

Corrigé de la PC4 : Schémas numériques pour les équations hyperboliques linéaires

23 mars 2026

EXERCICE 1 (SCHÉMAS NUMÉRIQUES POUR L'ÉQUATION DE TRANSPORT.)

On s'intéresse ici à la résolution numérique de l'équation de transport :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1)$$

On rappelle que la solution de cette équation est donnée par $u(x, t) = u^0(x - ct)$

On considère les schémas aux différences finies suivants :

Schéma 1.
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \quad (2)$$

Schéma 2.
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (3)$$

Schéma 3.
$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (4)$$

Schéma 4.
$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0. \quad (5)$$

Question : Pour chacun de ces schémas, répondre aux questions suivantes :

a. Est-ce un schéma explicite ou implicite ? Quelle est sa vitesse de propagation numérique ?

b. Est-ce un schéma consistant pour l'équation de (1) ? Quel est l'ordre de consistance ?

c. Etudier la stabilité L^2 par la méthode de Fourier.

d. Quelles sont les difficultés spécifiques à l'utilisation pratique de chacun des schémas.

Correction :

Rappels sur les notations :

- On considère les subdivisions de temps $(t_0, \dots, t_n$ avec un pas constant Δt) et d'espace $(\dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots$ avec un pas constant h)

- On note :

• $\{u_j^n, j \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ la solution du schéma numérique et qui est telle que u_j^n est sensée approcher $u(x_j, t_n)$ où u est la solution du problème (1)

• $U_j^n = u(x_j, t_n)$ où u est la solution du problème (1) .

Schéma 1

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

a. Le schéma est explicite à un pas de temps puisqu'il se réécrit

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c \Delta t \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}.$$

De plus, la vitesse de propagation numérique est $V_{num} = \frac{h}{\Delta t}$ (voir Figure 1). En effet, si u^0 est à support compact (telle que par exemple $u_j^0 = 0$ si $j \neq 0$ et $u_0^0 = 1$), le support de la solution numérique s'étale d'une distance de h dans un laps de temps de Δt vers la gauche. Comme le représente la figure 2, un tel schéma ne peut pas converger

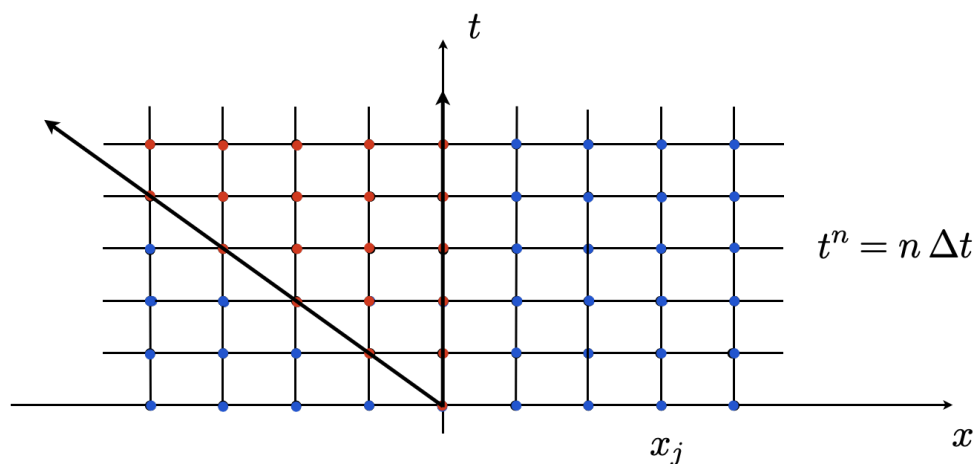


FIGURE 1 – Vitesse de propagation numérique pour le schéma décentré à droite (schéma 1) : les valeurs nulles sont représentées en bleu et les valeurs a priori non nulles.

si $c > 0$ puisque le schéma va donner une solution discrète toujours nulle là où la solution continue ne l'est pas a priori. On ne peut pas avoir convergence. Si $c < 0$ et $|c| > h/\Delta t$, on ne peut pas avoir convergence non plus pour les mêmes raisons.

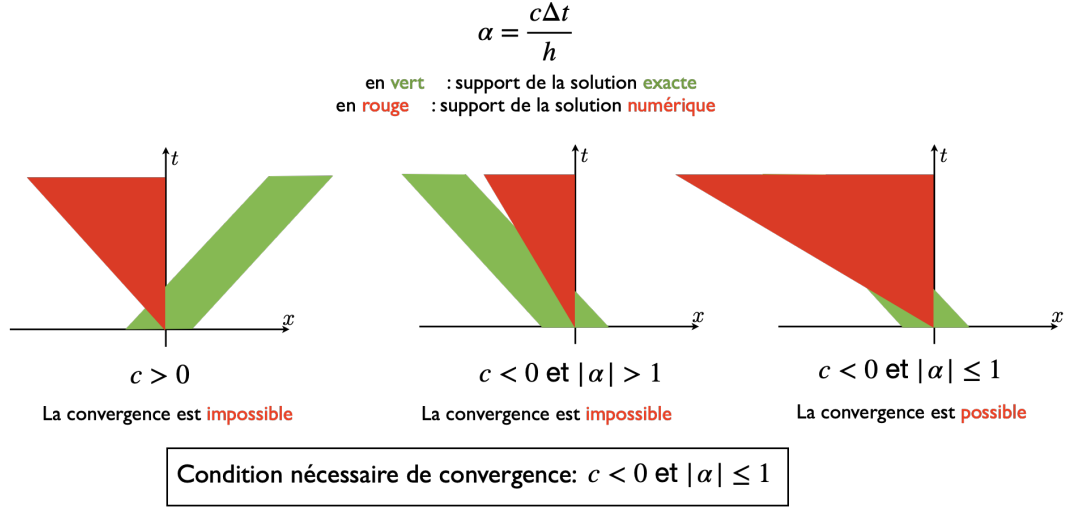


FIGURE 2 – Condition nécessaire de convergence pour le schéma décentré à droite (schéma 1)

Si $c < 0$ et $|c| < h/\Delta t$, on peut donc espérer avoir convergence. C'est la condition nécessaire de convergence.

b. Soit u la solution régulière de l'équation de transport.

Rappel : Un schéma aux différences finies est consistant à une équation aux dérivées partielles si le schéma tend vers l'EDP lorsque les pas de discrétisation en temps et en espace tendent vers 0. L'erreur de troncature ou de consistance ϵ_j^n correspond à l'erreur commise lorsqu'on remplace la solution du schéma u_j^n par la solution exacte aux noeuds du maillage U_j^n .

On dit que le schéma est consistant lorsque $\lim_{\Delta t \rightarrow 0, h \rightarrow 0} \epsilon_j^n = 0$. On dit de plus qu'il est d'ordre k en temps et p en espace lorsque $\epsilon_j^n = \mathcal{O}(\Delta t^k + h^p)$.

Dans le cas du schéma 1, l'erreur de troncature est donc donnée par

$$\epsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h}$$

Un développement de Taylor nous donne

$$\begin{aligned} u(x_j, t^{n+1}) &= u(x_j, t^n) \pm \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^3), \\ u(x_{j\pm 1}, t^n) &= u(x_j, t^n) \pm h \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^3). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}
\epsilon_j^n &:= \frac{u(x_j, t^n) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^3) - u(x_j, t^n)}{\Delta t} \\
&+ c \frac{u(x_j, t^n) + h \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(h^3) - u(x_j, t^n)}{h} \\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^n) + c \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^n) \right) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + c \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + c \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \mathcal{O}(\Delta t + h)
\end{aligned}$$

Le schéma 1 est donc consistant au moins à l'ordre 1 en temps et en espace. De plus, comme u est solution de l'équation de transport, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

et on a aussi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
\epsilon_j^n &:= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) + c \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= (c\Delta t + h) \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}$$

Si $c\Delta t + h \neq 0$, la consistance est bien d'ordre 1 en temps et en espace.

Si $c\Delta t + h = 0$, c'est à dire si $c\Delta t/h = -1$, la consistance est d'ordre infini. En effet, comme la solution de l'EDP s'écrit $u(x, t) = u^0(x - ct)$, on trouve (car $c\Delta t = -h$)

$$U_j^{n+1} = u^0(x_j - ct^{n+1}) = u^0(x_j - ct^n - c\Delta t) = u^0(x_j - ct^n + h) = u^0(x_{j+1} - ct^n) = U_{j+1}^n$$

Quant au schéma, si $c\Delta t = -h$, il s'écrit simplement $u_j^{n+1} - u_{j+1}^n = 0$. Donc la solution de l'EDP est aussi solution du schéma : le schéma est donc consistant d'ordre infini.

c. Pour la **stabilité**, rappelons qu'un schéma numérique est dit L^2 -stable si et seulement si pour tout temps $T > 0$, il existe une constante $C(T)$ indépendante de h et Δt , telle que pour toute donnée initiale u^0 dans L^2 ,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n\Delta t \leq T, \quad \|u_h^n\|_{L^2} \leq C(T) \|u^0\|_{L^2}$$

où u_h^n est une fonction continue et telle que $u_h^n(x_j) = u_j^n$ pour tout x_j de la subdivision.

Pour l'analyse de stabilité L^2 du schéma, nous utilisons la méthode de Fourier Von-Neumann. La méthode revient à chercher des solutions du schéma de la forme

$$\forall j \in \mathbb{Z}, \quad \forall n \geq 0, \quad u_j^n := \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j} \quad (6)$$

et d'étudier le comportement de la suite de fonctions $(\hat{u}^n)_n$. Si la suite de fonctions est bornée pour la norme L^2 alors le schéma est stable, sinon il est instable (nous renvoyons le lecteur au polycopié pour la justification). Le schéma peut être stable sous une condition sur les pas de temps et d'espace ou sans condition, dans ce dernier cas, on dit qu'il est inconditionnellement stable.

En introduisant la suite (6) dans le schéma 1, et en remarquant que

$$u_{j+1}^n := \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_{j+1}} = \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi(x_j+h)} = \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j} e^{i\xi h},$$

et que $u_j^{n+1} := \hat{u}^{n+1}(\xi) e^{i\xi x_j}$ nous obtenons la relation de récurrence vérifiée par $\hat{u}^n$:

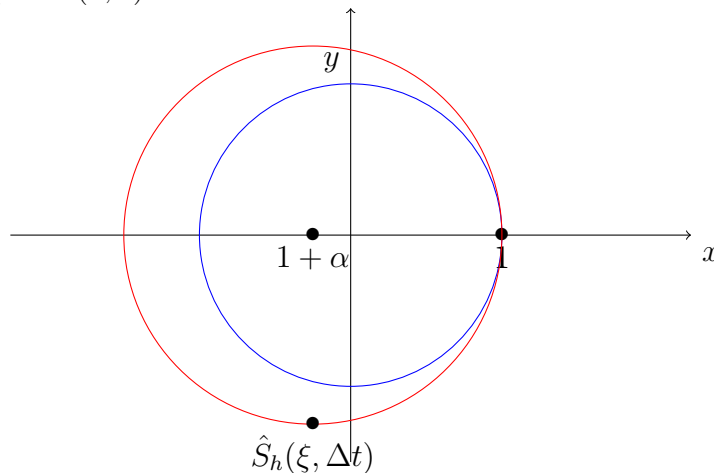
$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t) \hat{u}^n(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t)^{n+1} \hat{u}^0(\xi) \quad \text{où} \quad \hat{S}_h(\xi, \Delta t) = 1 - \alpha(e^{i\xi h} - 1),$$

avec $\alpha := c\Delta t/h$. On a donc

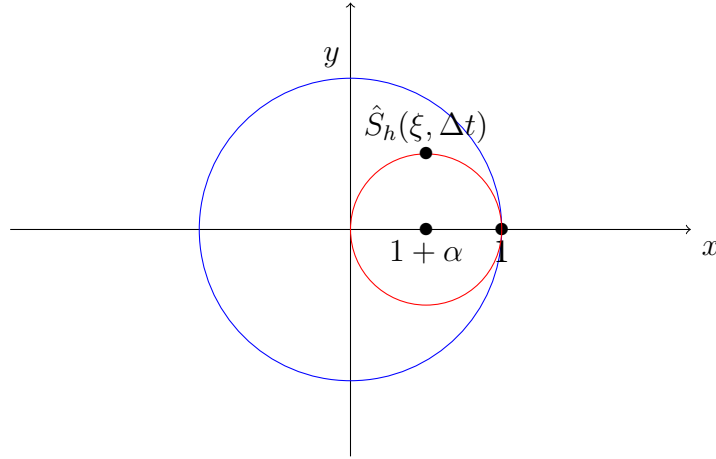
$$|\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| = |1 - \alpha(e^{i\xi h} - 1)| = |1 - \alpha(\cos \xi h - 1 + i \sin \xi h)| = \sqrt{(1 - \alpha(\cos \xi h - 1))^2 + \alpha^2 \sin^2 \xi h^2}$$

On peut également remarquer que $\hat{S}_h(\xi, \Delta t) = 1 + \alpha - \alpha e^{i\xi}$ appartient au cercle de centre $1 + \alpha$ et de rayon $|\alpha|$.

- Si $c > 0$ (et donc $\alpha > 0$), pour tout ξ on a $|\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| \geq 1$. En effet, et $\cos \xi h - 1 \leq 0$ donc $1 - \alpha(\cos \xi h - 1) \geq 1$. Dit autrement, le cercle décrit par $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ a pour centre $1 + \alpha > 1$: il est donc à l'extérieur du cercle unité. Le schéma est donc instable L^2 .
- si $c < 0$ et $\alpha < -1$, le cercle décrit par $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ a pour centre $(1 + \alpha) < 0$ et passe par le point $(1, 0)$: il est donc à l'extérieur du cercle unité.



- si $c < 0$ et $-1 \leq \alpha < 0$, le cercle décrit par $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ a pour centre $(1 + \alpha) > 0$ et passe par le point $(1, 0)$: il est donc à l'intérieur du cercle unité.



Conclusion : le schéma est stable L^2 si et seulement si

$$c < 0 \quad \text{et} \quad |\alpha| \leq 1$$

Remarque 1 : On rappelle ce résultat du poly (voir au dessus du théorème 3.3.3) : un schéma est L^2 stable ssi il existe $\nu \geq 0$ tel que :

$$\forall (\Delta t, h) \in \mathbf{S}, \quad \|S_h(\Delta t)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \sup_{\xi \in \mathbb{R}} |\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t$$

$\mathbf{S}$ étant un sous ensemble de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ admettant $(0, 0)$ pour point d'accumulation, et appelé domaine de stabilité de la méthode. Et, ici, $|\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| \geq \sqrt{1 + \sin^2 \xi h^2}$ qui sera plus grand que $1 + \nu \Delta t$, quelque soit ν fixé en amont, pour un Δt assez petit.

On retiendra en particulier que si $|\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| \leq 1$ pour tout ξ , alors le schéma est stable L^2 uniformément, c'est à dire que $C(T)$ ne dépend pas de T .

d. Ici, ce schéma est explicite et très simple à mettre en oeuvre, il suffit d'initialiser avec la condition initiale $u_j^0 = u^0(x_j)$ pour tout j et d'écrire la récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n), \quad j \in \mathbb{Z}$$

La stabilité est vérifiée sous la condition $c < 0$ et $\frac{|c|\Delta t}{h} \leq 1$ donc Δt doit être choisi en fonction de h .

Schéma 2

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

Remarque : l'analyse de ce schéma est très similaire à celle du schéma précédent, il suffit de remplacer c par $-c$ et $j + 1$ par $j - 1$.

a. Le schéma est explicite à un pas de temps. De plus, la vitesse de propagation numérique est $V_{num} = \frac{h}{\Delta t}$ (voir Figure 1). En effet, si u^0 est à support compact (telle

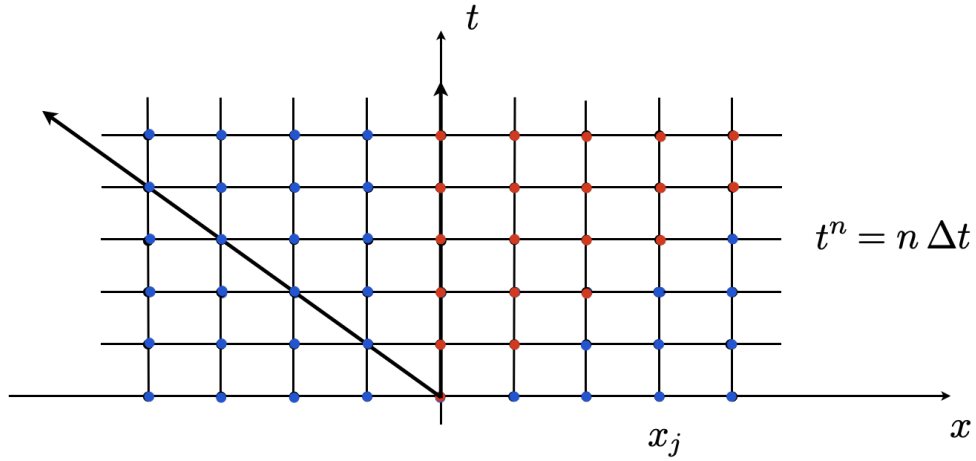


FIGURE 3 – Vitesse de propagation numérique pour le schéma décentré à gauche (schéma 2) : les valeurs nulles sont représentées en bleu et les valeurs en rouge sont a priori non nulles.

que par exemple $u_j^0 = 0$ si $j \neq 0$ et $u_0^0 = 1$), le support de la solution numérique s'étale d'une distance de h dans un laps de temps de Δt vers la droite. Comme le représente la figure 4, un tel schéma ne peut pas converger si $c < 0$ puisque le schéma va donner une solution discrète toujours nulle là où la solution continue ne l'est pas a priori. On ne peut pas avoir convergence. Si $c > 0$ et $c > h/\Delta t$, on ne peut pas avoir convergence non plus pour les mêmes raisons. Si $c > 0$ et $c < h/\Delta t$, on peut donc espérer avoir convergence. C'est la condition nécessaire de convergence.

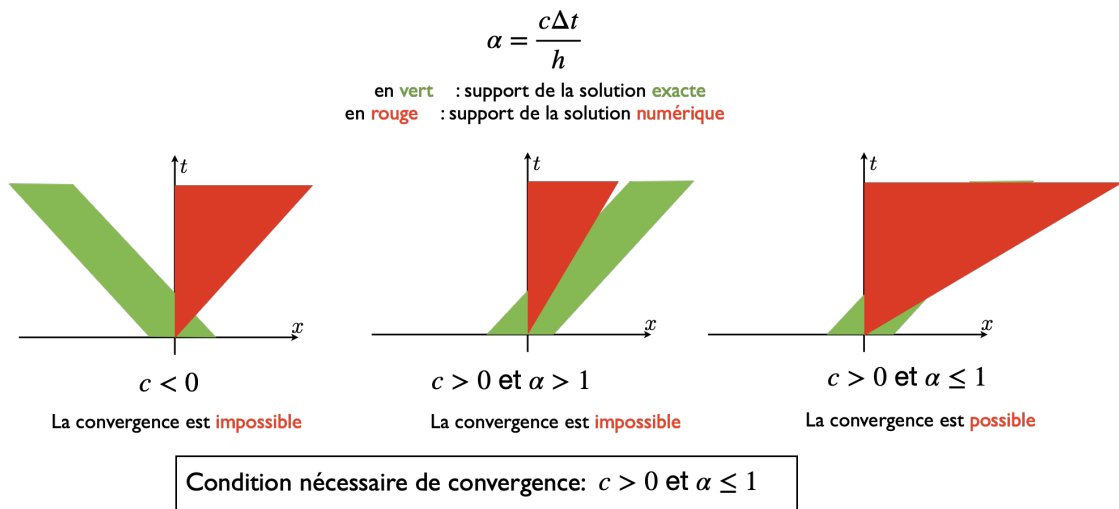


FIGURE 4 – Condition nécessaire de convergence pour le schéma décentré à gauche (schéma 2)

b. En utilisant les développements de Taylor introduits plus haut, on a :

$$\begin{aligned}
\epsilon_j^n &:= \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} + c \frac{U_j^n - U_{j-1}^n}{h} \\
&= \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t^n) - c \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= (c\Delta t - h) \frac{c}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t^n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) + \mathcal{O}(h^2) \\
&= \mathcal{O}(\Delta t + h)
\end{aligned}$$

On en déduit que si $c\Delta t/h \neq 1$, la consistance est d'ordre 1. Et si $c\Delta t/h = 1$, la consistance est d'ordre infini. En effet, comme la solution de l'EDP s'écrit $u(x, t) = u^0(x - ct)$, on trouve (car $c\Delta t = h$)

$$U_j^{n+1} = u^0(x_j - ct^{n+1}) = u^0(x_j - ct^n - c\Delta t) = u^0(x_{j-1} - ct^n) = U_{j-1}^n$$

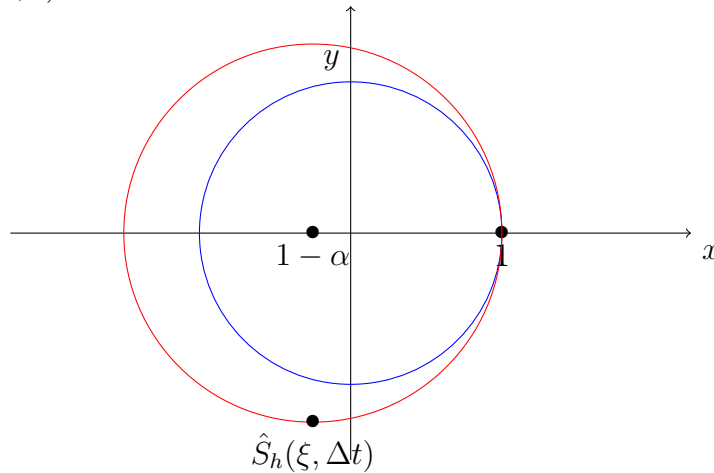
Quant au schéma, si $c\Delta t = h$, il s'écrit simplement $u_j^{n+1} - u_{j-1}^n = 0$. Donc la solution de l'EDP est aussi solution du schéma : il est donc consistant d'ordre infini.

c. Pour l'étude de la **stabilité**, cherchons les solutions du schéma de la forme $u_j^n := \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$. On obtient alors

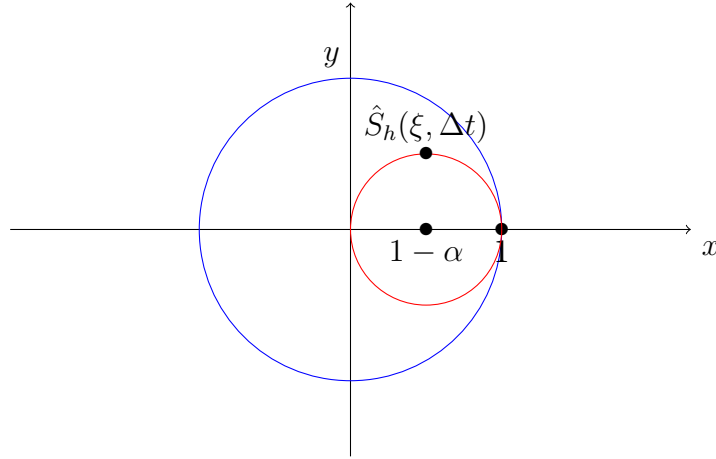
$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t) \hat{u}^n(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t)^{n+1} \hat{u}^0(\xi) \quad \text{où} \quad \hat{S}_h(\xi, \Delta t) = 1 - \alpha(1 - e^{-i\xi h}) = (1 - \alpha) + \alpha e^{-i\xi h},$$

$\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ appartient donc au cercle de centre $1 - \alpha$ et de rayon α .

- Si $c < 0$ (et donc $\alpha < 0$), le cercle décrit par $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ a pour centre $1 - \alpha > 1$: il est donc à l'extérieur du cercle unité. Le schéma est donc instable L^2 .
- si $c > 0$ et $\alpha > 1$, le cercle décrit par $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ a pour centre $(1 - \alpha) < 0$ et passe par le point $(1, 0)$: il est donc à l'extérieur du cercle unité.



- si $c > 0$ et $0 < \alpha \leq 1$, le cercle décrit par $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ a pour centre $(1 - \alpha) > 0$ et passe par le point $(1, 0)$: il est donc à l'intérieur du cercle unité.



Conclusion : le schéma est stable L^2 si et seulement si

$$c > 0 \quad \text{et} \quad \alpha \leq 1$$

Remarque : Là encore, pour le cas où $\alpha > 1$, on remarque que pour tout ν , en prenant Δt assez petit, et h de sorte que $\alpha = \frac{c\Delta t}{h} > 1$, on aura $\sup_{k\xi \in \mathbb{R}} |\hat{S}_h(\xi, \Delta t)| > 1 + \nu\Delta t$

d. Ici, ce schéma est explicite et très simple à mettre en oeuvre, il suffit d'initialiser avec la condition initiale $u_j^0 = u^0(x_j)$ pour tout j et d'écrire la récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\Delta t}{h}(u_j^n - u_{j-1}^n), \quad j \in \mathbb{Z}$$

La stabilité est vérifiée sous la condition $c > 0$ et $\frac{c\Delta t}{h} \leq 1$ donc Δt doit être choisi en fonction de h .

Schéma 3

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0,$$

a. Le schéma est explicite à deux pas de temps (t^{n-1}, t^n, t^{n+1}) . De plus, $v_{num} = \frac{h}{\Delta t}$ pour les mêmes raisons que dans le cours magistral. Nous allons donc avoir la condition nécessaire de convergence $|c|\Delta t/h \leq 1$.

b. En utilisant les développements de Taylor donnés plus haut, on trouve :

$$\varepsilon_j^n := \frac{U_j^{n+1} - U_j^{n-1}}{2\Delta t} + c \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{ch^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3)$$

De plus, comme u est solution de l'équation de transport, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -c \frac{\partial u}{\partial x}$$

et aussi

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = -c^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3},$$

Ainsi,

$$\varepsilon_j^n := \frac{\Delta t^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + \frac{ch^2}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3) = (-c^2 \Delta t^2 + h^2) \frac{c}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3)$$

ce qui indique que le schéma est consistant à l'ordre deux en temps et en espace sauf quand $|c|\Delta t/h = 1$ où le schéma est d'ordre infini (pour les mêmes raisons que pour le deuxième schéma).

c. Pour l'étude de la stabilité, cherchons les solutions du schéma de la forme $u_j^n := \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$. En introduisant cette suite dans le schéma, on obtient la relation de récurrence vérifiée par $\hat{u}^n$:

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{u}^{n-1}(\xi) - 2i\alpha \sin(\xi h) \hat{u}^n(\xi),$$

où $\alpha := c\Delta t/h$. La solution de cette relation de récurrence d'ordre 2 (ξ étant fixé) s'écrit

$$\hat{u}^n(\xi) = A(r_+(\xi, \Delta t))^n + B(r_-(\xi, \Delta t))^n,$$

avec $r_{\pm}(\xi, \Delta t)$ les racines du polynôme caractéristique associé

$$r^2 + 2i\alpha \sin(\xi h)r - 1 = 0,$$

dont le discriminant réduit (c'est à dire le discriminant classique Δ' divisé par 4) est

$$\Delta = 1 - \alpha^2 \sin^2(\xi h).$$

On sait que le schéma est stable si $\hat{u}^n$ est bornée dans L^2 . En étendant ce qui est fait dans le cours, on montre que le schéma est stable si

$$\sup_{\xi \in \mathbb{R}} |r_{\pm}(\xi, \Delta t)| \leq 1 + \nu \Delta t$$

- Si $|\alpha| > 1$, alors le discriminant est strictement négatif pour certaines valeurs de ξ . Pour ces valeurs, les deux racines de l'équation sont imaginaires pures (elles valent $i(-\alpha \sin(\xi h) \pm \sqrt{|1 - \alpha^2 \sin^2(\xi h)|})$) et leur produit vaut -1 . De plus, le module des deux racines est différent (il suffit de regarder leur expression). L'une des deux racines est donc de module strictement supérieur à un, et le schéma est donc instable (car on a $\hat{u}^n$ non bornée).
- Si $|\alpha| \leq 1$, alors le discriminant est toujours positif ou nul et les racines valent

$$r_{\pm} = -i\alpha \sin(\xi h) \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \sin^2(\xi h)}$$

Elles sont complexes et de même module. Comme leur produit vaut -1 , on a $1 = |r_+ r_-| = |r_+| |r_-|$ et donc $|r_+| = |r_-| = 1$. Le schéma est alors stable.

d. Le calcul de la solution à l'instant t_{n+1} nécessite la solution aux instants t_n et t_{n-1} . Il faudra donc garder en mémoire ces deux quantités ce qui peut poser des problèmes de stockage. De plus, le calcul de la solution de ce schéma

nécessite une initialisation à deux pas de temps : en d'autres termes u^0 et u^1 doivent être connus. Pour u^0 , on pourra utiliser la condition initiale $u(x, t = 0) = u^0(x)$. Pour u^1 , c'est moins naturel. L'idée est d'utiliser que

$$U_j^1 = U_j^0 + \mathcal{O}(\Delta t)$$

et donc d'imposer

$$u_j^1 = u_j^0 = u^0(x_j).$$

Malheureusement, alors que le schéma est d'ordre 2 en temps, une telle donnée initiale (consistante à l'ordre 1) va détériorer l'erreur de consistance. Il faut donc améliorer cette donnée en utilisant que

$$\begin{aligned} U_j^1 &= U_j^0 + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t^0) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= U_j^0 - c\Delta t \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t^0) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ &= u^0(x_j) - c\Delta t u^{0'}(x_j) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \end{aligned}$$

pour finalement imposer

$$u_j^1 = u_j^0 - c\Delta t u^{0'}(x_j).$$

Cette approximation est bien consistante à l'ordre 2.

Schéma 4

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \right) = 0,$$

a. Le schéma est implicite car il se réécrit ($\alpha = c\Delta t/h$)

$$(1 + \alpha)u_{j+1}^{n+1} + (1 - \alpha)u_j^{n+1} = (1 - \alpha)u_{j+1}^n + (1 + \alpha)u_j^n.$$

A chaque pas de temps les $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$ ne peuvent donc pas être calculés indépendamment les uns des autres. Il faut donc inverser un système linéaire pour calculer $\{u_j^{n+1}, j \in \mathbb{Z}\}$. Comme tous les schémas implicites, on a $v_{num} = +\infty$ (voir le cours magistral 5).

b. En introduisant le point $(x_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}}) = (x_j + \frac{h}{2}, t^n + \frac{\Delta t}{2})$ et en notant $U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u(x_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$ nous effectuons les développements de Taylor suivants (on rappelle que pour f régulière, $v = (x, y)$ et $k = (h, \Delta t)$ des vecteurs, on a :

$$f(v + k) = f(v) + df(v).k + \frac{1}{2!} d^2 f(v).(k, k) + \mathcal{O}(\|k\|^3)$$

avec $df(v).k = \langle \nabla f(v), k \rangle$ et $d^2f(v).(k, k) = \langle k, H_f(v)k \rangle$ où $\nabla f(v)$ et $H_f(v)$ représentent respectivement le gradient et la hessienne de f en v :

$$\begin{aligned} u(x_{j+1}, t^{n+1}) &= U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3), \\ u(x_{j+1}, t^n) &= U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3), \\ u(x_j, t^{n+1}) &= U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{h \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3), \\ u(x_j, t^n) &= U_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \left(-\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\Delta t^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{h^2}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{h \Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right) + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3), \end{aligned}$$

où toutes les dérivées sont prises au point $(x_{j+\frac{1}{2}}, t^{n+\frac{1}{2}})$. Nous avons donc que

$$\varepsilon_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} := \frac{1}{2} \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_{j+1}^n}{\Delta t} + \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} \right) + \frac{c}{2} \left(\frac{U_{j+1}^{n+1} - U_j^{n+1}}{h} + \frac{U_{j+1}^n - U_j^n}{h} \right) = \mathcal{O}\left(\frac{\Delta t^3 + h^3}{h\Delta t}\right),$$

En faisant un développement de Taylor à l'ordre 3, on utilise

$$\begin{aligned} d^3u(v).(k, k, k) &= d^3u(v).((h, \Delta t), (h, \Delta t), (h, \Delta t)) \\ &= h^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 3h^2 \Delta t \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 3h \Delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + \Delta t^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} \end{aligned}$$

et on peut montrer que :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{3} \left(\Delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + 3h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + 3h \Delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + 3c \Delta t^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right) \\ &= \frac{2c(c^2 \Delta t^2 - h^2)}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\Delta t^3 + h^3) \end{aligned}$$

Cela montre que l'ordre de consistance est exactement 2 sauf lorsque $c\Delta t/h = 1$, le schéma devient

$$u_{j+1}^{n+1} = u_j^n,$$

équation aussi satisfaite par la solution exacte. Dans ce cas particulier, le schéma est consistant à l'ordre infini.

c. Pour l'étude de stabilité, cherchons les solutions du schéma de la forme $u_j^n := \hat{u}^n(\xi) e^{i\xi x_j}$. En introduisant cette suite dans le schéma, on obtient :

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t) \hat{u}^n(\xi) = \hat{S}_h(\xi, \Delta t)^{n+1} \hat{u}^0(\xi),$$

où le coefficient d'amplification $\hat{S}_h(\xi, \Delta t)$ est donné par

$$\hat{S}_h(\xi, \Delta t) := \frac{\cos(\frac{\xi h}{2}) - i\alpha \sin(\frac{\xi h}{2})}{\cos(\frac{\xi h}{2}) + i\alpha \sin(\frac{\xi h}{2})}.$$

étant donné que ce coefficient est de module un (le numérateur et le dénominateur étant des complexes conjugués), le schéma est inconditionnellement stable.

d. La difficulté de ce schéma est similaire à celle rencontrée dans le cas des schémas implicites. En effet, ce schéma présente une lourdeur numérique puisqu'il implique la résolution d'un système linéaire à chaque pas de temps de la forme

$$AU^{n+1} = BU^n,$$

où il faut inverser la matrice A . Mais il est inconditionnellement stable donc les pas de temps et d'espace peuvent être choisis indépendamment l'un de l'autre.