

PC5 : Résolution numérique d'équations hyperboliques liées en 1D

30 mars 2026

- ▷ Le but de cette PC est de compléter les sources Matlab fournies qui sont téléchargeables sur le moodle du site du cours.
- ▷ Ce projet fonctionne avec Matlab. Si vous n'avez pas accès à Matlab, utilisez Octave (<https://www.gnu.org/software/octave/>) disponible gratuitement pour toutes les plateformes et qui est un clone de Matlab.

Nous nous intéressons à l'équation du transport

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + c(t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (1)$$

On supposera que la condition initiale $u^0(\cdot)$ est 1-périodique. La solution de l'EDP sera alors aussi 1-périodique par rapport à sa variable x et on pourra restreindre notre étude à l'intervalle $x \in [0, 1]$.

On étudiera deux expressions possibles pour la vitesse $c(t)$:

$$\forall t > 0, \quad \left\{ \begin{array}{ll} c(t) = 0.8 & \text{cas (i)} \\ c(t) = \sin(10t) & \text{cas (ii)} \end{array} \right.$$

De même on utilisera deux formes de condition initiale :

$$\forall x \in [0, 1], \quad \left\{ \begin{array}{ll} u^0(x) = a \exp\left(-\frac{(x-1/2)^2}{\sigma^2}\right) & \text{(gaussienne)} \\ u^0(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} - x & \text{si } \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{2}. \end{cases} & \text{(chapeau)} \end{array} \right.$$

Nous nous intéressons ici à la résolution numérique du problème (1) à l'aide de schémas aux différences finies, pour $t \in [0, 1]$.

EXERCICE 1 (SCHÉMAS EXPLICITES ET IMPLICITE)

On se propose dans un premier temps de tester quelques schémas explicites et un schéma implicite. On souhaite en particulier tester les conditions de stabilité étudiées lors des PCs précédentes.

Pour la discrétisation de l'équation, nous divisons

— l'intervalle en temps $[0, 1]$ en N_t segments de taille $\Delta t = 1/N_t$ et on note

$$t^n = (n - 1)\Delta t, \quad \text{pour } n \in \llbracket 1; N_t + 1 \rrbracket;$$

— l'intervalle en espace $[0, 1]$ en N_x intervalles de taille $h = 1/N_x$ et on note

$$x_j = (j - 1)h, \quad \text{pour } j \in \llbracket 1; N_x + 1 \rrbracket.$$

On a en particulier $x_1 = 0$ et $x_{N_x+1} = 1$.

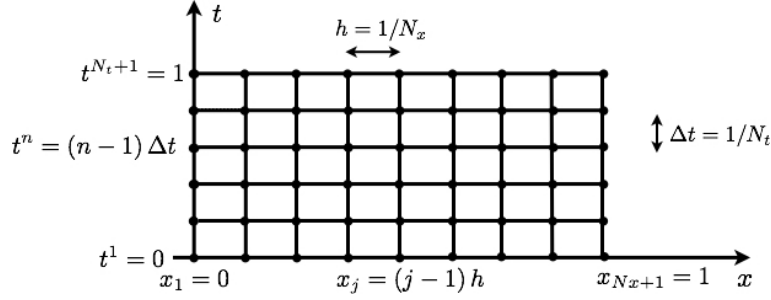


FIGURE 1 – Paramètres de discrétisation

Dans la suite, on note u_j^n la solution approchée du problème (1)

$$u_j^n \approx u(x_j, t^n)$$

qui vérifie

$$u_j^1 = u^0(x_j).$$

Elle est donnée soit par les schémas décentrés (2)-(3), soit par le schéma de Lax-Wendroff (4) ou soit par le schéma implicite (5).

Question 1. Nous introduisons le schéma décentré, donné par $\forall n \in \llbracket 1; N_t \rrbracket$,

— si $c(t^n) < 0$,

$$\left| \begin{array}{l} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c(t^n) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad \forall j \in \llbracket 1; N_x \rrbracket \\ u_{N_x+1}^{n+1} = u_1^{n+1} \quad (\text{conditions périodiques}) \end{array} \right. \quad (2)$$

— si $c(t^n) \geq 0$,

$$\left| \begin{array}{l} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c(t^n) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad \forall j \in \llbracket 2; N_x + 1 \rrbracket \\ u_1^{n+1} = u_{N_x+1}^{n+1} \quad (\text{conditions périodiques}) \end{array} \right. \quad (3)$$

a) Rappeler l'ordre de consistance et les conditions de stabilité du schéma décentré dans le cas d'une vitesse constante [TD4, Ex1]. On admettra dans la suite que pour le cas d'une vitesse variable, l'ordre de consistance est le même et si $\sup |c| \Delta t / h \leq 1$ alors le schéma est stable.

b) Implémenter ce schéma dans le fichier `explicite.m`.

c) On cherche maintenant à vérifier numériquement le comportement attendu théoriquement de ce schéma. Pour commencer, tester ce schéma dans le cas (i), i.e. la vitesse constante, et la condition initiale (gaussienne) pour plusieurs valeurs de $\frac{\Delta t}{h}$

1. $\frac{\Delta t}{h} = 1.25$, par exemple $N_t = 80$ et $N_x = 100$ puis $N_t = 400$ et $N_x = 500$. Que vaut le coefficient CFL α dans ces cas de figure?
2. $\frac{\Delta t}{h} = 1$, par exemple $N_t = N_x = 100$ puis $N_t = N_x = 400$;
3. $\frac{\Delta t}{h} = 1.5$, par exemple $N_t = 400$ et $N_x = 600$.

Commenter chacun des résultats obtenus. En particulier, que se passe-t-il quand on fait varier $\frac{\Delta t}{h}$? Que se passe-t-il quand on fait varier les pas de temps et d'espace à $\frac{\Delta t}{h}$ fixé? Expliquer (en faisant des liens avec les résultats vus en TD ainsi que les notions du cours) le comportement des différentes solutions numériques.

d) Faire de même pour la condition initiale (chapeau). Commenter en comparant avec les résultats obtenus à la question précédente.

e) Revenons au cas de la condition initiale (gaussienne). Reprendre la question **c)** pour le cas (ii), i.e. le cas de la vitesse variable. Commenter et comparer avec les résultats obtenus à la question **c)**.

Question 2. On considère maintenant le schéma de Lax-Wendroff, donné par $\forall n \in \llbracket 1; N_t \rrbracket$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c(t^n) \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} - \frac{\Delta t c^2(t^n)}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0, \quad j \in \llbracket 2; N_x \rrbracket, \\ \frac{u_1^{n+1} - u_1^n}{\Delta t} + c(t^n) \frac{u_2^n - u_{N_x}^n}{2h} - \frac{\Delta t c^2(t^n)}{2} \frac{u_2^n - 2u_1^n + u_{N_x}^n}{h^2} = 0, \\ u_{N_x+1}^{n+1} = u_1^{n+1} \end{array} \right. \quad (4)$$

où pour les 2 dernières relations, nous avons utilisé la périodicité de la solution.

On étudiera dans le prochain TD l'ordre de consistance (ordre 2 en temps et en espace) et les conditions de stabilité de ce schéma dans le cas de la vitesse constante ($c \Delta t/h \leq 1$). On admettra que ces résultats s'étendent dans le cas d'une vitesse variable (avec la condition de stabilité $\sup |c| \Delta t/h \leq 1$.)

a) Implémenter ce schéma en complétant le fichier `explicite.m`. Le schéma de Lax-Wendroff est utilisé lorsque la variable `schema` est égale à 1.

b) Tester ce schéma dans le cas (i), i.e. à vitesse constante et la condition initiale (gaussienne) pour pour plusieurs valeurs de $\frac{\Delta t}{h}$

1. $\frac{\Delta t}{h} = 1.25$, par exemple $N_t = 80$ et $N_x = 100$ puis $N_t = 400$ et $N_x = 500$;
2. $\frac{\Delta t}{h} = 1$ avec par exemple $N_t = N_x = 100$ puis $N_t = N_x = 400$;
3. $\frac{\Delta t}{h} = 1.5$ avec par exemple $N_t = 400$ et $N_x = 600$.

Commenter chacun des résultats obtenus. En particulier, que se passe-t-il quand on fait varier $\frac{\Delta t}{h}$? Que se passe-t-il quand on fait varier les pas de temps et d'espace à $\frac{\Delta t}{h}$ fixé? Expliquer (en faisant des liens avec les résultats vus en TD ainsi que les notions du cours) le comportement des différentes solutions numériques. Comparer aux résultats du schéma décentré.

Question 3. On étudie maintenant un schéma implicite. Comme dans le cas des schémas explicites, on note u_j^n la solution approchée du problème (1)

$$u_j^n \approx u(x_j, t^n)$$

où u_j^n est donnée pour tout $n \in \llbracket 1; N_t \rrbracket$, et pour tout $j \in \llbracket 1; N_x + 1 \rrbracket$ par le schéma

$$\left| \begin{array}{l} \frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + \frac{c(t^n)}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0, \quad j \in \llbracket 1; N_x \rrbracket \\ u_{N_x+1}^{n+1} - u_1^{n+1} = 0, \quad (\text{conditions périodiques}). \end{array} \right. \quad (5)$$

a) Rappeler l'ordre de consistance et les conditions de stabilité de ce schéma implicite [TD4, Ex1].

b) Implémenter ce schéma dans le fichier `implicite.m`.

c) Tester ce schéma dans le cas (i), i.e. à vitesse constante et la condition initiale (gaussienne) pour pour plusieurs valeurs de $\frac{\Delta t}{h}$

1. $\frac{\Delta t}{h} = 1.25$, par exemple $N_t = 80$ et $N_x = 100$ puis $N_t = 400$ et $N_x = 500$.
2. $\frac{\Delta t}{h} = 1$, par exemple $N_t = N_x = 100$ puis $N_t = N_x = 400$;
3. $\frac{\Delta t}{h} = 1.5$, par exemple $N_t = 400$ et $N_x = 600$.

Commenter les résultats obtenus et comparer aux schémas explicites étudiés dans l'exercice 1. Quel est le principal avantage de ce schéma par rapport aux schémas explicites?

Question 4. On souhaite comparer les temps de calcul des schémas. Pour $N_t = N_x = 1000$, comparer le temps de calcul de la solution numérique pour les différents schémas pour la condition initiale et la vitesse de votre choix. Quels paramètres ont une influence sur le temps de calcul?

EXERCICE 2 (STABILITÉ ET ANALYSE DE FOURIER DES SCHÉMAS EXPLICITES)

On souhaite étudier numériquement le coefficient d'amplification des schémas explicites décentrés ainsi qu'observer numériquement les phénomènes de dissipation et dispersion. On considère dans la suite le cas d'une vitesse constante cas (i) sur le schéma (3).

Question 1. Nous voulons étudier plus précisément le coefficient d'amplification. Ici, comme les solutions sont périodiques, ce n'est pas leur transformée de Fourier qui intervient dans l'étude de la stabilité mais leurs coefficients de Fourier. Pour tout p dans $\mathbb{Z}$, on note

$$\hat{u}_h^n(p) = \frac{1}{N_x} \sum_{j=1}^{N_x} u_j^n e^{-2i\pi p x_j}.$$

Le coefficient d'amplification $\hat{S}_h(p, \Delta t)$ est donc une fonction de p , pour $p \in \mathbb{Z}$ et est défini par

$$\forall p \in \mathbb{Z}, \quad \hat{S}_h(p, \Delta t) = \frac{\hat{u}_h^2(p)}{\hat{u}_h^1(p)} = \dots = \frac{\hat{u}_h^{n+1}(p)}{\hat{u}_h^n(p)}$$

- Montrer que pour tout p dans $\mathbb{Z}$, $\hat{S}_h(p + N_x, \Delta t) = \hat{S}_h(p, \Delta t)$. Montrer également, en utilisant un u^0 réel, que pour tout p dans $\mathbb{Z}$, $\hat{S}_h(-p, \Delta t) = \overline{\hat{S}_h(p, \Delta t)}$. En déduire qu'il suffit d'étudier $\hat{S}_h(p, \Delta t)$ pour $p \in \llbracket 1, N_x/2 \rrbracket$ seulement (on supposera pour simplifier que N_x est pair).

Pour ce faire, soit $p \in \llbracket 1, N_x/2 \rrbracket$, on pose

$$u^0(x) = \exp(2i\pi p x).$$

- Montrer, en utilisant (2)-(3) que pour tout j , $u_j^2 = \hat{S}_h(p, \Delta t) u_j^1$ (on rappelle que $u_j^1 = u^0(x_j)$).
- En déduire une façon de calculer $\hat{S}_h(p, \Delta t)$ **numériquement**. En s'inspirant de la routine `explicite.m`, écrire une nouvelle routine pour tracer $|\hat{S}_h(p, \Delta t)|$ en fonction de $p \in \llbracket 1, N_x/2 \rrbracket$ pour les différents paramètres de discrétisation donnés à la question 1c). En se rappelant que le coefficient d'amplification permet d'étudier la stabilité d'un schéma, comparer les résultats obtenus aux observations de la question 1c) de l'exercice 1. Discuter la cohérence des résultats des deux questions.

Question 2. On rappelle que la solution u de l'équation de transport peut s'écrire en fonction de u^0 :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}^0(\xi) e^{i(x-ct)\xi} d\xi.$$

Ceci montre que l'équation de transport n'est ni **dissipative**, les ondes planes $e^{i\xi x}$ ne sont pas atténuées au cours du temps, ni **dispersive**, les ondes planes $e^{i\xi x}$ se propagent toutes à la même vitesse c . Nous allons maintenant déterminer si le schéma numérique conserve ces propriétés.

On peut montrer la formule d'inversion suivante

$$\forall j \in \llbracket 1, Nx \rrbracket, \quad u_j^n = \sum_{p=1}^{N_x} \hat{u}_h^n(p) e^{2i\pi p x_j}$$

on a donc

$$\forall j \in \llbracket 1, Nx \rrbracket, \quad u_j^n = \sum_{p=1}^{N_x} \left(\hat{S}_h(p, \Delta t) \right)^n \hat{u}_h^1(p) e^{2i\pi p x_j} = \sum_{p=1}^{N_x} \hat{u}_h^1(p) e^{-a_h(p, \Delta t) t^n} e^{2i\pi p (x_j - c_h(p, \Delta t) t^n)}$$

où

$$a_h(p, \Delta t) = -\frac{1}{\Delta t} \ln(|\hat{S}_h(p, \Delta t)|) \quad \text{est la dissipation numérique}$$

et

$$c_h(p, \Delta t) = -\frac{1}{2\pi p \Delta t} \arg(\hat{S}_h(p, \Delta t)) \quad \text{est la dispersion numérique.}$$

Tracer $a_h(p, \Delta t)$ et $c_h(p, \Delta t)$ en fonction de p avec $p \in \llbracket 1, Nx/2 \rrbracket$ pour les différents schémas et les différents paramètres de discrétisation donnés à la question 1c), la question 2b) et la question 3c). de l'exercice 1. Est-ce que les schémas numériques conservent les propriétés de l'équation de transport?

Question 3. Faire un tableau récapitulatif en indiquant les avantages et les inconvénients des schémas (en terme de temps de calcul, de stabilité, de dissipation et dispersion numérique).