

Corrigé de la PC6 : Schémas numériques pour les équations hyperboliques linéaires.

13 avril 2026

EXERCICE 1 (LE SCHÉMA DE LAX-WENDROFF POUR L'ÉQUATION DE TRANSPORT)

Soit u une solution régulière de l'équation de transport (la vitesse c , constante, est supposée strictement positive) :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

Question 1. Montrer que

$$\left| \begin{aligned} u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) - c\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) \\ &\quad - \frac{c^3 \Delta t^3}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_j, t^n) + \frac{c^4 \Delta t^4}{24} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^5). \end{aligned} \right. \quad (2)$$

Nous proposons la famille de schémas suivante (dépendant du paramètre μ) pour la résolution numérique de l'équation du transport :

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{c}{2h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) - \frac{\mu \Delta t}{h^2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) = 0. \quad (3)$$

Obtenir la valeur de μ pour laquelle la méthode est consistante, au moins, à l'ordre deux. Nous appellerons le schéma ainsi obtenu le schéma de Lax-Wendroff. Discuter la précision du schéma lorsque $c \Delta t = h$.

Corrigé de la question 1 : Pour effectuer l'étude de consistance de la méthode, u étant une solution régulière de l'équation de transport, nous notons

$$U_j^n := u(x_j, t^n), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n := \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n), \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n := \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n), \dots$$

Par un développement de Taylor en t , on a

$$U_j^{n+1} = U_j^n + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{\Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^n + \frac{\Delta t^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \right)_j^n + \frac{\Delta t^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^5) \quad (4)$$

Mais u étant solution de l'équation de transport, on démontre par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{\partial^n u}{\partial t^n} = (-c)^n \frac{\partial^n u}{\partial x^n} \quad (5)$$

En effet, (5) est vrai pour $n = 1$ (c'est l'équation de transport). Supposons que (5) soit vrai pour $n \geq 1$. Par dérivation de (5) en t nous obtenons

$$\frac{\partial^{n+1}u}{\partial t^{n+1}} = (-c)^n \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^n u}{\partial x^n} = (-c)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \frac{\partial u}{\partial t} = (-c)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left(-c \frac{\partial u}{\partial x} \right) = (-c)^{n+1} \frac{\partial^{n+1}u}{\partial x^{n+1}}$$

où nous avons à nouveau utilisé le fait que u est solution de l'équation de transport. Quand on utilise (5) dans (4), on obtient

$$U_j^{n+1} = U_j^n - c\Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{c^2 \Delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{c^3 \Delta t^3}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{c^4 \Delta t^4}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^5), \quad (6)$$

ce qui entraîne (2). Par ailleurs, grâce à des développements de Taylor en x , on a

$$\begin{aligned} (a) \quad \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{h^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^4), \\ (b) \quad \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned} \quad (7)$$

alors que par ailleurs, nous déduisons de (6) que

$$\frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = -c \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j^n + \frac{c^2 \Delta t}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n - \frac{c^3 \Delta t^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j^n + \frac{c^4 \Delta t^3}{24} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^n + \mathcal{O}(\Delta t^4). \quad (8)$$

En effectuant la combinaison linéaire (8) + $c \cdot (7)(a)$ - $\mu \Delta t \cdot (7)(b)$, nous obtenons

$$\left| \begin{aligned} \varepsilon_j^n &= \Delta t \left(\frac{c^2}{2} - \mu \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + c \frac{h^2 - c^2 \Delta t^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j^n \\ &\quad + \left(\frac{c^4 \Delta t^3}{24} - \mu \frac{\Delta t h^2}{12} \right) \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^4 + \Delta t^4) \end{aligned} \right. \quad (9)$$

On voit que le schéma est toujours consistant (puisque ε_j^n tend vers 0 quand Δt et h tendent vers 0) et qu'il est d'ordre 2 si et seulement si

$$\mu = c^2/2. \quad (10)$$

Pour $c\Delta t/h = 1$, le schéma s'écrit $u_j^{n+1} = u_{j-1}^n$, équation qui est aussi vérifiée par la solution exacte. En effet, d'après la méthode des caractéristiques

$$U_j^{n+1} = u^0(x_j - ct^{n+1}) = u^0(x_j - ct^n - c\Delta t) = u^0(x_j - h - ct^n) = u^0(x_{j-1} - ct^n) = U_{j-1}^n,$$

le schéma est donc exact dans ce cas particulier.

Question 2. Donner une équation équivalente du schéma de Lax Wendroff à partir du terme prépondérant de l'erreur de consistance, équation dont les coefficients seront exprimés en fonction de c , h et $\alpha := c\Delta t/h$ (nombre CFL). Le schéma sera-t-il principalement dissipatif ou dispersif?

Corrigé de la question 2 : En utilisant la formule (9) pour $\mu = c^2/2$ (cf. (10)), on obtient, $\alpha = c\Delta t/h$ étant fixé

$$\varepsilon_j^n = c h^2 \frac{1 - \alpha^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_j^n + c \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)}{24} h^3 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^n + O(h^4 + \Delta t^4)$$

On obtient donc une équation équivalente

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} + c h^2 \frac{1 - \alpha^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (11)$$

On remarque que le terme d'ordre 2 correspond à un terme de dispersion.

L'équation équivalente (11) ne permet pas d'énoncer des théorèmes mais elle donne des indications qualitatives. En l'occurrence, pour le schéma de Lax-Wendroff, le premier phénomène induit par la discrétisation est la dispersion numérique (d'ordre 2) alors que la dissipation numérique, si elle est effectivement présente, sera d'ordre supérieur. Tout ceci sera confirmé par l'étude de dispersion numérique (Question 4).

Question 3. Calculer le coefficient d'amplification du schéma de Lax-Wendroff et en déduire sa stabilité sous condition CFL.

Corrigé de la question 3 : Pour l'analyse de stabilité L^2 du schéma, rappelons que la méthode de Fourier Von-Neumann revient à chercher des solutions de (3) qui soient de la forme

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0, \quad u_j^n := \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j}. \quad (12)$$

Introduisons le coefficient CFL, $\alpha := \frac{c\Delta t}{h}$, auquel cas, (3) avec $\mu = c^2/2$ se réécrit

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\alpha}{2} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\alpha^2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (13)$$

En substituant (12) dans (13), nous obtenons la relation de récurrence pour $\hat{u}^n(\xi)$:

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t) \hat{u}^n(\xi), \quad (14)$$

avec $\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = 1 - \frac{\alpha}{2} (e^{i\xi h} - e^{-i\xi h}) + \frac{\alpha^2}{2} (e^{i\xi h} - 2 + e^{-i\xi h})$, soit

$$\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = 1 - i\alpha \sin \xi h + \alpha^2 (\cos \xi h - 1). \quad (15)$$

Il s'agit, par définition du coefficient d'amplification du schéma. Pour étudier la stabilité L^2 du schéma, étudions le module de $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$. On calcule

$$\begin{aligned} |\hat{S}_h(\xi, \Delta t)|^2 &= 1 + 2\alpha^2 (\cos \xi h - 1) + \alpha^4 (\cos \xi h - 1)^2 + \alpha^2 \sin^2 \xi h \\ &= 1 + \alpha^2 (2\cos \xi h - 2 + 1 - \cos^2 \xi h) + \alpha^4 (\cos \xi h - 1)^2 \\ &= 1 + (\alpha^4 - \alpha^2)(\cos \xi h - 1)^2 = 1 + 4(\alpha^4 - \alpha^2) \sin^4 \left(\frac{\xi h}{2} \right). \end{aligned}$$

Distinguons alors deux cas

- (i) Si $\alpha \leq 1$, alors $\alpha^4 - \alpha^2 \leq 0$ et $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| = 1$: le schéma est donc stable.
- (ii) Si $\alpha > 1$, alors $\alpha^4 - \alpha^2 > 0$ et $\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| = \sqrt{1 + 4(\alpha^4 - \alpha^2)}$: le schéma est instable.

Question 4. On rappelle que la solution u de l'équation de transport peut s'écrire en fonction de u^0 :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}^0(\xi) e^{i(x-ct)\xi} d\xi$$

Ceci montre que l'équation de transport n'est ni **dissipative**, les ondes planes $e^{i\xi x}$ ne sont pas atténuées au cours du temps, et ni **dispersive**, les ondes planes $e^{i\xi x}$ se propage toutes à la même vitesse c . On s'intéresse maintenant à la version continue en espace du schéma (3) pour $\mu = c^2/2$, qui s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{u_h^{n+1}(x) - u_h^n(x)}{\Delta t} + c \frac{u_h^n(x+h) - u_h^n(x-h)}{2h} \\ - \frac{c^2 \Delta t}{2} \frac{(u_h^n(x+h) - 2u_h^n(x) + u_h^n(x-h))}{h^2} = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

où u_h^n est l'interpolation linéaire de $(u_j^n)_{j \in \mathbb{Z}}$ (voir le cours pour une définition précise). Montrer que, si $u_h^0(x)$ est donnée, la solution $u_h^n(x)$ de (16) est donnée par

$$u_h^n(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_h^0(\xi) e^{-a_h(\xi, \Delta t)t^n} e^{i\xi(x-c_h(\xi, \Delta t)t^n)} d\xi \quad (17)$$

où on exprimera $a_h(\xi, \Delta t)$ (qui quantifie la dissipation numérique) et $c_h(\xi, \Delta t)$ (qui quantifie la dispersion numérique) en fonction du coefficient d'amplification $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$.

Corrigé de la question 4 : En reprenant les calculs de la question 3, il est facile de voir que la transformée de Fourier $\hat{u}_h^n(\xi)$ de $u_h^n(x)$ est donnée par

$$\hat{u}_h^n(\xi) = [\hat{S}_h(\xi, \Delta t)]^n \hat{u}_h^0(\xi)$$

et donc par transformation de Fourier inverse

$$u_h^n(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_h^n(\xi) e^{ix\xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}} [\hat{S}_h(\xi, \Delta t)]^n \hat{u}_h^0(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (18)$$

Écrivons la représentation polaire du nombre complexe $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$:

$$\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = |\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| e^{i \arg \hat{S}_h(\xi, \Delta t)} \quad (\text{où, par convention, } \arg z \in [0, 2\pi[)$$

Par conséquent, si nous posons

$$a_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln (|\hat{S}_h(\xi, \Delta t)|) \quad \text{et} \quad c_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{\xi \Delta t} \arg (\hat{S}_h(\xi, \Delta t)), \quad (19)$$

nous pouvons réécrire

$$\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = e^{-a_h(\xi, \Delta t) \Delta t} e^{-i\xi c_h(\xi, \Delta t) \Delta t} \quad \text{et donc} \quad [\hat{S}_h(\xi, \Delta t)]^n = e^{-a_h(\xi, \Delta t) t^n} e^{-i\xi c_h(\xi, \Delta t) t^n}.$$

(17) découle alors de (18). Notons que si $|\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| \leq 1$ (stabilité) alors $a_h(\xi, \Delta t) \geq 0$.

Rappelons que la formule (17) permet d'interpréter la fonction u_h^n comme la superposition (continue) par rapport à la variable de Fourier spatiale ξ d'ondes harmoniques. Pour chacune d'entre elles :

- ξ est (déf.) le nombre d'onde et $\lambda = \frac{2\pi}{\xi}$ la longueur d'onde (période spatiale),
- $(x, t) \rightarrow \xi (x - c_h(\xi, \Delta t) t)$ est la phase de l'onde, $c_h(\xi, \Delta t)$ la vitesse de phase,
- $\hat{u}_h^0(\xi) e^{-a_h(\xi, \Delta t)t}$ est l'amplitude de l'onde et $a_h(\xi, \Delta t)$ son taux de décroissance.

Le fait que $c_h(\xi, \Delta t)$ dépende effectivement de ξ caractérise ce que l'on appelle la dispersion numérique. Plus $c_h(\xi, \Delta t)$ s'écarte de c plus le schéma numérique est dispersif.

Le temps $\tau_h(\xi, \Delta t) = a_h(\xi, \Delta t)^{-1}$ est le temps au bout duquel l'amplitude de l'onde est divisée par $e \simeq 2.81$. Ce temps dépend aussi de ξ . Plus il est court, c'est à dire plus le taux $a_h(\xi, \Delta t)$ est grand, plus le schéma numérique est dissipatif.

Question 5. Déterminer l'équivalent des quantités

$$r_h(\xi, \Delta t) \quad \text{et} \quad \varepsilon_{c,h}(\xi, \Delta t) = c - c_h(\xi, \Delta t).$$

pour h petit et α constant. Commenter.

Corrigé de la question 5 : D'après (15), on a

$$a_h(\xi, \Delta t) = -\frac{1}{2\Delta t} \ln [1 + 4(\alpha^4 - \alpha^2) \sin^4(\xi h/2)]$$

Si $\alpha = 1$ alors $a_h(\xi, \Delta t) = 0$, ce à quoi on s'attendait puisque le schéma est exact.

De plus, pour h assez petit, un développement limité montre que

$$a_h(\xi, \Delta t) \sim c \frac{\alpha(1 - \alpha^2)}{8} \xi^4 h^3. \quad (20)$$

Par ailleurs, toujours d'après (15),

$$\operatorname{Re} \hat{S}_h(\xi, \Delta t) = 1 - \alpha^2(1 - \cos \xi h), \quad \operatorname{Im} \hat{S}_h(\xi, \Delta t) = -\alpha \sin \xi h$$

Comme $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ tend vers 1 quand h tend vers 0, $\operatorname{Arg} \hat{S}_h(\xi, \Delta t) \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ pour h assez petit et on peut écrire

$$\operatorname{Arg} \hat{S}_h(\xi, \Delta t) = \arctan \left(\frac{\operatorname{Im} \hat{S}_h(\xi, \Delta t)}{\operatorname{Re} \hat{S}_h(\xi, \Delta t)} \right) = -\arctan \left(\frac{\alpha \sin \xi h}{1 - \alpha^2(1 - \cos \xi h)} \right)$$

Effectuons des développements de Taylor

$$\begin{cases} \alpha \sin \xi h = \alpha \xi h \left(1 - \frac{\xi^2 h^2}{6} + O(\xi^4 h^4) \right), \\ 1 - \alpha^2 (1 - \cos \xi h) = 1 - \alpha^2 \frac{\xi^2 h^2}{2} + O(\xi^4 h^4) \end{cases}$$

d'où nous déduisons

$$\frac{\alpha \sin \xi h}{1 - \alpha^2 (1 - \cos \xi h)} = \alpha \xi h \left(1 + \frac{3\alpha^2 - 1}{6} \xi^2 h^2 + O(\xi^4 h^4) \right)$$

et par conséquent, cpmme $\arctan \delta = \delta - \frac{\delta^3}{3} + O(\delta^5)$,

$$\begin{aligned} \text{Arg } \hat{S}_h(\xi, \Delta t) &= -\alpha \xi h \left(1 + \frac{3\alpha^2 - 1}{6} \xi^2 h^2 - \frac{\alpha^2}{3} \xi^2 h^2 + O(\xi^4 h^4) \right) \\ &= \alpha \xi h \left(1 + \frac{\alpha^2 - 1}{6} \xi^2 h^2 + O(\xi^4 h^4) \right). \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après l'expression (19) de $c_h(\xi, \Delta t)$, comme $\alpha h = c \Delta t$,

$$c_h(\xi, \Delta t) = c \left(1 + \frac{\alpha^2 - 1}{6} \xi^2 h^2 + O(\xi^4 h^4) \right),$$

et donc

$$\varepsilon_c(\xi, \Delta t) \sim c \frac{1 - \alpha^2}{6} \xi^2 h^2 \quad (h \rightarrow 0). \quad (21)$$

Donc si $\alpha \leq 1$ (condition de stabilité), on a $c_h(\xi, \Delta t) < c$, la solution se propage avec un petit retard par rapport à la solution continue

Les résultats (20) et (21) confirment les informations fournies par l'équation équivalente (question 2), à savoir que la dispersion numérique est un phénomène du second ordre alors que la dissipation numérique est d'ordre 3 ((21)).

EXERCICE 2 (UN SCHÉMA POUR L'ÉQUATION DES ONDES.)

On s'intéresse à l'approximation de l'équation des ondes 1D :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (22)$$

On rappelle que, pour toute fonction u suffisamment régulière :

$$\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))}{h^2} = \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \frac{h^2}{12} \frac{d^4 u}{dx^4}(x) + O(h^4) \quad (23)$$

On introduit l'opérateur aux différences finies :

$$A_h^1 u(x) = -c^2 \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h))}{h^2}$$

et on considère le schéma numérique, appelé **schéma saute-mouton**

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h^1 u_h^n = 0 \quad (24)$$

Question 1. Expliquer sans calculs pourquoi ce schéma est consistant. Étudier la vitesse de propagation numérique et en déduire une condition nécessaire de convergence du schéma.

Corrigé de la question 1 : Il suffit d'utiliser le développement (23), ainsi que son équivalent en temps, pour déduire que le schéma est consistant, d'ordre 2 en temps et en espace.

De plus, le support de la solution numérique se propage à vitesse finie au sens où

$$\text{supp } u_h^n \subset [a, b] \implies \text{supp } u_h^{n+1} \subset [a - h, b + h].$$

Autrement dit, la vitesse de propagation numérique est donnée par :

$$V_{num} = \frac{h}{\Delta t}$$

La vitesse de propagation des ondes étant c ici, une condition nécessaire de stabilité est $V_{num} \geq c$, ce qui se réécrit :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq 1$$

Question 2. Déterminer le symbole de A_h^1 , c'est à dire la fonction $\hat{A}_h^1(\xi)$ telle que :

$$\mathcal{F}(A_h^1 u)(\xi) = \hat{A}_h^1(\xi) \mathcal{F}u(\xi)$$

(on exprimera $\hat{A}_h^1(\xi)$ uniquement à l'aide de $\sin^2(\xi h/2)$).

Corrigé de la question 2 : Rappelons que si on note $(\tau_{qh} u_h)(x) = u_h(x + qh)$ alors

$$\mathcal{F}(\tau_{qh} u_h)(\xi) = e^{iq\xi h} \hat{u}_h(\xi).$$

On a alors immédiatement :

$$\mathcal{F}(A_h^1 u_h)(\xi) = -c^2 \frac{e^{i\xi h} - 2 + e^{-i\xi h}}{h^2} \hat{u}_h(\xi)$$

d'où l'on déduit que :

$$\hat{A}_h^1(\xi) = 2c^2 \frac{1 - \cos(\xi h)}{h^2} = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2\left(\frac{\xi h}{2}\right). \quad (25)$$

Question 3. Par la méthode de Fourier, déterminer la condition de stabilité L^2 du schéma (24). Commenter.

Corrigé de la question 3 : Dans les variables de Fourier, le schéma (24) se réécrit :

$$\widehat{u}_h^{n+1}(\xi) + (\Delta t^2 \hat{A}_h^1(\xi) - 2) \widehat{u}_h^n(\xi) + \widehat{u}_h^{n-1}(\xi) = 0$$

On s'est donc ramenés pour chaque ξ à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est donnée par :

$$r^2 - (2 - \Delta t^2 \hat{A}_h^1(\xi)) r + 1 = 0 \quad (26)$$

Soient $r_1(\xi, \Delta t)$ et $r_2(\xi, \Delta t)$ les deux racines (complexes) de (26). Comme les solutions de (30) sont des combinaisons linéaires des suites géométriques $[r_1(\xi, \Delta t)]^n$ et $[r_2(\xi, \Delta t)]^n$, la condition nécessaire et suffisante de stabilité L^2 du schéma s'écrit

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad |[r_1(\xi, \Delta t)]^n| \leq 1 + \nu \Delta t \quad \text{et} \quad |[r_2(\xi, \Delta t)]^n| \leq 1 + \nu \Delta t. \quad (27)$$

Or le produit des deux racines, donc leur produit de leurs modules, vaut 1. Soit $\Delta_h(\xi)$ le discriminant de l'équation (31). Cette équation étant à coefficients réels, pour chaque ξ , de deux choses l'une :

- (i) $\Delta_h(\xi) > 0$. Les deux racines sont réelles distinctes et au moins une des deux est de module strictement supérieur à 1. On peut montrer en écrivant son expression que la racine de module strictement supérieur à 1 ne vérifie pas (27). Cela entraînera donc l'instabilité du schéma.
- (ii) $\Delta_h(\xi) \leq 0$. Les deux racines sont complexes conjuguées (incluant le cas où elles sont réelles et confondues) auquel cas elles sont toutes deux de module 1.

La condition nécessaire de stabilité du schéma est donc qu'on soit dans la situation (ii), i. e. $\Delta_h(\xi) \leq 0$, pour toutes les valeurs de ξ . Or, $\Delta_h(\xi)$ est donné par

$$\Delta_h(\xi) = (\Delta t^2 \hat{A}_h^1(\xi) - 2)^2 - 4 = \Delta t^2 \hat{A}_h^1(\xi) (\Delta t^2 \hat{A}_h^1(\xi) - 4)$$

Comme $\hat{A}_h^1(\xi) \geq 0$, $\Delta_h(\xi) \leq 0$ équivaut à

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \Delta t^2 \hat{A}_h^1(\xi) - 4 \leq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta t^2 \sup_{\xi} \hat{A}_h^1(\xi) \leq 4$$

Comme $\sup_{\xi} \hat{A}_h^1(\xi) = \frac{4c^2}{h^2}$ (cf. (25)), la condition de stabilité CFL du schéma est donc :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq 1,$$

ce qui est exactement la condition nécessaire que nous avons déduit de la vitesse de propagation numérique.

Nous cherchons maintenant à construire un schéma plus précis à partir d'une combinaison linéaire de deux schémas saute-mouton définis sur deux grilles différentes (une de pas h , une de pas $2h$).

Ainsi, étant donné $\gamma \in \mathbb{R}$, on introduit l'opérateur aux différences finies :

$$A_h^\gamma u(x) = -\gamma c^2 \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - (1-\gamma) c^2 \frac{u(x+2h) - 2u(x) + u(x-2h)}{4h^2},$$

et on considère le schéma numérique

$$\frac{u_h^{n+1} - 2u_h^n + u_h^{n-1}}{\Delta t^2} + A_h^\gamma u_h^n = 0 \quad (28)$$

Question 4. Expliquer sans calculs pourquoi ce schéma est consistant quel que soit γ . Étudier la vitesse de propagation numérique et en déduire une condition nécessaire de convergence du schéma.

Corrigé de la question 4 : L'opérateur A_h^γ est la combinaison linéaire de deux opérateurs aux différences finies consistants, dont la somme des coefficients vaut 1 : c'est donc un opérateur consistant.

De plus, le support de la solution numérique se propage à vitesse finie au sens où

$$\text{supp } u_h^n \subset [a, b] \implies \text{supp } u_h^{n+1} \subset [a - 2h, b + 2h].$$

Autrement dit, la vitesse de propagation numérique est donnée par :

$$V_{num} = \frac{2h}{\Delta t}$$

La vitesse de propagation des ondes étant c ici, une condition nécessaire de stabilité est $V_{num} \geq c$, ce qui se réécrit :

$$\frac{c\Delta t}{h} \leq 2.$$

Question 5. Déterminer la valeur γ_0 de γ pour laquelle, pour toute fonction $u(x)$ suffisamment régulière :

$$A_h^\gamma u(x) = -c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + O(h^4).$$

Corrigé de la question 5 : En utilisant (23), il vient :

$$\begin{aligned} A_h^\gamma u(x) &= -\gamma c^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \frac{h^2}{12} \frac{d^4 u}{dx^4}(x) \right) - (1 - \gamma) c^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2}(x) + \frac{4h^2}{12} \frac{d^4 u}{dx^4}(x) \right) + O(h^4) \\ &= -c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}(x) - \frac{h^2}{12} (4 - 3\gamma) c^2 \frac{d^4 u}{dx^4}(x) + O(h^4) \end{aligned}$$

Alors pour $\gamma = \gamma_0 = \frac{4}{3}$, le terme devant la dérivée d'ordre 4 s'annule, et on obtient :

$$A_h^{\gamma_0} u(x) = -c^2 \frac{d^2 u}{dx^2}(x) + O(h^4)$$

Question 6. Calculer le symbole $\hat{A}_h^\gamma(\xi)$ de A_h^γ uniquement à l'aide de $\sin^2(\xi h/2)$.

Montrer que $\hat{A}_h^\gamma(\xi) \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\gamma \geq 0$.

Corrigé de la question 6 : Comme $A_h^\gamma = \gamma A_h^1 + (1 - \gamma) A_{2h}^1$, pour les symboles

$$\hat{A}_h^\gamma(\xi) = \gamma \hat{A}_h^1(\xi) + (1 - \gamma) \hat{A}_{2h}^1(\xi). \quad (29)$$

Donc, en utilisant (25),

$$\hat{A}_h^\gamma(\xi) = \frac{4c^2}{h^2} \left(\gamma \sin^2 \frac{\xi h}{2} + \frac{1 - \gamma}{4} \sin^2 \xi h \right).$$

Comme $\sin^2 \xi h = 4 \sin^2 \frac{\xi h}{2} (1 - \sin^2 \frac{\xi h}{2})$, nous obtenons finalement, avec $s := \sin \frac{\xi h}{2}$,

$$\hat{A}_h^\gamma(\xi) = \frac{4c^2}{h^2} (\gamma s^2 + (1 - \gamma) s^2 (1 - s^2)),$$

soit encore, tous calculs effectués

$$\hat{A}_h^\gamma(\xi) = \frac{4c^2}{h^2} \sin^2 \frac{\xi h}{2} \left(1 - (1 - \gamma) \sin^2 \frac{\xi h}{2} \right).$$

De toute évidence si $\gamma \geq 1$, c'est à dire si $1 - \gamma \leq 0$, $\hat{A}_h^\gamma(\xi) \geq 0$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Si $\gamma < 1$, la fonction $s^2 \in [0, 1] \rightarrow 1 - (1 - \gamma) s^2$ décroît de 1 à γ . La fonction $\hat{A}_h^\gamma(\xi)$ reste donc positive si et seulement si $\gamma \geq 0$, ce qui achève la démonstration du résultat.

Notons que la positivité de $\hat{A}_h^\gamma(\xi)$ pour $0 \leq \gamma \leq 1$ est aussi une conséquence du fait que $\hat{A}_h^\gamma(\xi)$ est alors une combinaison convexe de deux fonctions positives (cf. (29)).

Question 7. Par la méthode de Fourier, déterminer la condition de stabilité L^2 du schéma (28), pour tout γ et en particulier pour γ_0 . Commenter.

Corrigé de la question 7 : Dans les variables de Fourier, le schéma (28) se réécrit :

$$\hat{u}_h^{n+1}(\xi) - (2 - \Delta t^2 \hat{A}_h^\gamma(\xi)) \hat{u}_h^n(\xi) + \hat{u}_h^{n-1}(\xi) = 0 \quad (30)$$

On s'est donc ramené pour chaque ξ à l'étude d'une suite récurrente d'ordre 2. L'équation caractéristique associée est donnée par :

$$r^2 - (2 - \Delta t^2 \hat{A}_h^\gamma(\xi)) r + 1 = 0 \quad (31)$$

En raisonnant exactement comme à la question 3, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour que le schéma soit stable est que le discriminant $\Delta_h(\xi)$ de (31) soit négatif pour toutes les valeurs de ξ . Or, ce déterminant est donné par

$$\Delta_h(\xi) = (\Delta t^2 \hat{A}_h^\gamma(\xi) - 2)^2 - 4 = \Delta t^2 \hat{A}_h^\gamma(\xi) (\Delta t^2 \hat{A}_h^\gamma(\xi) - 4)$$

La différence essentielle avec le cas de la question 3 est que le symbole $\hat{A}_h^\gamma(\xi)$ n'est pas toujours positif, ce qui complique l'analyse. Cela étant, de deux choses l'une

- (a) si $\gamma < 0$, il existe des valeurs de ξ pour lesquelles $\hat{A}_h^\gamma(\xi) < 0$. Pour ces ξ , a fortiori $\Delta t^2 \hat{A}_h^\gamma(\xi) - 4 < 0$ et donc $\Delta_h(\xi) > 0$: le schéma est donc instable.

(b) si $\gamma \geq 0$, $\hat{A}_h^\gamma(\xi) \geq 0$ pour tout ξ et Le schéma est stable si et seulement si :

$$\Delta t^2 \hat{A}_h^\gamma(\xi) - 4 \leq 0 \quad \text{i. e.} \quad \Delta t^2 \sup_{\xi} \hat{A}_h^\gamma(\xi) < 4. \quad (32)$$

Comme $\hat{A}_h^\gamma(\xi) = \frac{4c^2}{h^2} F_\gamma(\sin^2 \frac{\xi h}{2})$, $F_\gamma(x) := x(1 - (1 - \gamma)x)$, (32) devient :

$$c^2 \frac{\Delta t^2}{h^2} \sup_{x \in [0,1]} F_\gamma(x) \leq 1. \quad (33)$$

On va maintenant évaluer $\sup_{x \in [0,1]} F_\gamma(x)$.

· Si $\gamma \geq 1$, $x \mapsto F_\gamma(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\sup_{x \in [0,1]} F_\gamma(x) = F_\gamma(1) = \gamma$.

· Si $\gamma < 1$, $x \mapsto F_\gamma(x)$ admet son maximum sur $\mathbb{R}^+$ en $x = x_\gamma := \frac{1}{2(1-\gamma)} > 0$ et $F_\gamma(x_\gamma) = \frac{1}{4(1-\gamma)}$

On remarque que $x_\gamma < 1$ si et seulement si $\gamma < 1/2$. Par conséquent

$$\begin{cases} \text{si } \gamma \geq \frac{1}{2}, \text{ alors } x_\gamma > 1 \text{ et } F_\gamma \text{ est croissante sur } (0, 1) & \sup_{x \in [0,1]} F_\gamma(x) = F_\gamma(1) = \gamma \\ \text{si } \gamma < \frac{1}{2}, & \sup_{x \in [0,1]} F_\gamma(x) = F_\gamma(x_\gamma) = \frac{1}{4(1-\gamma)}. \end{cases}$$

Pour résumer, le schéma n'est stable que si $\gamma \geq 0$ et sous la condition de stabilité :

$$c \frac{\Delta t}{h} \leq C(\gamma), \quad C(\gamma) = 2\sqrt{1-\gamma} \text{ si } \gamma \in [0, \frac{1}{2}], \quad C(\gamma) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \text{ si } \gamma > \frac{1}{2}. \quad (34)$$

Le lecteur pourra vérifier que $\gamma \mapsto C(\gamma)$ est continue et décroît strictement de 2 (c'est à dire pour le schéma saute-mouton associé à un maillage de pas $2h$) à 0 (pour $\gamma \rightarrow +\infty$) en passant par 1 pour $\gamma = 1$ (i. e. pour le schéma-saute mouton).

En particulier, pour $\gamma > 0$, la condition de stabilité CFL est strictement plus contraignante que la condition nécessaire que nous avons déduit de la vitesse de propagation numérique.

Voici un exercice supplémentaire (hors programme) pour aller plus loin...

EXERCICE 3 (ÉTUDE DU SCHÉMA DE NEWMARK PAR MÉTHODE ÉNERGÉTIQUE)

Soit u la solution de l'équation des ondes 1D :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \end{cases} \quad (35)$$

Question 1. Démontrer que pour toutes conditions initiales u_0 et v_0 à support compact, l'énergie

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} c^2 \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx$$

se conserve au cours du temps.

Corrigé de la question 1 :

En multipliant (35) par la vitesse $\frac{\partial u}{\partial t}$ et on intégrant sur $\mathbb{R}$, on obtient,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial u}{\partial t} \left(c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx = 0.$$

La solution se propageant à vitesse finie, elle est à support compact pour tout temps. Ainsi, en intégrant par parties le second terme de l'identité ci-dessus, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} c^2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx + \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(c \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx = 0.$$

qui donne bien le résultat annoncé par dérivation sous le signe somme.

Question 2. Écrire l'équation vérifiée par le couple $(u, v) = \left(u, \frac{\partial u}{\partial t} \right)$.

Corrigé de la question 2 :

Introduisant la vitesse $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, nous pouvons réécrire (35) sous la forme d'un système

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}(x, 0) = \begin{bmatrix} u_0(x) \\ v_0(x) \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Question 3. On étudie le schéma de Newmark défini par

$$\begin{aligned} (a) \quad & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{v_j^n + v_j^{n+1}}{2} = 0 \\ (b) \quad & \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\Delta t} + \left(A_h \left(\frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2} \right) \right)_j = 0 \end{aligned} \quad (37)$$

où A_h est l'opérateur aux différences finies défini par

$$\forall w_h = (w_j)_j \in \ell^2(\mathbb{Z}), \quad (A_h w_h)_j = -\frac{c^2}{h} \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} - \frac{w_j - w_{j-1}}{h} \right).$$

Montrer que ce schéma est équivalent au suivant

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} + \left(A_h \left(\frac{u_h^{n+1} + 2u_h^n + u_h^{n-1}}{4} \right) \right)_j = 0, \quad (38)$$

Corrigé de la question 3 : En soustrayant deux pas de temps consécutifs de (37)(a), on a

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{2}.$$

De même en additionnant deux pas de temps consécutifs de (37)(b), on obtient

$$\frac{v_j^{n+1} - v_j^{n-1}}{\Delta t} + \left(A_h \left(\frac{u_h^{n+1} + 2u_h^n + u_h^{n-1}}{2} \right) \right)_j = 0.$$

On en déduit (38).

Question 4. Soit (u, v) , une solution régulière du système obtenu à la question 2. Nous posons

$$U_j^n = u(jh, n\Delta t), \quad V_j^n = v(jh, n\Delta t)$$

L'idée est de voir les équations comme centrées au point x_j et à l'instant $t^{n+\frac{1}{2}}$ et de contrôler les deux erreurs de troncature

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^{n+\frac{1}{2}} &:= \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} - \frac{V_j^n + V_j^{n+1}}{2}, \\ \eta_j^{n+\frac{1}{2}} &:= \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\Delta t} - \frac{c^2}{2} \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} \right). \end{aligned}$$

Montrer que ce schéma est consistant. Quel est son ordre ?

Corrigé de la question 4 : Effectuons des développements de Taylor autour du point $(x_j, t^{n+\frac{1}{2}})$. En gardant la même notation $(\cdot)_j^n, \dots$ que dans le corrigé de l'exercice 1, nous pouvons écrire

$$\begin{cases} U_j^{n+1} &= U_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{8} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \\ U_j^n &= U_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{8} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{cases} V_j^{n+1} &= V_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{8} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^3), \\ V_j^n &= V_j^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{8} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^3). \end{cases} \quad (40)$$

En prenant la différence des deux équations de (39) (divisée par Δt) et et la demi-somme des deux équations de (40), nous obtenons

$$\varepsilon_j^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} - (v)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^2) = \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (41)$$

compte tenu de la première équation de (36). De même (cf. (7)(b), exercice 1), on a

$$\begin{aligned} \frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^n + \mathcal{O}(h^4), \\ \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^{n+1} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^{n+1} + \mathcal{O}(h^4). \end{aligned}$$

Et donc, comme pour toute fonction régulière $f(t)$ (en s'inspirant de (39))

$$\frac{1}{2} [f(t^n) + f(t^{n+1})] = f(t^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{\Delta t^2}{4} f''(t^{n+\frac{1}{2}}) + \mathcal{O}(\Delta t^4)$$

nous obtenons (noter que $\mathcal{O}(\Delta t^2 h^2) = \mathcal{O}(\Delta t^4 + h^4)$)

$$\left| \frac{1}{2} \left(\frac{U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n}{h^2} + \frac{U_{j+1}^{n+1} - 2U_j^{n+1} + U_{j-1}^{n+1}}{h^2} \right) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{h^2}{12} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t^2}{4} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial t^2} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^4 + h^4). \right. \quad (42)$$

En prenant la différence des deux équations de (40) (divisée par Δt) et en utilisant (42), nous obtenons

$$\eta_j^{n+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} - c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^{n+\frac{1}{2}} + \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2) = \mathcal{O}(\Delta t^2 + h^2). \quad (43)$$

compte tenu de la seconde équation de (36). De (41) et (43), on déduit que le schéma est au moins d'ordre 2 en temps et en espace.

Question 5. On munit l'espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ du produit scalaire

$$(u_h, v_h) := \sum_j u_j v_j h$$

et on notera $\|\cdot\|$ la norme associée. Démontrer que A_h est un opérateur symétrique et positif dans $\ell^2(\mathbb{Z})$, c'est à dire

$$\forall (v_h, w_h) \in \ell^2(\mathbb{Z})^2, \quad (v_h, A_h w_h) = (A_h v_h, w_h), \quad (A_h v_h, v_h) \geq 0.$$

Corrigé de la question 5 : Remarquons tout d'abord que le h dans la définition du produit scalaire vient de l'identification de $u_h \in \ell^2(\mathbb{Z})$ à la fonction $\tilde{u}_h(x) \in L^2(\mathbb{R})$ telle que

$$\tilde{u}_h(x) = u_j, \quad \forall x \in]x_j - \frac{h}{2}, x_j + \frac{h}{2}[, \quad x_j = jh, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

et on a dans ce cas

$$(u_h, v_h) = \int_{\mathbb{R}} \tilde{u}_h(x) \tilde{v}_h(x) dx,$$

Pour répondre à la question, il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} (A_h v_h, w_h) &= \sum_j -\frac{c^2}{h} \left[\frac{v_{j+1} - v_j}{h} - \frac{v_j - v_{j-1}}{h} \right] w_j \\ &= \frac{c^2}{h} \sum_j \left[-\frac{v_{j+1} - v_j}{h} w_j \right] + \frac{c^2}{h} \sum_j \left[\frac{v_j - v_{j-1}}{h} w_j \right] \end{aligned}$$

En faisant un changement d'indice $j \rightarrow j+1$ dans la deuxième somme, il vient

$$\begin{aligned} (A_h v_h, w_h) &= \frac{c^2}{h} \sum_j \left[-\frac{v_{j+1} - v_j}{h} w_j \right] + \frac{c^2}{h} \sum_j \left[\frac{v_{j+1} - v_j}{h} w_{j+1} \right] \\ &= c^2 \sum_j \left(\frac{v_{j+1} - v_j}{h} \right) \left(\frac{w_{j+1} - w_j}{h} \right). \end{aligned}$$

Il est alors facile de conclure puisque l'expression dans le terme de droite est symétrique en (v_h, w_h) et est une somme de carrés pour $v_h = w_h$.

Question 6. En déduire que toute solution de (37) satisfait

$$\forall n \geq 0, \quad \mathcal{E}^{n+1} = \mathcal{E}^n, \quad \text{où} \quad \mathcal{E}^n = \frac{1}{2} \|v_h^n\|^2 + \frac{1}{2} (u_h^n, A_h u_h^n).$$

Corrigé de la question 6 : En prenant le produit scalaire de (37)(b) avec $\frac{v_h^{n+1} + v_h^n}{2}$ on a

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(\|v_h^{n+1}\|^2 - \|v_h^n\|^2 \right) + \left(\frac{v_h^{n+1} + v_h^n}{2}, A_h \left(\frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2} \right) \right) = 0.$$

Donc, par (37)(a), on a

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(\|v_h^{n+1}\|^2 - \|v_h^n\|^2 \right) + \left(\frac{u_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t}, A_h \left(\frac{u_h^{n+1} + u_h^n}{2} \right) \right) = 0,$$

ce qui donne, comme $(u_h^{n+1}, A_h u_h^n) = (u_h^n, A_h u_h^{n+1})$,

$$\frac{1}{2\Delta t} \left(\|v_h^{n+1}\|^2 - \|v_h^n\|^2 \right) + \frac{1}{2\Delta t} \left((u_h^{n+1}, A_h u_h^{n+1}) - (u_h^n, A_h u_h^n) \right) = 0,$$

soit le résultat escompté.

Question 7. Conclure sur la stabilité L^2 du schéma, en montrant les estimations

$$\forall n \geq 0, \quad \|v_h^n\| \leq \sqrt{2\mathcal{E}_0}, \quad \|u_h^n\| \leq \|u_h^0\| + t^n \sqrt{2\mathcal{E}_0}, \quad t^n := n\Delta t \quad (44)$$

Corrigé de la question 7 : La conservation de l'énergie (question 6) nous donne, compte tenu de la définition de $\mathcal{E}^n$ et du résultat de positivité de la question 5,

$$\forall n \geq 0, \quad \|v_h^n\|^2 \leq 2\mathcal{E}_n = 2\mathcal{E}_0,$$

soit la première des inégalités de stabilité (44). Pour la stabilité de u_h^n , il suffit d'utiliser la relation (37)(a) qui nous donne

$$\|u_h^{n+1}\| \leq \|u_h^n\| + \frac{\Delta t}{2} [\|v_h^n\| + \|v_h^{n+1}\|],$$

puis d'utiliser l'inégalité obtenue pour $\|v_h^n\|$ pour aboutir à

$$\|u_h^{n+1}\| \leq \|u_h^n\| + \Delta t \sqrt{2\mathcal{E}_0}.$$

Par récurrence, on obtient la seconde des inégalité de stabilité (44) :

$$\forall n \geq 0, \quad \|u_h^{n+1}\| \leq \|u_h^0\| + t^n \sqrt{2\mathcal{E}_0}.$$