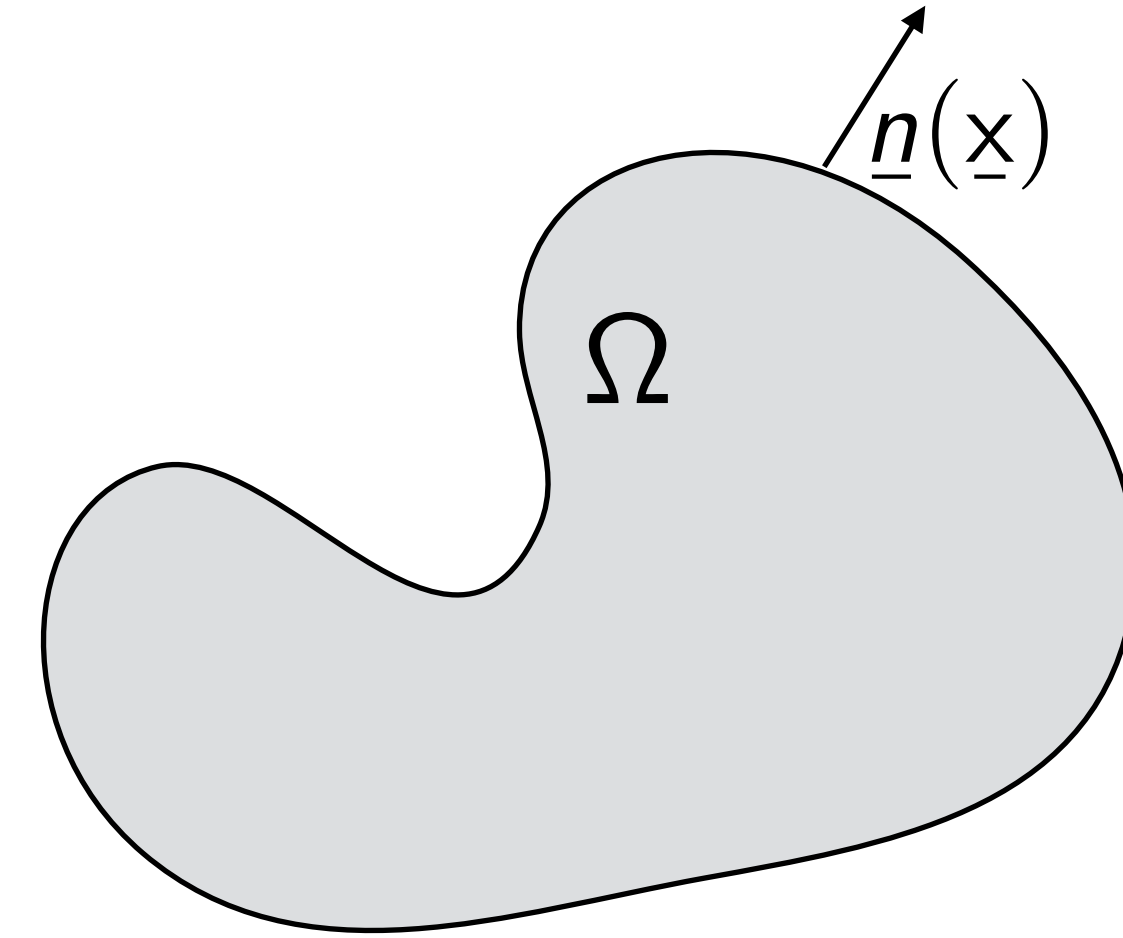
Formules de Green

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**.

Formule de Stokes

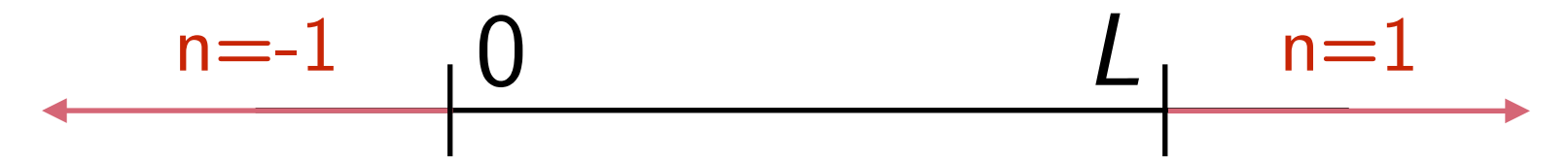
Soit $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $w : \underline{x} = (x_1, \dots, x_d) \mapsto w(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$



En 1d, Formule de Stokes = Formule d'intégration par parties

$$\forall w \in C^\infty([a, b]), \quad \int_a^b \frac{dw}{dx} dx = w(b) - w(a)$$



Corollaire

$$\text{Soient } u, v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v + u \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) d\Omega = \int_{\partial\Omega} u v n_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$

Il suffit de poser $w = u v$ dans la formule de Stokes.

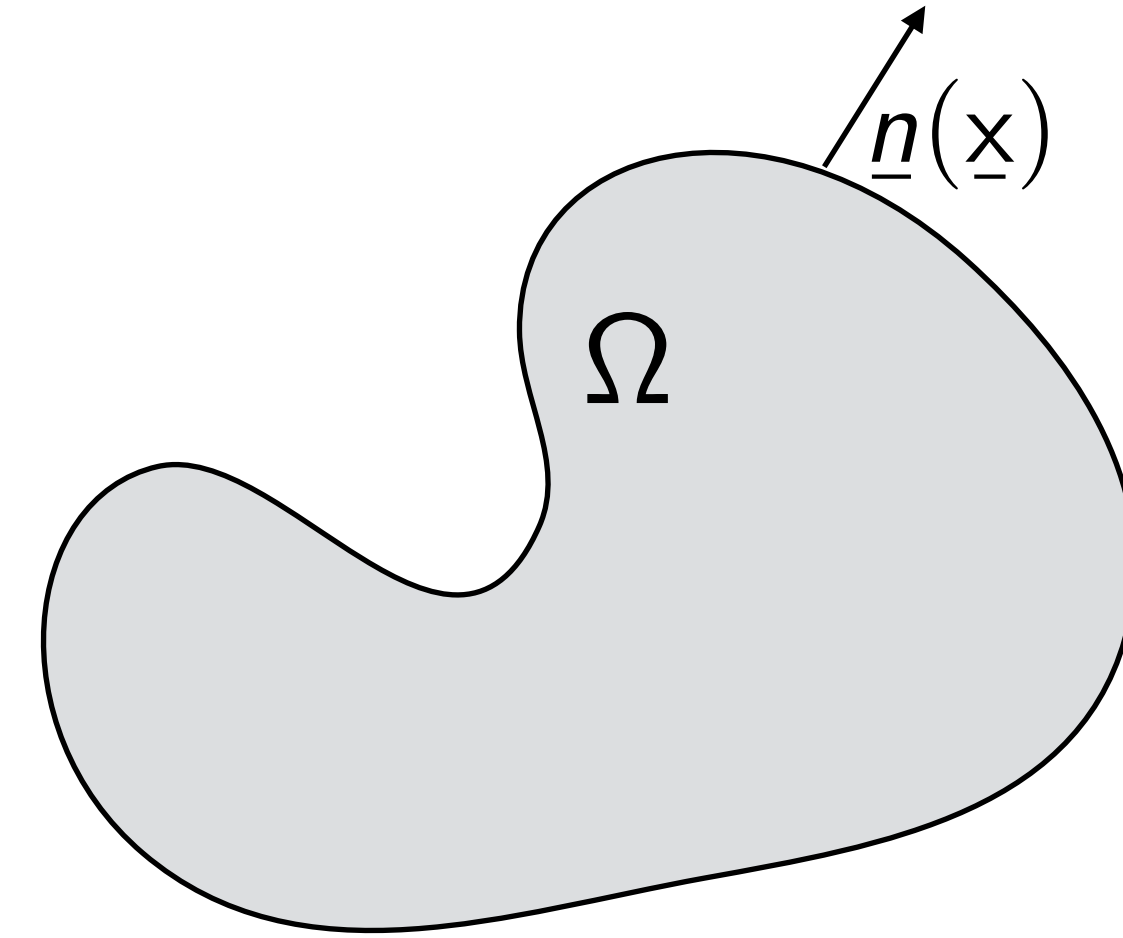
Formules de Green

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**.

Formule de Stokes

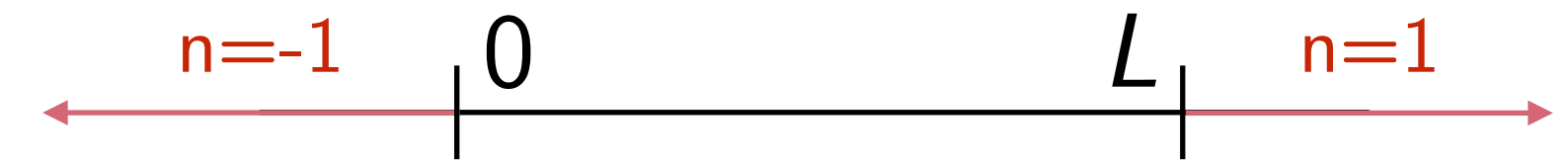
Soit $w \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $w : \underline{x} = (x_1, \dots, x_d) \mapsto w(\underline{x}) \in \mathbb{R}$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$



En 1d, Formule de Stokes = Formule d'intégration par parties

$$\forall w \in C^\infty([a, b]), \quad \int_a^b \frac{dw}{dx} dx = w(b) - w(a)$$



Formule de la divergence, de Green/Ostrogradsky

Soit un champ de vecteur $\underline{U} \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^d$, $\underline{U} : \underline{x} = (x_1, \dots, x_d) \mapsto \underline{U}(\underline{x}) \in \mathbb{R}^d$

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \underline{U}(\underline{x}) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \underline{U}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Gamma$$



voir le TD1- Exo1 pour l'obtention de ces formules

$$\forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \underline{W} \in [C^\infty(\overline{\Omega})]^d \quad \int_{\Omega} \left[v(\underline{x}) \nabla \cdot \underline{W}(\underline{x}) + \nabla v(\underline{x}) \cdot \underline{W}(\underline{x}) \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} v(\underline{x}) \underline{W}(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Gamma$$

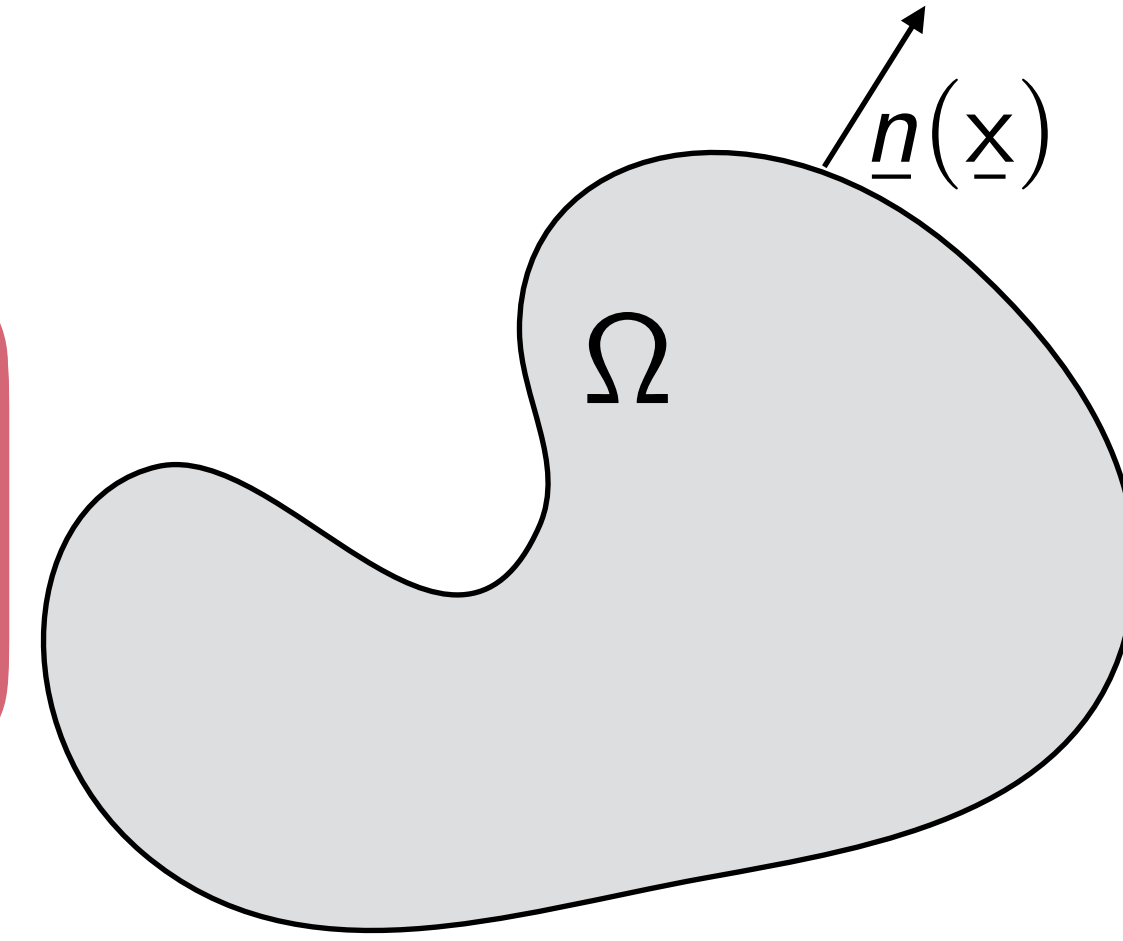
Il suffit de poser dans la formule précédente $\underline{U}(\underline{x}) = v(\underline{x}) \underline{W}(\underline{x})$

Formules de Green

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega$ **suffisamment régulière**.

Formule de Green

$$\forall u, v \in C^\infty(\overline{\Omega}) \quad \int_{\Omega} \left[v(\underline{x}) \Delta u(\underline{x}) + \underline{\nabla} v(\underline{x}) \cdot \underline{\nabla} u(\underline{x}) \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} v(\underline{x}) \underline{\nabla} u(\underline{x}) \cdot \underline{n}(\underline{x}) d\Gamma$$



Cette formule est valable aussi pour $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $v \in C^1(\overline{\Omega})$

Application : on peut construire des formulations variationnelles (ou principe des travaux virtuels)

On cherche $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solution de
$$\begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } \Omega \\ \underline{\nabla} u \cdot \underline{n} = g & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$
 avec $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, $g \in C^\infty(\partial\Omega)$

On multiplie l'EDP par une fonction test v et on intègre sur Ω

$$-\int_{\Omega} \Delta u v d\Omega + \int_{\Omega} u v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

Pour appliquer la formule de Green, on choisit $v \in C^1(\overline{\Omega})$ et on obtient

$$\int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v d\Omega - \int_{\partial\Omega} \underbrace{\underline{\nabla} u \cdot \underline{n}}_{= g \text{ sur } \partial\Omega} v d\Gamma + \int_{\Omega} u v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega$$

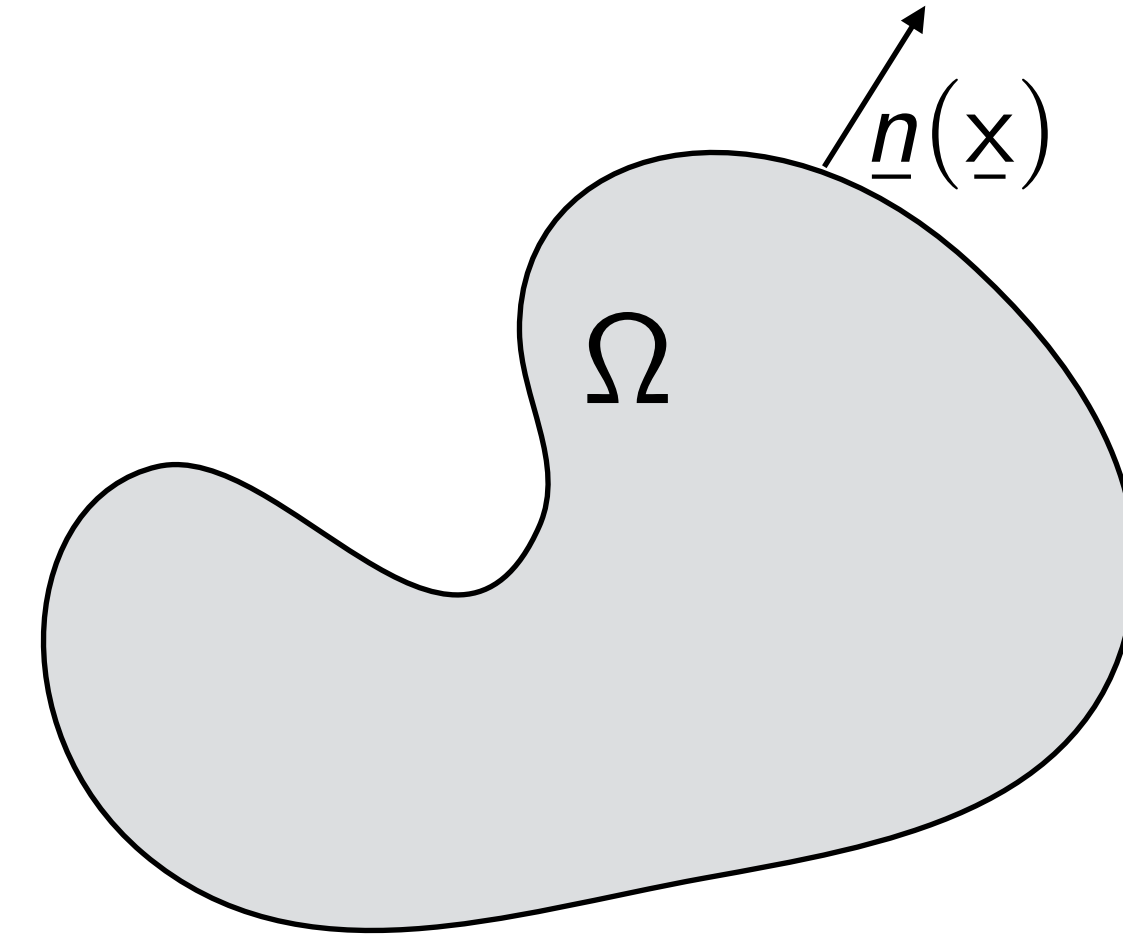
= g sur $\partial\Omega$ d'après la condition aux limites

Formulation variationnelle

On vient d'obtenir une première formulation variationnelle:

Trouver $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solution de

$$\forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma$$



Pourquoi avoir introduit une formulation variationnelle ?

- Elle permet d'évaluer des intégrales plutôt que des dérivées en tout point.
- On a réduit l'ordre de dérivation sur l'inconnue en augmentant celle sur une fonction test.

Cela engendre une certaine "symétrie" entre inconnue et fonctions test.

- Elle a un lien avec l'« énergie » du problème.

Le lien sera montré plus tard dans ce cours (voir aussi le chapitre 1).

- La méthode des éléments finis se base sur la formulation variationnelle.
- Le caractère bien posé du problème (unicité et existence d'une solution et stabilité par rapport aux données) est en général obtenu à partir des formulations variationnelles.

Formulation variationnelle

On vient d'obtenir une première formulation variationnelle:

Trouver $u \in C^2(\overline{\Omega})$ solution de

$$\forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma$$

Unicité? Supposons que u_1 et u_2 sont deux solutions dans $C^2(\overline{\Omega})$, alors

$$\forall v \in C^1(\overline{\Omega}), \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} (u_1 - u_2) \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} (u_1 - u_2) v \, d\Omega = 0$$

En particulier pour $v = u_1 - u_2 \in C^1(\overline{\Omega})$,

$$\int_{\Omega} \|\underline{\nabla} (u_1 - u_2)\|^2 \, d\Omega + \int_{\Omega} (u_1 - u_2)^2 \, d\Omega = 0 \quad \text{ce qui implique que } \underline{u_1 = u_2} \text{ dans } \Omega$$

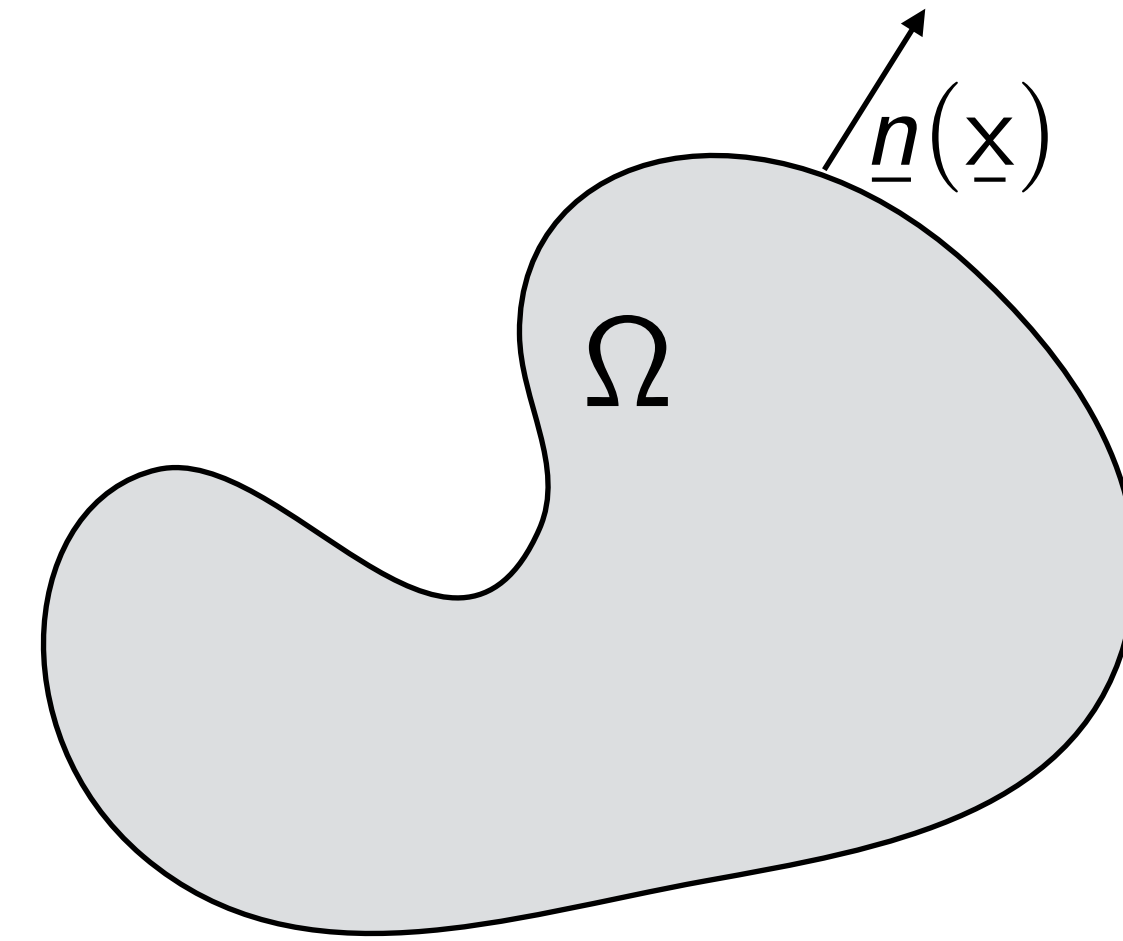
Existence?

On verra qu'il n'existe pas toujours une solution aussi régulière...

Stabilité par rapport aux données?

On verra qu'il n'y a pas toujours stabilité pour la norme naturelle de $C^2(\overline{\Omega})$

Les théorèmes (le théorème de Lax Milgram par exemple) pour répondre à ces questions sont basés sur des formulations varionnelles écrites dans des **espaces de Hilbert**.



Espace de Hilbert (rappels)

Definitions

Un espace **complet** est un espace normé dans lequel *toutes les suites de Cauchy convergent*.

Un espace de **Hilbert** est un *espace vectoriel* muni d'un *produit scalaire* qui est **complet** pour la norme induite par le produit scalaire.

Proposition

Soit F **un sous espace fermé d'un espace de Hilbert** E alors muni de la norme induite par le produit scalaire, c'est un espace de Hilbert.

Preuve : soit une suite de Cauchy d'élément de F , comme F est inclus dans E et que E est complet, la suite de Cauchy converge dans E . Comme F est fermé, la suite converge dans F .

Théorème de représentation de Riesz

Soit $\ell : V \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire sur un espace de Hilbert E qui est **continue**, c'est à dire

$$\exists C > 0, \forall v \in V, \quad |\ell(v)| \leq C \|v\|_V$$

alors il existe un unique $u \in V$ (appelé représentant de Riesz) tel que

$$\forall v \in V, \quad \ell(v) = (u, v)_V.$$

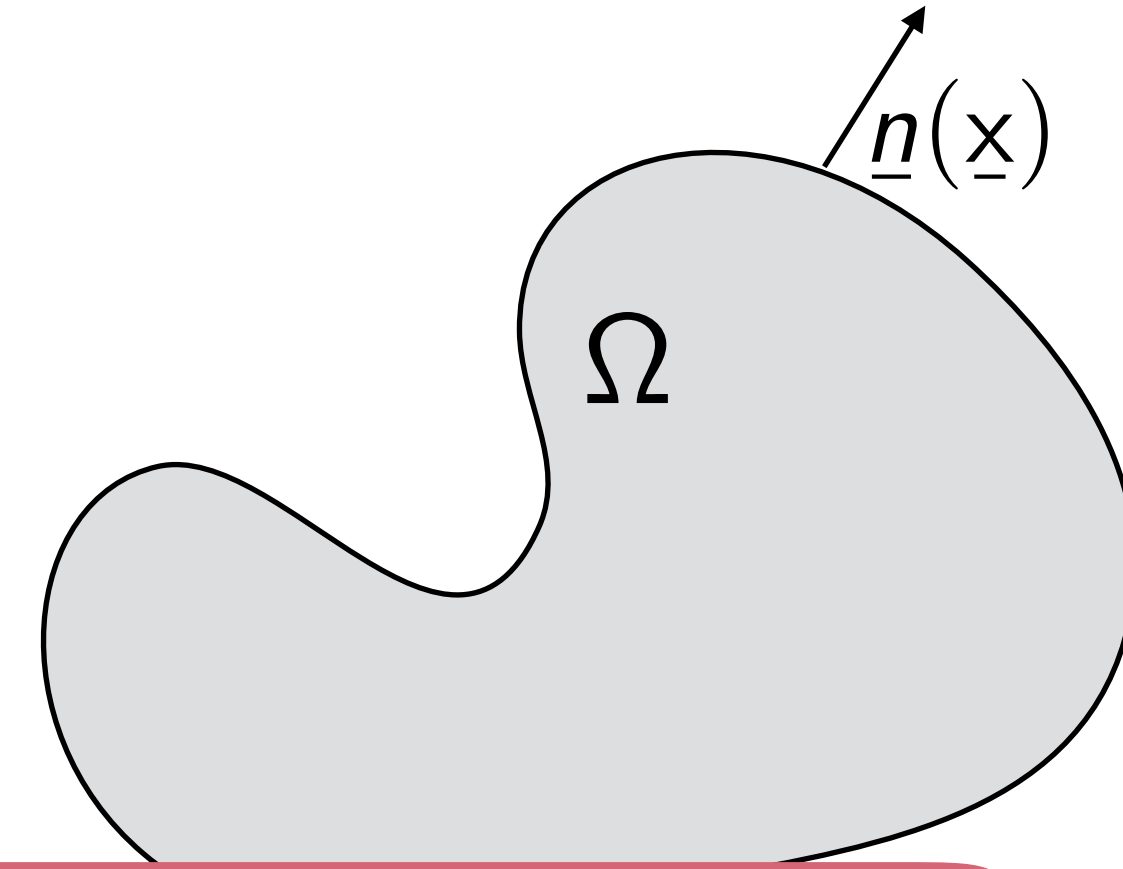
mais aussi le théorème de Lax-Milgram qui sera énoncé et démontré dans le cours 3.

Formulation variationnelle

Trouver $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ solution de

$$\forall v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}), \quad \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega = \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g v \, d\Gamma$$

Est ce que les espaces $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ sont des espaces de Hilbert?



Proposition (admis)

- L'espace $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ muni de la norme $\|f\| := \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| + \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|\underline{\nabla} f(x)\|$ est complet mais cette norme n'est pas induite par un produit scalaire.
- L'espace $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ muni du produit scalaire « naturel » pour ce problème
$$(u, v) \mapsto \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega + \int_{\Omega} uv \, d\Omega$$

n'est pas complet.

On ne peut pas appliquer le théorème de Lax-Milgram dans $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$!

Introduisons maintenant un cadre fonctionnel adapté dans lequel nous pourrions appliquer le théorème de Lax Milgram!

Outils mathématiques

1. Formules de Green pour les fonctions régulières
- 2. Espaces de Sobolev, Dérivation faible dans L^2**
3. Théorème de trace
4. Retour sur les formules de Green

L'espace de Sobolev $L^2(\Omega)$

Definition

$$L^2(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \int_{\Omega} f^2 d\Omega < +\infty \right\}$$

Rappel

Les fonctions mesurables dans Ω sont définies presque partout dans Ω

Exemple : comme Ω est un ouvert borné, on a $C^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$

$$\forall f \in C^0(\overline{\Omega}), \quad \int_{\Omega} |f|^2 d\Omega \leq \left(\sup_{x \in \Omega} |f(x)| \right)^2 |\Omega|$$

Théorème

L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} uv d\Omega$ est un **espace de Hilbert**.

$$\text{On notera } \|u\|_{L^2(\Omega)} := \sqrt{(u, u)_{L^2(\Omega)}} = \left[\int_{\Omega} u^2 d\Omega \right]^{1/2}$$

On note $D(\Omega) (\equiv C_c^\infty(\Omega)) = \{f \in C^\infty(\Omega), \text{ t.q. } \text{Supp}(f) \text{ compact dans } \Omega\}$

Théorème

L'espace $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ c'est à dire :

$$\forall f \in L^2(\Omega), \exists (f_n)_n \in D(\Omega)^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{L^2(\Omega)} = 0$$

Comme $D(\Omega) \subset C^\infty(\overline{\Omega}) \subset C^0(\overline{\Omega}) \subset L^2(\Omega)$, on a également que $C^\infty(\overline{\Omega})$ et $C^0(\overline{\Omega})$ sont denses dans $L^2(\Omega)$.

Dérivation faible dans $L^2(\Omega)$

Definition

On dit que $u \in L^2(\Omega)$ admet une **dérivée faible** dans $L^2(\Omega)$ dans la direction $\underline{e}_i$ ssi il existe $u_i \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\forall \phi \in D(\Omega), \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} u_i \phi d\Omega.$$

Dans ce cas, u_i est appelée la dérivée faible de u dans la direction $\underline{e}_i$ et est notée $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Quand une fonction u admet une dérivée faible dans toutes les directions, elle admet un gradient faible.

La dérivée faible est une extension de la dérivation au sens classique puisque

$$u \in C^1(\Omega), \quad v \in D(\Omega), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v d\Omega = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} d\Omega$$

Pour les personnes connaissant la dérivée au sens des distributions, une fonction $u \in L^2(\Omega) \subset D'(\Omega)$ admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ dans une direction si sa dérivée au sens des distributions est dans $L^2(\Omega)$!

Dérivation faible dans $L^2(\Omega)$

Definition

On dit que $u \in L^2(\Omega)$ admet une dérivée faible dans $L^2(\Omega)$ dans la direction $\underline{e}_i$ ssi il existe $u_i \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\forall \phi \in D(\Omega), \quad \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega} u_i \phi d\Omega.$$

Dans ce cas, u_i est appelée la dérivée faible de u dans la direction $\underline{e}_i$ et est notée $\frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Quand une fonction u admet une dérivée faible dans toutes les directions, elle admet un gradient faible.

Proposition

Soit $u \in L^2(\Omega)$. Si pour $1 \leq i \leq d$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \phi \in D(\Omega), \quad \left| \int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} d\Omega \right| \leq C \|\phi\|_{L^2(\Omega)}$$

alors (d'après le théorème de représentation de Riesz), u admet une dérivée faible dans la direction $\underline{e}_i$.

Definition

On dit que $\underline{U} \in [L^2(\Omega)]^d$ admet une divergence faible dans $L^2(\Omega)$ ssi il existe $w \in L^2(\Omega)$ tel que

$$\forall \phi \in D(\Omega), \quad \int_{\Omega} \underline{U} \cdot \underline{\nabla} \phi d\Omega = - \int_{\Omega} w \phi d\Omega$$

Dans ce cas, w est appelée la divergence faible de $\underline{U}$.

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$

Definition

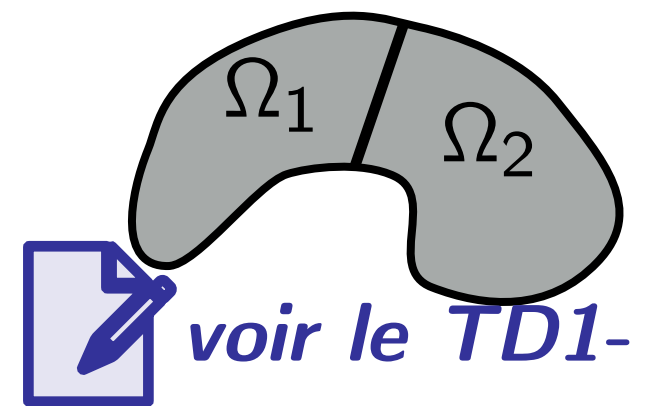
L'espace $H^1(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions de $L^2(\Omega)$ qui admettent une dérivée faible dans toutes les directions

$$H^1(\Omega) := \left\{ v \in L^2(\Omega), \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \quad \forall i \in \{1, \dots, d\} \right\}$$

Exemple 1. Comme Ω est un ouvert borné, on a $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.

Exemple 2. Soit Ω est un ouvert borné avec $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$

Soit $f|_{\Omega_1} \in C^1(\overline{\Omega_1})$ et $f|_{\Omega_2} \in C^1(\overline{\Omega_2})$ alors $f \in C^0(\overline{\Omega}) \Leftrightarrow f \in H^1(\Omega)$



voir le TD1- Exo2

Théorème

L'espace $H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire $(u, v)_{H^1(\Omega)} := \int_{\Omega} [\underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + uv] d\Omega$ est un **espace de Hilbert**.

On notera $\|u\|_{H^1(\Omega)} := \sqrt{(u, u)_{H^1(\Omega)}} = \left[\int_{\Omega} \|\underline{\nabla} u\|^2 + u^2 d\Omega \right]^{1/2}$

Théorème

L'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$ c'est à dire :

$$\forall f \in H^1(\Omega), \exists (f_n)_n \in C^\infty(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - f_n\|_{H^1(\Omega)} = 0$$

Mais l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ ne l'est pas!

L'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$

Definition

L'espace $H_0^1(\Omega)$ est l'**adhérence** de $D(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, c'est à dire l'ensemble des limites des suites d'éléments de $D(\Omega)$ qui sont convergentes dans $H^1(\Omega)$.

Par définition, l'espace $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$.

Proposition

Muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$, l'espace $H_0^1(\Omega)$ est un **espace de Hilbert**.

Preuve: Par définition, $H_0^1(\Omega)$ est un sous espace fermé de $H^1(\Omega)$!

Remarques.

$$\text{Si } \Omega = \mathbb{R}^d, \quad H_0^1(\mathbb{R}^d) = H^1(\mathbb{R}^d)$$

$$\text{Si } \Omega \subsetneq \mathbb{R}^d, \quad H_0^1(\Omega) \subsetneq H^1(\Omega)$$

Les espaces $H^1(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$ sont des espaces qui sont **fondamentaux** dans ce cours.

D'autres espaces de Sobolev

Definition

$$H(\Omega, \text{div}) := \{ \underline{U} \in [L^2(\Omega)]^d, \quad \underline{\nabla} \cdot \underline{U} \in L^2(\Omega) \}$$

Muni du produit scalaire $(\underline{U}, \underline{V})_{H(\Omega, \text{div})} := (\underline{U}, \underline{V})_{L^2(\Omega)} + (\underline{\nabla} \cdot \underline{U}, \underline{\nabla} \cdot \underline{V})_{L^2(\Omega)}$, $H(\Omega, \text{div})$ est un **Hilbert**.

Definition

$$H^2(\Omega) := \{ v \in H^1(\Omega), \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega) \quad \forall i, j \in \{1, \dots, d\} \}$$

Muni du produit scalaire $(u, v)_{H^2(\Omega)} := (u, v)_{H^1(\Omega)} + \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)}$, $H^2(\Omega)$ est un **Hilbert**.

Definition

$$H(\Omega, \Delta) := \left\{ v \in H^1(\Omega), \quad \Delta v \in L^2(\Omega) \right\} = \left\{ v \in H^1(\Omega), \quad \underline{\nabla} v \in H(\Omega, \text{div}) \right\}$$

Muni du produit scalaire $(u, v)_{H(\Omega, \Delta)} := (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$, $H(\Omega, \Delta)$ est un **Hilbert**.

$$\text{Si } \Omega = \mathbb{R}^d, \quad H^2(\mathbb{R}^d) = H(\mathbb{R}^d, \Delta)$$

$$\text{Si } \Omega \subsetneq \mathbb{R}^d, \quad H^2(\Omega) \subsetneq H(\Omega, \Delta)$$

Résultats de densité, prolongement par densité

L'espace $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, $H^2(\Omega)$, $H(\Omega, \Delta)$. L'espace $[C^\infty(\overline{\Omega})]^d$ est dense dans $H(\Omega, \text{div})$.

Pourquoi les résultats de densité sont-ils si intéressants et importants?

Proposition

*Soit H et W des espaces vectoriels (e.v.) normés avec W complet et V un sous e.v. (s.e.v.) **dense** dans H .*

Soit ℓ une application linéaire de V dans W telle que

$$\exists C_\ell > 0, \forall v \in V, \quad \|\ell(v)\|_W \leq C_\ell \|v\|_H$$

Alors ℓ se prolonge par continuité de façon unique en une application ℓ linéaire et continue de H dans W .



voir le TD1- Exo3 pour la preuve

Corollaire

*Soit H et W des e.v. normés avec W complet et V un s.e.v. **dense** dans H .*

Soit a une application bilinéaire de $V \times V$ dans W telle que

$$\exists C > 0, \forall (u, v) \in V \times V, \quad \|a(u, v)\|_W \leq C \|u\|_H \|v\|_H$$

Alors a se prolonge par continuité de façon unique en une application a bilinéaire et continue de $H \times H$ dans W .

Applications de tous ces résultats

Avec ces espaces de Hilbert, on a introduit un cadre fonctionnel dans lequel nous pourrions appliquer le théorème de Lax-Milgram.

Mais les formules de Green sont établies pour des fonctions très régulières!

Par exemple, prenons

$$\forall w \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$

Peut on étendre cette formule de Green à des fonctions qui sont seulement dans un de ces espaces de Sobolev?

- L'application $w \mapsto \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega$ s'étend aux fonctions de $H^1(\Omega)$ puisque
$$\forall w \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \left| \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega \right| \leq \left(\int_{\Omega} d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right|^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq C_{\Omega} \|w\|_{H^1}$$

Il suffit ensuite d'utiliser le prolongement par continuité puisque $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

- Qu'en est-il de l'application $w \mapsto \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma$? S'étend-elle aux fonctions de $H^1(\Omega)$?

C'est moins évident étant donnée la définition de $H^1(\Omega)$! C'est quand même vrai grâce au **théorème de trace**.

Outils mathématiques

1. Formules de Green pour les fonctions régulières
2. Espaces de Sobolev, Dérivation faible dans L^2
- 3. Théorème de trace**
4. Retour sur les formules de Green

Premier théorème de trace

Théorème

L'application trace par $\gamma_0 : C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow L^2(\partial\Omega) = \{f \text{ mes. sur } \partial\Omega \text{ t.q. } \int_{\partial\Omega} |f|^2 d\Gamma < +\infty\}$
 $v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$

est bien définie et vérifie

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall v \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$



voir le TD1- Exo4 pour la preuve dans un cas particulier.

Comme $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$, on peut appliquer le théorème de prolongement par continuité :

L'application trace se prolonge par continuité en $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ et vérifie
 $v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

Remarque 1 : On peut définir de la même façon l'application trace $v \mapsto v|_\Gamma$ sur un bout du bord $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Remarque 2 : L'inégalité est fausse quand on remplace $H^1(\Omega)$ par $L^2(\Omega)$ car

$$\exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C^\infty(\overline{\Omega})^{\mathbb{N}}, \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} = 1 \quad \text{et} \quad \|v_n\|_{L^2(\Omega)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

On ne peut pas parler de la trace d'une fonction de $L^2(\Omega)$ qui n'est pas dans $H^1(\Omega)$!

Premier théorème de trace

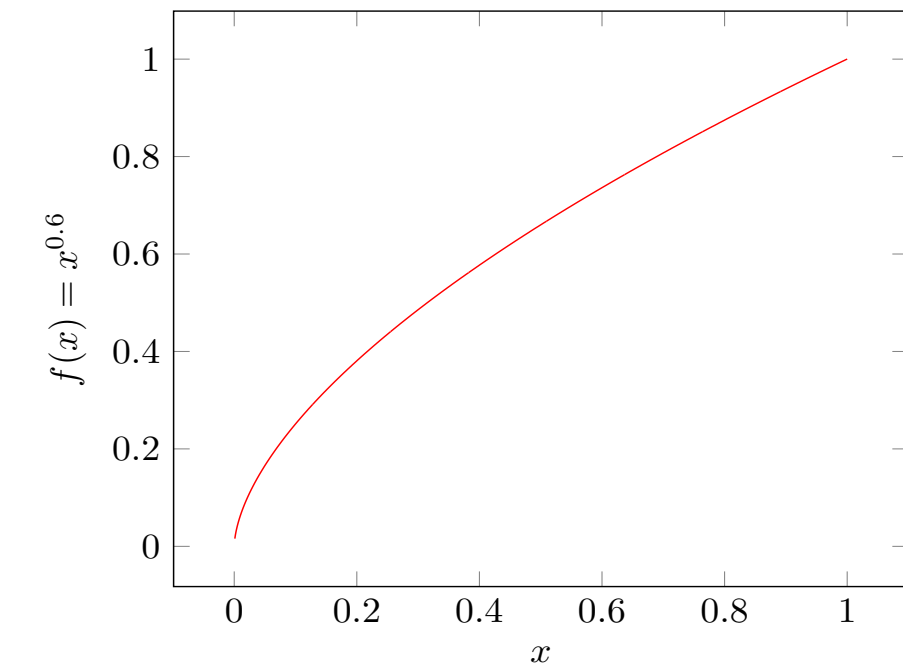
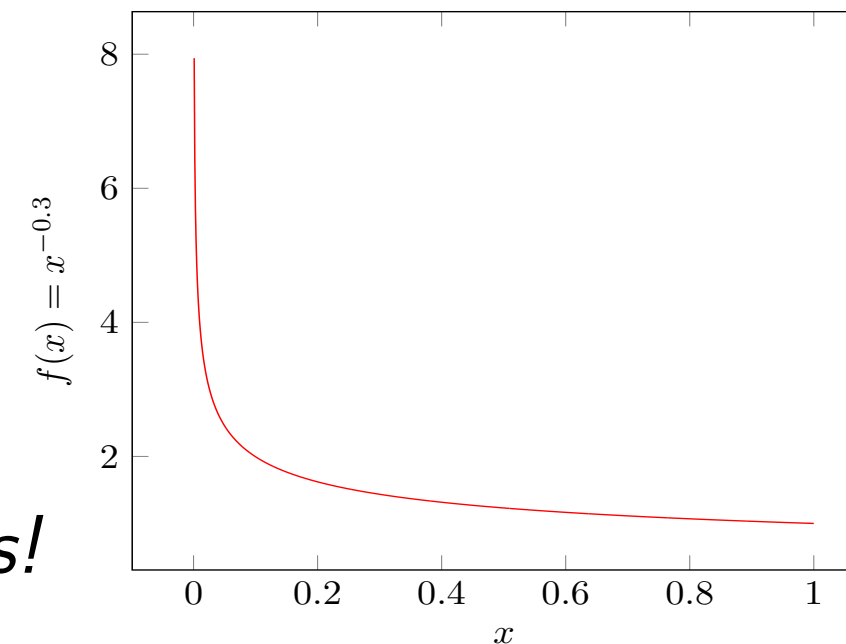
Exemple 1 : $\Omega =]0, 1[$, $\partial\Omega = \{0\} \cup \{1\}$, on se concentre sur $\gamma_0 : v \mapsto v(0)$

$$f_\beta : x \mapsto x^\beta$$

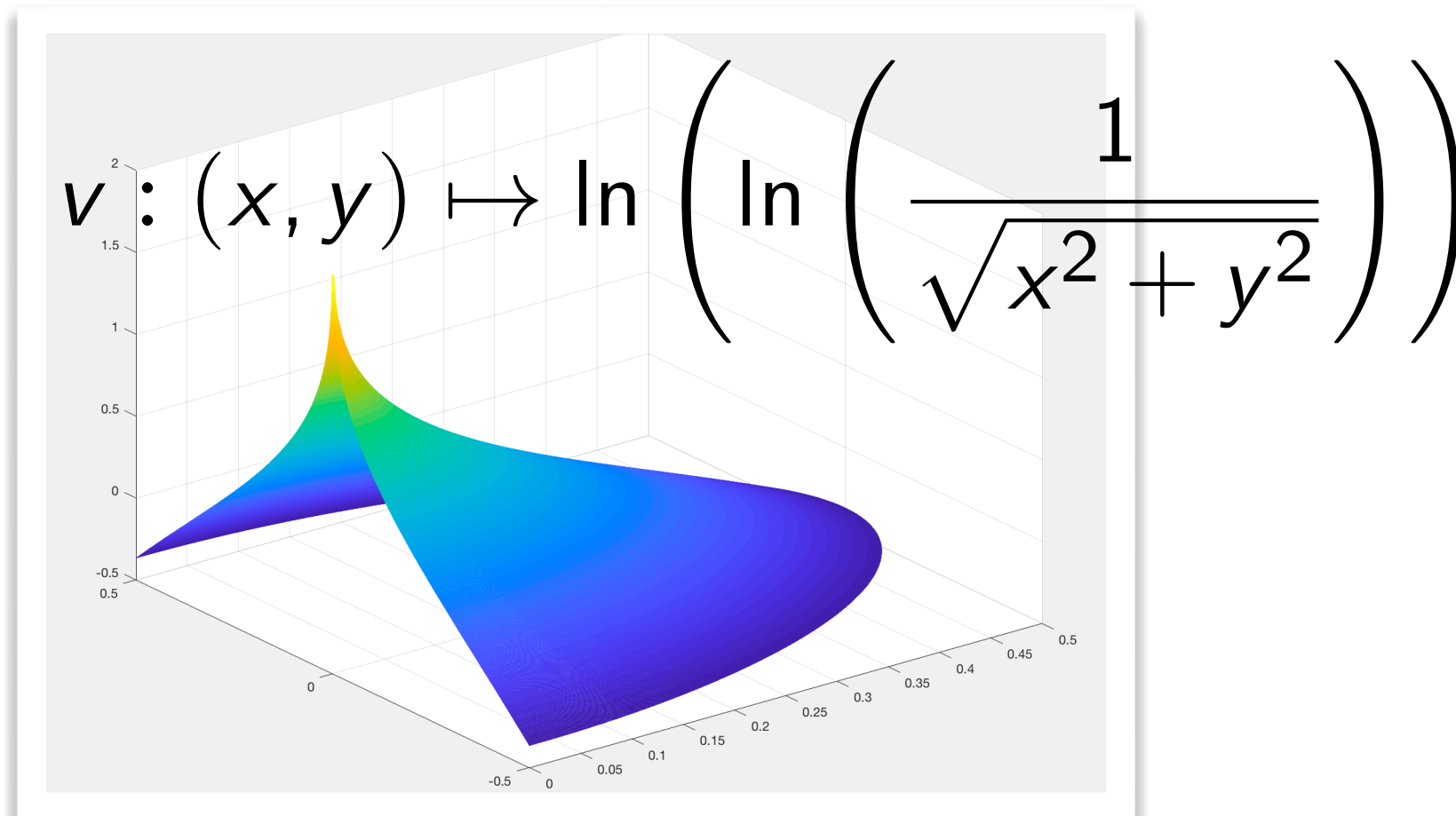
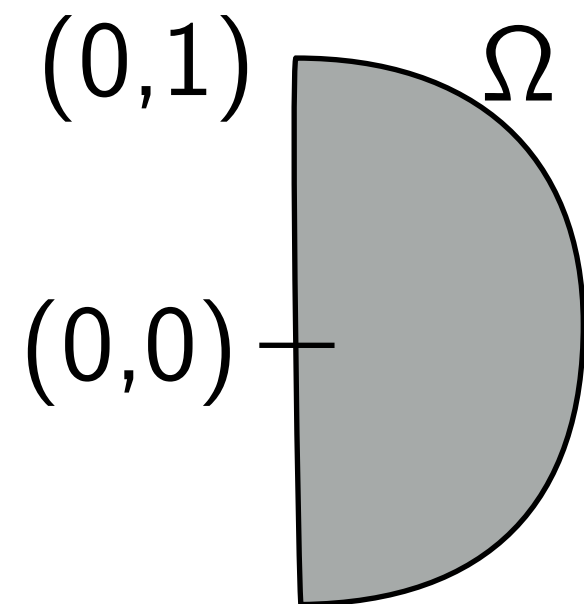
$$f_\beta \in L^2(]0, 1[) \text{ ssi } \beta > -1/2 \text{ et } f_\beta \in H^1(]0, 1[) \text{ ssi } \beta > 1/2$$

f_β a une trace (ici c est une valeur) en $x = 0$ si $\beta \geq 0$

C'est bien cohérent avec les résultats précédents!

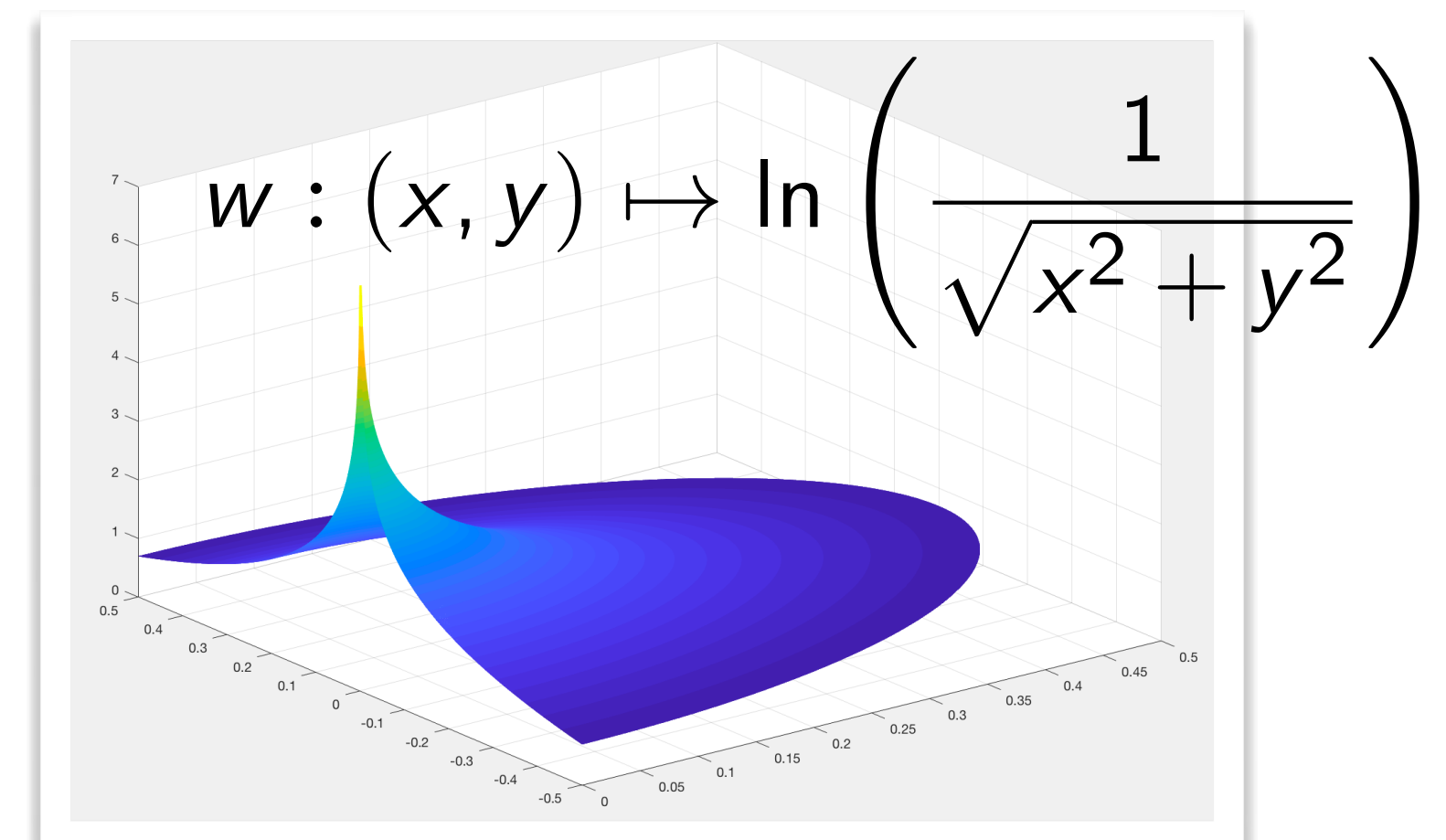


Exemples en 2D :



$v \notin C^0(\overline{\Omega})$ elle n'est pas continue en $(0,0)$!

$v \in H^1(\Omega)$: d'après le théorème de trace, on peut définir sa trace sur le bord et $v|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)$



$w \in L^2(\Omega)$ mais $w \notin H^1(\Omega)$

Sa trace sur le bord $\partial\Omega$ n'est pas dans $L^2(\partial\Omega)$

Premier théorème de trace

Théorème

L'application trace se prolonge par continuité en $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ et vérifie

$$v \mapsto \gamma_0 v = v|_{\partial\Omega}$$

$$\exists C_0 > 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \|v|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C_0 \|v\|_{H^1(\Omega)}$$

L'application trace n'est pas surjective!

L'image de l'application trace, $\text{Im}\gamma_0$, est un sous espace strict de $L^2(\partial\Omega)$ qui est **dense** dans $L^2(\partial\Omega)$.

Cet espace sera noté en général dans le cours $\text{Im}\gamma_0$. Il est souvent noté dans la littérature $H^{1/2}(\partial\Omega)$.

L'application trace n'est pas injective!

Le noyau de l'application trace est $H_0^1(\Omega)$. Autrement dit, $H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}$

Preuve de $\subset$.

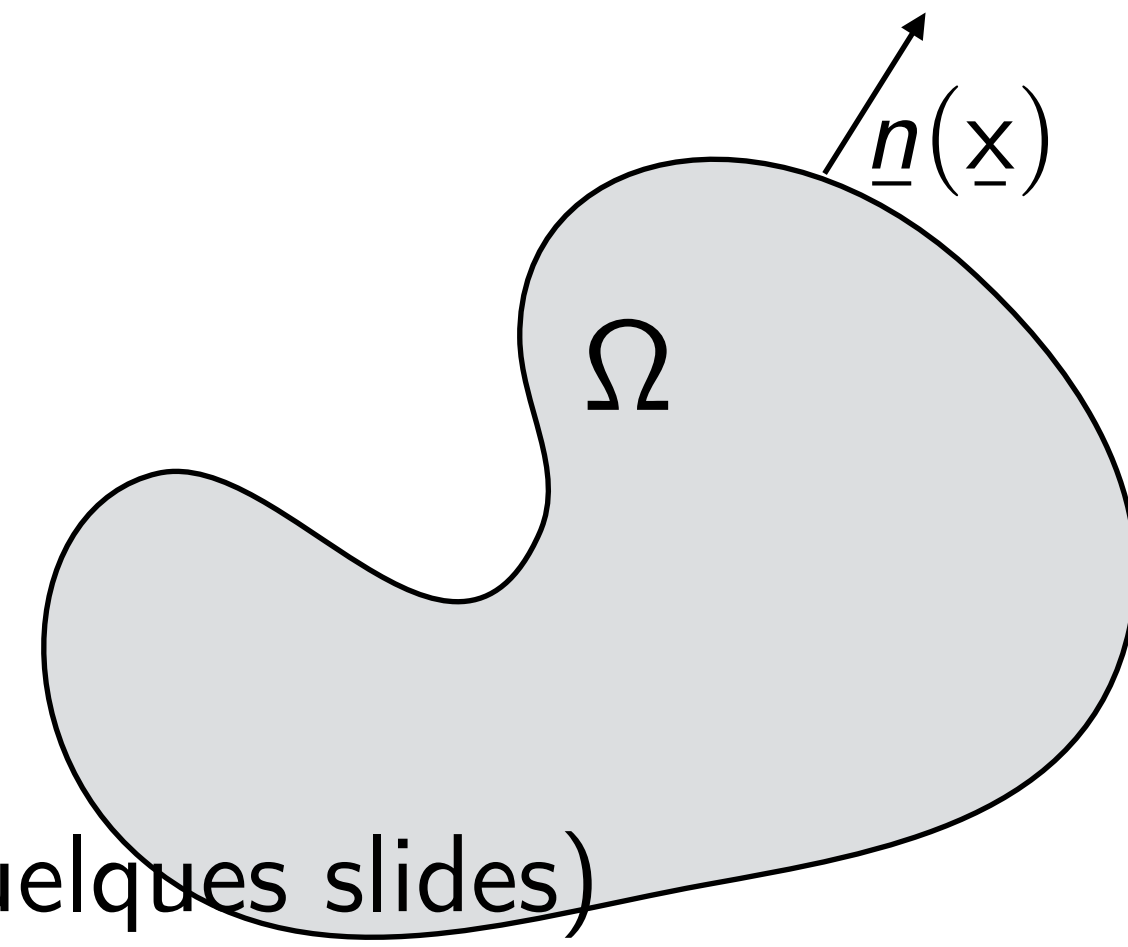
Outils mathématiques

1. Formules de Green pour les fonctions régulières
2. Espaces de Sobolev, Dérivation faible dans L^2
3. Théorème de trace
4. Retour sur les formules de Green

Généralisation de la première formule de Green

Peut on étendre aux fonctions de $H^1(\Omega)$ la formule de Green

$$\forall w \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$



- L'application $w \mapsto \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega$ s'étend aux fonctions de $H^1(\Omega)$ (preuve il y a quelques slides)

- L'application $w \mapsto \int_{\partial\Omega} w n_i d\Gamma$ s'étend aussi aux fonctions de $H^1(\Omega)$ puisque

$$\forall w \in C^\infty(\overline{\Omega}), \quad \left| \int_{\partial\Omega} \gamma_0 w n_i d\Gamma \right| \leq \left(\int_{\partial\Omega} |n_i|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \left(\int_{\partial\Omega} |\gamma_0 w|^2 d\Gamma \right)^{1/2} \leq C_\Omega \|\gamma_0 w\|_{L^2(\partial\Omega)}$$

$$\leq C'_\Omega \|w\|_{H^1(\Omega)}$$

d'après la continuité de l'application trace

Il suffit ensuite d'utiliser le prolongement par continuité puisque $C^\infty(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$.

- Comme l'égalité est vraie dans $C^\infty(\overline{\Omega})$, elle est vraie dans $H^1(\Omega)$!  **A faire en exercice**

Théorème

$$\forall w \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} d\Omega = \int_{\partial\Omega} w|_{\partial\Omega} n_i d\Gamma \quad 1 \leq i \leq d$$

Prochaine séance

1. Extension aux autres Formules de Green
2. Formulation variationnelle pour le problème de Dirichlet
3. Formulation variationnelle pour le problème de Neumann