

Corrigé de la PC3 : Résolution analytique d'équations hyperboliques non linéaires en 1D

16 mars 2026

EXERCICE 1 (PROBLÈME DE RIEMANN À 3 ÉTATS POUR L'ÉQUATION DE BÜRGERS)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (1)$$

On choisit comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} u_1, & \text{si } x \leq 0, \\ u_2, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ u_3, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Question 1. A quelle condition a-t-on une solution continue à $t > 0$?

Corrigé de la question 1. On commence par naïvement tracer dans le plan (x, t) les caractéristiques associées à la donnée initiale u_0 qui passent par $(x_0, 0)$, lorsque x varie dans $\mathbb{R}$. On obtient trois faisceaux de droites parallèles respectivement pour $x_0 \in]-\infty, 0]$, $x_0 \in]0, 1]$ et $x_0 \in]1, +\infty[$. Ces droites décrivent la trajectoire d'un point mobile se déplaçant aux vitesses respectives u_1 , u_2 et u_3 : elles ont pour équations $X_{x_0}(t) = x_0 + u_j t$, $j = 1, 2, 3$ ¹. Elles décrivent trois domaines D_1 , D_2 et D_3 du demi-espace $\{(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0\}$ définies par

$$\begin{cases} D_1 := \{(x, t), x \leq u_1 t, t > 0\}, \\ D_2 := \{(x, t), u_2 t < x \leq u_2 t + 1 t, t > 0\}, \\ D_3 := \{(x, t), u_3 t + 1 < x < +\infty, t > 0\}. \end{cases}$$

Notons que deux caractéristiques correspondent à $x_0 = 0$ et $x_0 = 1$. Si ne serait-ce que deux de ces faisceaux de droites s'intersectent (voir par exemple Fig. 1, dessin de gauche), il faudra introduire une ligne de choc et la solution faible cherchée sera nécessairement discontinue (voir la question 2 par exemple). Pour qu'il n'y ait aucune intersection, il faut et il suffit que $u_1 \leq u_2 \leq u_3$. La méthode des caractéristiques suggère alors immédiatement la valeur de la solution cherchée dans chacun des trois domaines définis plus haut, à savoir

$$u(x, t) = u_1 \text{ si } (x, t) \in D_1, \quad u(x, t) = u_2 \text{ si } (x, t) \in D_2, \quad u(x, t) = u_3 \text{ si } (x, t) \in D_3. \quad (2)$$

1. Attention, ce résultat n'est vrai que parce qu'on considère l'équation de Burgers. Pour l'équation générale $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, on aurait toujours trois faisceaux de droites mais d'équations $x = x_0 + f'(u_j)t$. Ici, pour Burgers, $f(u) = u^2/2$, donc $f'(u) = u$.

Il reste alors à compléter la solution dans les zones suivantes (si non vides)

$$D_{12} := \{(x, t), u_1 t < x < u_2 t, t > 0\}, \quad D_{23} := \{(x, t), u_2 t + 1 < x < u_3 t + 1, t > 0\}.$$

Cela se fait comme dans le cours en introduisant une onde de détente² $(x-a)/t$ dans chacun de ces domaines, autrement dit (voir l'illustration Fig. 1, dessin de gauche)

$$u(x, t) = \frac{x}{t} \text{ si } (x, t) \in D_{12}, \quad \text{et} \quad u(x, t) = \frac{x-1}{t} \text{ si } (x, t) \in D_{23}. \quad (3)$$

Notons qu'en passant de D_{12} à D_{23} , x est remplacé par $x-1$ car le point de discontinuité à gérer est en $x=1$ et non pas en $x=0$. Il est immédiat de vérifier que la fonction $u(x, t)$ définie par (2-3) est continue dans le demi-espace $\{(x, t), x \in \mathbb{R}, t > 0\}$. C'est par ailleurs une solution classique là où elle est de classe C^1 , c'est à dire à l'intérieur de chacun des domaines $D_j, 1 \leq j \leq 3, D_{12}$ et D_{23} . D'après les résultats du cours, nous pouvons donc affirmer qu'il s'agit de la solution faible entropique du problème. La réponse à la question posée est donc : $u_1 \leq u_2 \leq u_3$.

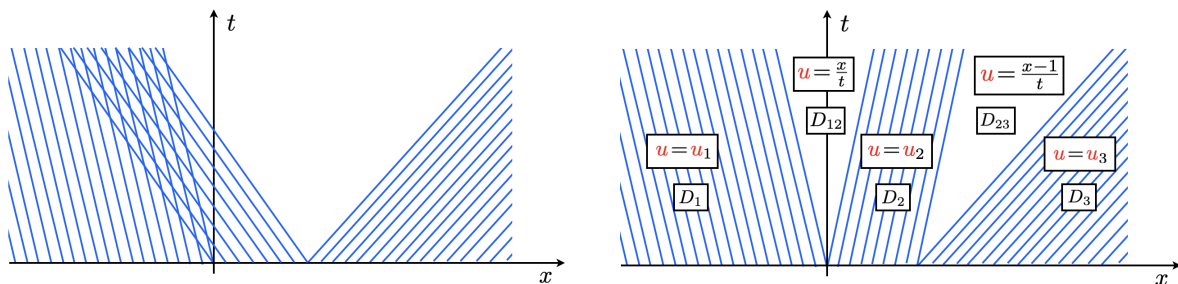


FIGURE 1 – A gauche : $u_2 < u_1 < u_3$. A droite : $u_1 < u_2 < u_3$.

Par ailleurs, retenons de cette première question un processus qu'on adoptera de façon assez systématique pour la construction de la solution entropique C^1 par morceaux d'une loi de conservation scalaire :

1. Étape inductive : on propose une solution en s'inspirant de la méthode des caractéristiques.
2. Étape déductive : on démontre que la solution proposée est bien solution entropique du problème. D'après le cours, comme il y a unicité, la solution construite est LA solution faible entropique recherchée.

Question 2. Calculer la solution pour $u_1 = 0, u_2 = 1$ et $u_3 = 0$. Tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution à différents temps. Montrer que l'amplitude et la vitesse du choc tendent vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

2. Attention, ce résultat n'est vrai que parce qu'on considère l'équation de Burgers. Pour l'équation générale $\partial_t u + \partial_x f(u) = 0$, l'équation de l'onde de détente est $a^{-1}((x-a)/t)$. Ici, pour Burgers, $f(u) = u^2/2$, donc $a(u) = u$ et $a^{-1}(u) = u$!

Corrigé de la question 2. La condition de la question 1, $u_1 \leq u_2 \leq u_3$, n'est pas satisfaite. La construction de la solution faible est alors sensiblement plus complexe et va se faire par fenêtres de temps successives et commençant à décrire ce qui va se passer pour $t > 0$ suffisamment petit. Nous allons adopter la démarche intuitive suggérée plus haut en proposant une construction pas à pas de la solution.

Les observations qui suivent sont supportées par le dessin de gauche de la figure 3. Comme $u_2 = 1 > u_3 = 0$, les domaines D_2 et D_3 s'intersectent. Du coup, si pour $x < 0$ et $t > 0$, c'est à dire dans le domaine D_1 , la méthode des caractéristiques suggère sans ambiguïté que la solution soit nulle ($u(x, t) = 0$ dans D_1), et si pour t assez petit, elle suggère qu'elle va prendre la valeur 1 dans le sous-domaine de D_2 qui n'intersecte pas D_3 et qu'elle va prendre la valeur 0 dans le sous-domaine de D_3 qui n'intersecte pas D_2 , elle ne permet pas de départager entre la valeur 1 et la valeur 0 dans l'intersection $D_2 \cap D_3$, laquelle prend naissance dès $t > 0$. Par ailleurs, la région D_{12} qui apparait en blanc dans la figure 3, ne contient aucune caractéristique.

Mais examinons tout d'abord la problématique soulevée par l'intersection $D_2 \cap$

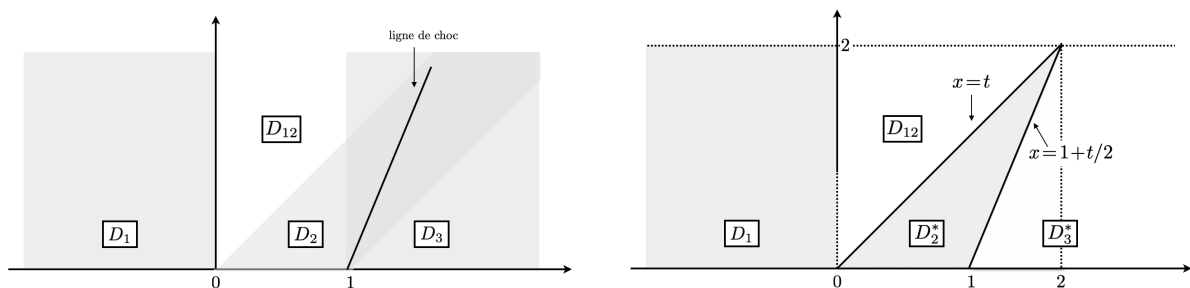


FIGURE 2 – Gauche : domaines D_j et ligne de choc . Droite : domaines D_j^* .

D_3 . Comme les caractéristiques se croisent, nous introduisons une ligne de choc, d'équation $x = \sigma_1(t)$ qui va passer par le point de naissance de l'intersection $D_2 \cap D_3$, c'est à dire $(x = 1, t = 0)$ (autrement dit on va imposer $\sigma_1(0) = 1$) et qui va partager $D_2 \cap D_3$ en deux parties, l'une à gauche de cette ligne, à l'intérieur de laquelle on va attribuer à la solution la valeur 1 - ne serait que pour assurer la continuité avec le domaine $D_2 \setminus (D_2 \cap D_3)$ - l'autre à droite de cette ligne dans laquelle on proposera, par un raisonnement symétrique, la valeur 0. En résumé, au moins pour t assez petit, nous proposerons

$$u(x, t) = 1 \text{ si } (x, t) \in D_2 \cap D_3 \text{ et } x < \sigma_1(t), \quad u(x, t) = 0 \text{ si } (x, t) \in D_2 \cap D_3 \text{ et } x > \sigma_1(t).$$

On crée ainsi un choc puisque la solution va passer brutalement de 1 à 0 à travers $x = \sigma_1(t)$. Maintenant, pour déterminer la forme $x = \sigma_1(t)$, on utilise la relation de Rankine-Hugoniot qui va assurer qu'on a bien alors construit (au moins localement) une solution faible :

$$\sigma_1'(t) = [f(u^+(t)) - f(u^-(t))] / [u^+(t) - u^-(t)], \quad u^\pm(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(\sigma_1(t) \pm \varepsilon, t),$$

Pour le cas de l'équation de Burgers, $f(u) = u^2/2$, on obtient donc

$$\sigma_1'(t) = [u^+(t) + u^-(t)]/2, \quad u^\pm(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(\sigma_1(t) \pm \varepsilon, t),$$

autrement dit comme $u^+(t)$ et $u^-(t)$ sont les vitesses des deux caractéristiques qui se rejoignent au point $(\sigma_1(t), t)$, la valeur de la vitesse du choc est égale à la demi-somme des vitesses des caractéristiques de part et d'autre de ce choc (**attention**, ce résultat qui n'est vrai que pour Burgers). En l'occurrence, comme par construction, $u^-(t) = 1$ et $u^+(t) = 0$, $\sigma_1'(t) = 1/2$. Le choc est donc un choc droit de vitesse $1/2$ et, tenant compte de $\sigma_1(0) = 1$,

$$\sigma_1(t) = 1 + t/2.$$

Tout va se passer comme si on avait remplacé, pour t assez petit les domaines intersectants D_2 et D_3 par les domaines D_2^* et D_3^* définis par (voir figure 2, dessin de droite)

$$\begin{cases} D_2^* = \{(x, t) \in D_2 / x < \sigma_1(t)\} \equiv \{(x, t) / t \leq x < \sigma_1(t)\}, \\ D_3^* = \{(x, t) \in D_3 / x > \sigma_1(t)\} \equiv \{(x, t) / x > \sigma_1(t)\}, \end{cases}$$

qui sont tels que chaque point de D_j^* appartient à une caractéristique et une seule issue d'un point $(x_0, 0) \in D_j$.

Finalement, dans la région D_{12} on va introduire une onde de détente $u(x, t) = x/t$

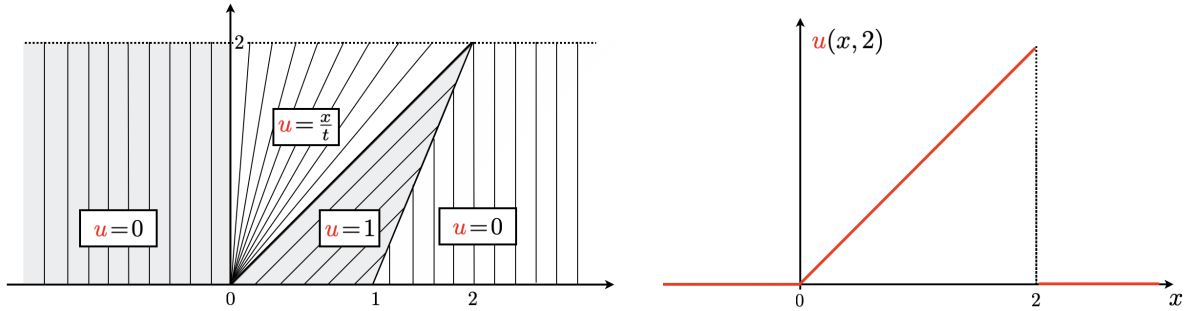


FIGURE 3 – La solution pour $t \leq 2$ (gauche) . Graphe à $t = 2$ (droite)

et donc finalement proposer : $u(x, t) = 0$ dans D_1 , $u(x, t) = x/t$ dans D_{12} , $u(x, t) = 1$ dans D_2^* , $u(x, t) = 0$ dans D_3^* . Jusqu'à quel instant cette description va-t-elle rester valable? La figure 2 (dessin de droite) donne la réponse. Le domaine D_2^* est borné en temps : il disparaît au moment où la ligne $x = t$ (caractéristique issue de $x_0 = 0$), qui borne D_2^* sur sa gauche, rencontre la ligne de choc $x = 1 + t/2$ qui le borne sur sa droite. Le point de rencontre est $x = 2, t = 2$. Nous allons donc être en mesure de décrire la solution jusqu'à l'instant $t = 2$ (voir aussi figure 3, dessin de gauche) :

$$\begin{cases} - \text{Pour } (x, t) \in D_1 \text{ et } t \leq 2, & u(x, t) = 0, \\ - \text{Pour } (x, t) \in D_{12} \text{ et } t \leq 2, & u(x, t) = x/t, \\ - \text{Pour } (x, t) \in D_2^* \text{ et } t \leq 2, & u(x, t) = 1, \\ - \text{Pour } (x, t) \in D_3^* \text{ et } t \leq 2, & u(x, t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

la solution proposée dans D_{12} correspondant, comme annoncé plus haut, à l'introduction d'une onde de détente.

À partir de l'instant $t = 2$, instant auquel la solution est donnée par le graphe de la figure 3 (droite) (cette fonction peut du reste être vue comme une nouvelle condition initiale à l'instant $t = 2$), il reste naturel d'imposer, comme le suggère la méthode des caractéristiques, $u(x, t) = 0$. Ailleurs, on est confronté à une situation similaire à celle rencontrée à l'instant $t = 0$. Dans le demi espace $t > 2$, les domaines D_{12} et D_3 s'intersectent. Si on va naturellement proposer $u(x, t) = x/t$ dans $D_{12} \setminus D_{12} \cap D_3$ et $u(x, t) = 0$ dans $D_3 \setminus D_{12} \cap D_3$, il faut arbitrer entre x/t et 0 dans $D_{12} \cap D_3$. Cela va se faire en introduisant une nouvelle ligne de choc $x = \sigma_2(t)$, $t \geq 2$ qui va partir du point $(2, 2)$, i.e. $\sigma_2(2) = 2$. Pour $t \geq 2$, on va donc proposer (voir aussi figure 4)

$$\begin{cases} - \text{Pour } (x, t) \in D_1 \text{ et } t \geq 2, & u(x, t) = 0, \\ - \text{Pour } 0 < x < \sigma_2(t) \text{ et } t \geq 2, & u(x, t) = x/t, \\ - \text{Pour } x > \sigma_2(t) \text{ et } t \geq 2, & u(x, t) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Pour déterminer la forme du choc, nous allons à nouveau nous appuyer sur la rela-

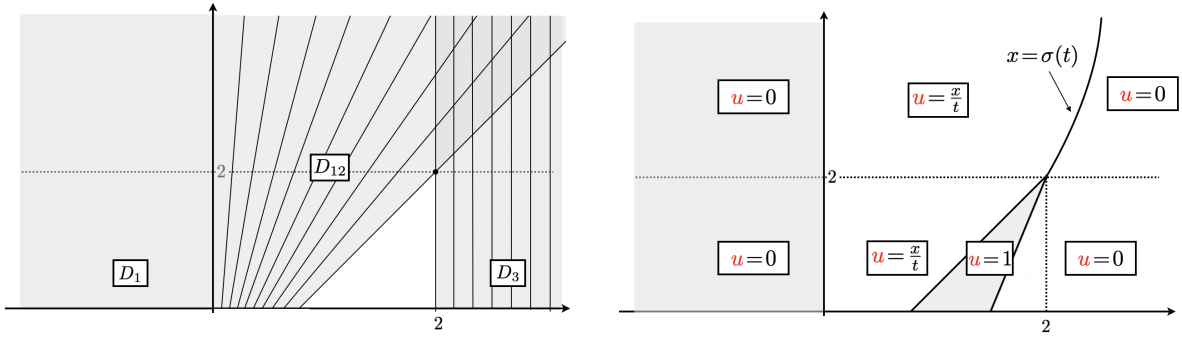


FIGURE 4 – Les domaines pour $t \geq 0$ (à gauche). La solution (à droite)

tion de Rankine-Hugoniot pour assurer qu'on construit bien une solution faible. La différence avec le premier choc est que, la solution n'étant plus constante de part et d'autre du choc (il s'agit de raccorder x/t à gauche du choc avec 0 à droite du choc), le choc ne va plus être droit. En effet comme

$$u_-(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(\sigma_2(t) - \varepsilon, t) = \sigma_2(t)/t, \quad u_+(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(\sigma_2(t) + \varepsilon, t) = 0,$$

la relation de Rankine-Hugoniot fournit l'équation différentielle

$$\sigma_2'(t) = \frac{1}{2}(u_+(t) + u_-(t)) = \frac{\sigma_2(t)}{2t}, \quad \sigma_2(2) = 2.$$

Cette équation différentielle est à variables séparées : elle s'écrit $\sigma_2'(t)/\sigma_2(t) = 1/(2t)$ soit encore $(\ln \sigma_2(t) - \frac{1}{2} \ln t)' = 0$. Elle s'intègre donc aisément

$$\ln \sigma_2(t) - \frac{1}{2} \ln t = cste, \quad \text{soit} \quad \sigma_2(t) = C \sqrt{t}.$$

On détermine la constante C avec $\sigma_2(2) = 2$ ce qui donne $C = \sqrt{2}$. Finalement, l'équation du choc s'écrit

$$\sigma_2(t) = \sqrt{2t}.$$

Construisons $u(x, t)$ par recollement de (4) et (5) : si nous introduisons les domaines (voir aussi figure 4, dessin de gauche,)

$$\begin{cases} D_{12}^* = \{(x, t) / 0 < x < t \text{ si } t \leq 2, 0 < x < \sqrt{2t} \text{ si } t \geq 2\}, \\ D_3^* = \{(x, t) \in D_3 / x \geq t \text{ si } t \leq 2, x \geq \sqrt{2t} \text{ si } t \geq 2\}, \end{cases}$$

la solution est finalement définie par

$$u(x, t) = 0 \text{ dans } D_1 \cup D_3^*, \quad u(x, t) = 1 \text{ dans } D_2^*, \quad u(x, t) = x/t \text{ dans } D_{12}^*. \quad (6)$$

Les graphes correspondants sont donnés par la figure 5.

Pour garantir qu'on a construit la solution entropique en s'appuyant sur les résultats du cours, il suffit de noter que

1. On a bien construit une solution faible parce que
 - (i) La fonction u est bien une solution classique là où elle est C^1 , c'est à dire à l'intérieur des quatre domaines D_1 , D_2^* , D_3^* et D_{12}^*
 - (ii) Le long des lignes de chocs (qui correspondent géométriquement à $\partial D_{12}^* \cap \partial D_2^*$ et $\partial D_{12}^* \cap \partial D_3^*$), la relation de Rankine Hugoniot est satisfaite (les chocs ont été construits pour ça).
2. Cette solution faible est bien la solution entropique parce que le long des chocs, $u^-(t) > u^+(t)$, autrement dit le choc est descendant. Comme le flux est convexe ($f(u) = u^2/2$ est convexe), les chocs sont entropiques³.

Sur la figure 5, dessin de droite, nous représentons le graphe $x \rightarrow u(x, t)$ de la solution à deux instants $t = t_1 < 2$ et $t = t_2 > 2$.

Terminons comme demandé dans l'énoncé par une étude descriptive du choc. On peut recoller les deux chocs précédemment construits en un seul, d'équation $x = \sigma(t)$, $t > 0$, en posant

$$\sigma(t) = 1 + t/2 \text{ pour } t < 2, \quad \sigma(t) = \sqrt{2t} \text{ pour } t \geq 2, \sigma(2) = 2.$$

En remarquant que

$$\sigma'(t) = 1/2 \text{ pour } t < 2, \quad \sigma'(t) = 1/\sqrt{2t} \text{ pour } t > 2,$$

on constate que la fonction $\sigma(t)$ est non seulement continue mais aussi de classe C^1 : le choc est lisse. Bien sur, comme $\sigma'(t)$ représente la vitesse du choc, on conclut que

3. Rappelons que pour une non linéarité $f(u)$ générale, (i. e. non convexe), la condition de choc entropique est plus compliquée. Si le choc est descendant, le graphe de f entre $u^+(t)$ et $u^-(t) > u^+(t)$ doit être au dessous de sa corde. Si le choc est montant, le graphe de f entre $u^-(t)$ et $u^+(t) > u^-(t)$ doit être au dessus de sa corde.

le choc, initialement de vitesse constante $1/2$, ralentit progressivement à partir de $t = 2$ et que sa vitesse tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

L'amplitude du choc $A(t) = |u^+(t) - u^-(t)|$ est donnée par

$$A(t) = 1 \text{ pour } t < 2, \quad A(t) = \sqrt{\frac{2}{t}} \text{ pour } t \geq 2.$$

Elle tend bien vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

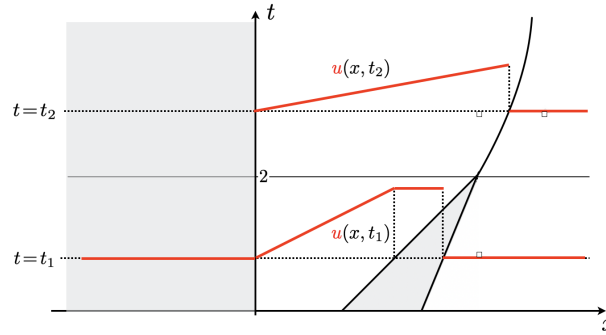


FIGURE 5 – Graphes de la solution à $t = t_1 < 2$ et $t = t_2 > 2$.

Question 3. Calculer la solution pour $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, et tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution à différents temps.

Corrigé de la question 3. Cette fois, les trois zones D_1 , D_2 et D_3 s'intersectent comme il est visible sur la figure 6 (dessin de gauche). Pour gérer les conflits, c'est à dire, pour t assez petit, les intersections $D_1 \cap D_2$ et $D_2 \cap D_3$, on va procéder comme à la question 2 et introduire deux lignes de chocs, une dans $D_1 \cap D_2$, une dans $D_2 \cap D_3$, prenant respectivement naissance aux points $(0, 0)$ et $(1, 0)$. D'après la relation de Rankine Hugoniot, ces chocs vont être droits et leur vitesse va être égale à $3/2$ (moyenne entre 1 et 2) pour le premier choc et $1/2$ (moyenne entre 0 et 1) pour le second. Ces chocs ont donc pour équations respectives

$$x = \sigma_1(t) := 3t/2 \quad \text{et} \quad x = \sigma_2(t) := 1 + t/2, \quad t > 0 \quad (\text{assez petit, voir plus loin}),$$

et on va proposer pour t assez petit

$$u(x, t) = 2 \text{ si } x < \frac{3t}{2}, \quad u(x, t) = 1 \text{ si } \frac{3t}{2} < x < 1 + \frac{t}{2}, \quad u(x, t) = 0 \text{ si } x > 1 + \frac{t}{2}. \quad (7)$$

Jusque quand cette description est elle valable? Clairement tant que $3t/2 < 1 + t/2$, c'est à dire jusqu'à ce que le second choc soit rattrapé par le premier, qui est trois fois plus rapide. La jonction s'effectue au point $(3/2, 1)$. Autrement dit, la description qui précède n'est valable que pour $t \leq 1$ (voir figure 6, dessin de droite).

Pour poursuivre au delà du temps $t = 1$, on remarque que $x \mapsto u(x, 1)$ ne prend plus

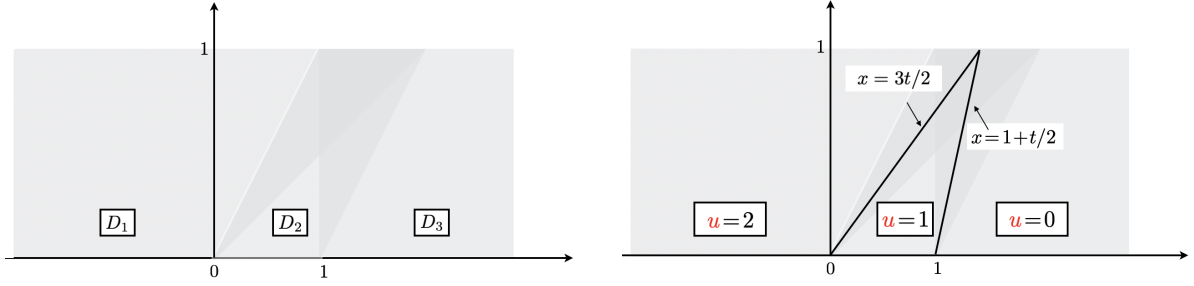


FIGURE 6 – Gauche : Solution (graphe) à $t = 2$. Droite : solution pour $t < 2$.

que deux valeurs à savoir 2 pour $x < 3/2$ et 0 pour $x > 3/2$. Autrement dit, en prenant $t = 1$ comme nouveau temps initial, tout se passe comme si on devait résoudre un nouveau problème de Riemann. On introduit alors un troisième choc droit prenant naissance en $(3/2, 1)$ et de vitesse 1 puisqu'il s'agit de raccorder la valeur 0 à gauche du choc à la valeur 2 à droite du choc. L'équation de ce troisième choc est donc

$$x = \sigma_3(t) := 3/2 + (t - 1) \equiv t + 1/2.$$

et la solution proposée pour $t > 2$ va s'écrire

$$u(x, t) = 2 \text{ si } x < t + \frac{1}{2}, \quad u(x, t) = 0 \text{ si } x > t + \frac{1}{2}. \quad (8)$$

Pour réunir (7) et (8) en une seule présentation faisant apparaître la solution comme une solution classique par (trois) morceaux, nous introduisons

$$\begin{cases} D_1^* = \{(x, t) / x < 3t/2 \text{ si } t \leq 1, x < t + 1/2 \text{ si } t > 1\}, \\ D_2^* = \{(x, t) / 3t/2 < x < 1 + t/2 \text{ et } t \leq 1\}, \\ D_3^* = \{(x, t) / x > 1 + t/2 \text{ si } t \leq 1, x > t + 1/2 \text{ si } t > 1\}. \end{cases}$$

auquel cas la solution est

$$u(x, t) = 2 \text{ dans } D_1^*, \quad u(x, t) = 1 \text{ dans } D_2^*, \quad u(x, t) = 0 \text{ dans } D_3^*. \quad (9)$$

Cette solution est illustrée par la figure 7.

Pour vérifier a posteriori qu'on a construit la bonne solution. C'est bien une solution faible car c'est une solution classique partout où elle est de classe C^1 et que la relation de Rankine-Hugoniot est satisfaite à travers chaque ligne de choc. C'est bien la solution entropique car tous les chocs sont "descendants" (et qu'on a affaire à une loi de conservation convexe).

EXERCICE 2 (PROBLÈMES DE RIEMANN POUR UNE NOUVELLE ÉQUATION NON LINÉAIRE)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^4}{4} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (10)$$

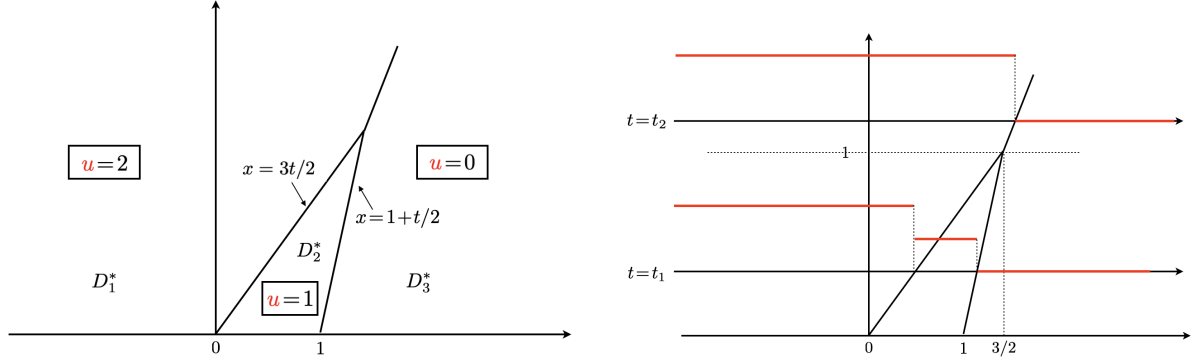


FIGURE 7 – La solution. A gauche dans le plan (x, t) . A droite : graphes à t fixé.

Préliminaires. Une grosse différence avec l'exercice 1 est que l'on ne travaille plus avec l'équation de Burgers. La conséquence principale sont que les équations des caractéristiques doivent être modifiées en conséquence, de même que la condition de Rankine-Hugoniot et l'expression analytique des ondes de détente. Cependant, la non linéarité $f(u) := u^4/4$ est strictement convexe, ce qui fait que la condition de choc entropique est la même que pour l'équation de Burgers : le choc doit être descendant. De façon équivalente, la fonction $a(u) := f'(u) = u^3$ est bijective strictement monotone de $\mathbb{R}$ dans lui même d'inverse

$$a^{-1}(u) = u^{1/3} \quad \text{si } u \geq 0, \quad a^{-1}(u) = -|u|^{1/3} \quad \text{si } u \leq 0, \quad (11)$$

Question 1. Écrire l'équation de la caractéristique dans le plan (x, t) qui passe par le point x_0 à $t = 0$.

Corrigé de la question 1. La théorie dans le cas général d'une non linéarité $f(u)$ dit que l'équation de la caractéristique est (il est utile de savoir le redémontrer)

$$x = X_{x_0}(t) := x_0 + a(u^0(x_0)) t.$$

Pour $f(u) = u^4/4$, $a(u) := f'(u) = u^3$ et la réponse à la question est donc :

$$X_{x_0}(t) = (u^0(x_0))^3 t + x_0.$$

Question 2. On choisit comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x < \alpha, \\ u_d, & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Question 2 (a). On se place dans le cas où $u_g > u_d$. Construire, à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique.

Dans le cas particulier où $u_g = 0$, $u_d = -2$ et $\alpha = 0$ donner et tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution aux temps $t = 0$ et $t = 1$.

Corrigé de la question 2 (a). il y a 2 zones à distinguer pour les caractéristiques suivant la valeur de x_0 : D_1 pour $x_0 < \alpha$ et D_2 pour $x_0 > \alpha$ (voir illustration figure 8, dessin de gauche, dans la cas $u_g = 0$, $u_d = -2$ et $\alpha = 0$).

Dans le cas où $u_g > u_d$, on a $u_g^3 > u_d^3$. Les caractéristiques des zones D_1 et D_2 se croisent pour $t > 0$. On va construire un choc :

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x < \sigma_1(t), \quad \text{i. e. dans } D_1, \\ u_d, & \text{si } x > \sigma_1(t), \quad \text{i. e. dans } D_2. \end{cases}$$

qui sera solution faible à condition que la relation de Rankine-Hugoniot soit satisfaite, c'est à dire que $\sigma_1(t)$ vérifie

$$\sigma_1'(t) = \frac{u_g^4/4 - u_d^4/4}{u_g - u_d}.$$

Comme de plus $\sigma_1(0) = \alpha$ (car la discontinuité de la donnée initiale u_o est en $x = 0$), nous obtenons

$$\sigma_1(t) = \frac{1}{4}(u_g^2 + u_d^2)(u_g + u_d)t + \alpha \quad (12)$$

Cette solution est bien la solution faible entropique car f étant convexe, le choc est

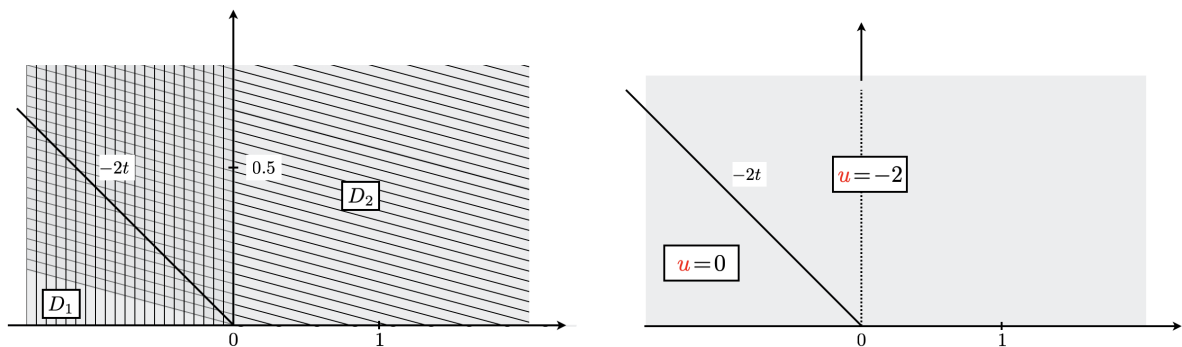


FIGURE 8 – A gauche : zones et caractéristiques. A droite : la solution.

descendant ($u_g > u_d$).

Dans le cas particulier où $u_g = 0$, $u_d = -2$ et $\alpha = 0$, $\sigma_1(t) = -2t$ et

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < -2t, \quad \text{i. e. dans } D_1, \\ -2, & \text{si } x > -2t, \quad \text{i. e. dans } D_2. \end{cases}$$

(voir figure 8, dessin de droite).

Question 2 (b). On se place dans le cas où $u_g < u_d$. Construire, à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique.

Dans le cas particulier où $u_g = -2$, $u_d = -1$ et $\alpha = 1$ donner et tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution aux temps $t = 0$ et $t = 1$.

Corrigé de la question 2 (b). À nouveau, il y a 2 zones à distinguer pour les caractéristiques suivant la valeur de x_0 : D_2 pour $x_0 < \alpha$ et D_3 pour $x_0 > \alpha$ (voir illustration figure 9, dessin de gauche, dans la cas $u_g = -2$, $u_d = -1$ et $\alpha = 1$).

Dans le cas où $u_g < u_d$, il existe une zone D_{23} , entre D_2 et D_3 qui n'est pas couverte par les caractéristiques. On introduit donc les caractéristiques d'équation $x = ct + \alpha$ pour $u_g^3 < c < u_d^3$ pour la zone D_{23} , lesquelles vont correspondre à l'onde de détente.

On va construire une solution de classe C^1 par morceaux pour $t > 0$ qui satisfait

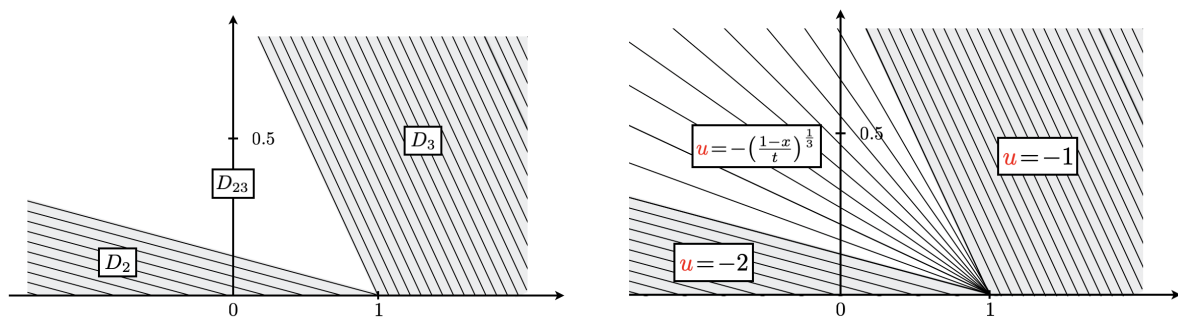


FIGURE 9 – A gauche : zones et caractéristiques. A droite : la solution.

l'équation (10) qui consiste à compléter la solution égale à u_g dans D_2 et à u_d dans D_3 par l'onde de détente qui, conformément à ce qui a été vu en cours et en prenant en compte le fait que la donnée initiale est discontinue en α , est donnée par $a^{-1}((x - \alpha)/t)$. Cela nous donne donc

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x < u_g^3 t + \alpha, \\ a^{-1}\left(\frac{x - \alpha}{t}\right), & \text{si } u_g^3 t + \alpha < x < u_d^3 t + \alpha \\ u_d, & \text{si } x > u_d^3 t + \alpha. \end{cases}$$

où on rappelle que a^{-1} est ici donnée par (11). Cette fonction définit bien la solution faible du problème en tant que solution classique par morceaux et continue. Dans la cas $u_g = -2$, $u_d = -1$ et $\alpha = 1$, on obtient (voir aussi figure 9, dessin de droite)

$$u(x, t) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < -8t + 1, & \text{i. e. dans } D_2 \\ -\frac{(1-x)^{1/3}}{t^{1/3}}, & \text{si } -8t + 1 < x < -t + 1, & \text{i. e. dans } D_{23} \\ u_d, & \text{si } x > -t + 1, & \text{i. e. dans } D_3. \end{cases}$$

Question 3. On choisit comme condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ -2, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ -1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calculer à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique, donner l'équation des caractéristiques dans le plan (x, t) et tracer leur allure.

Corrigé de la question 3. La donnée initiale considérée est une concaténation des deux données initiales des deux premières questions : elle coïncide avec celle de la question 1 pour $x \leq 1$ et avec la condition initiale de la question 2 pour $x \geq 0$. Ne serait-ce que par propagation à vitesse finie (voir le cours), on sait que, au moins pour un temps assez court, la solution va être également la concaténation des deux solutions trouvées précédemment. Cela mène à

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq -2t, \\ -2, & \text{si } -2t \leq x \leq -8t + 1 \\ -\frac{(1-x)^{1/3}}{t^{1/3}}, & \text{si } -8t + 1 < x \leq -t + 1, \\ -1, & \text{si } x > -t + 1. \end{cases} \quad (13)$$

Jusqu'à quand cette solution est-elle valable : clairement tant que le premier intervalle $[-2t, -8t + 1]$ est non vide c'est à dire tant que la caractéristique de vitesse -8 issue du second point de discontinuité $x_0 = 1$ n'a pas rattrapé le choc issu du second point de discontinuité $x_0 = 0$. Cette rencontre intervient au point

$$(x_1, t_1), \quad t_1 = 1/6 \quad (\text{i. e. } -8t_1 + 1 = -2t_1), \quad x_1 = -1/3. \quad (14)$$

Autrement dit la solution (13) est proposée pour $t \leq t_1$. Dans cet intervalle de temps, cette solution comporte un premier choc d'équation $x = \sigma_1(t) := -2t$, $0 \leq t \leq t_1$.

À l'instant t_1 , $x \mapsto u(x, t_1)$ présente une discontinuité "descendante" ($0 > -2$) en $x = -1/3$. Il faut donc introduire un second choc issu du point (x_1, t_1) , d'équation $x = \sigma_2(t)$ avec $\sigma_2(t_1) = x_1$, destiné à assurer le raccord entre

$$0 \quad \text{à gauche du choc,} \quad -\frac{(1-x)^{1/3}}{t^{1/3}} \quad \text{à droite du choc.}$$

La valeur à droite du choc n'étant pas constante, le choc va être courbe. Sa forme va être obtenue en écrivant la relation de Rankine-Hugoniot, c'est à dire, en conservant la notation introduite pour la correction de l'exercice 1,

$$\sigma_2'(t) = \frac{1}{4} \frac{u^+(t)^4 - u^-(t)^4}{u^+(t) - u^-(t)}, \quad \text{avec } u^-(t) = 0, \quad u^+(t) = -\frac{(1 - \sigma_2(t))^{1/3}}{t^{1/3}}.$$

On obtient donc l'équation différentielle

$$\sigma_2'(t) = \frac{1}{4} \frac{\sigma_2(t) - 1}{t}.$$

Cette équation différentielle s'intègre en la réécrivant $\sigma_2'(t)/(\sigma_2(t) - 1) = 1/(4t)$, soit encore $[\ln(\sigma_2(t) - 1) - \frac{1}{4} \ln t]' = 0$. Par conséquent

$$\ln(\sigma_2(t) - 1) - \frac{1}{4} \ln t = \text{cste}, \quad \text{soit} \quad \sigma_2(t) = 1 + C t^{\frac{1}{4}}.$$

On détermine la constante C avec $\sigma_2(1/6) = -1/3$ ce qui donne $C = -\frac{4}{3} 6^{\frac{1}{4}}$.

Finalement, l'équation du choc s'écrit

$$\sigma_2(t) = -\frac{4}{3} (6t)^{\frac{1}{4}} + 1, \quad t \geq t_1.$$

Ce choc se raccorde de façon C^1 avec $\sigma_1(t)$ en $t = t_1 = 1/6$ puisque

$$\sigma_2'(t_1) = \sigma_2(t_1)/(4t_1) = \frac{3}{2} [\sigma_2(t_1) - 1] = -2 = \sigma_1'(t_1)$$

À partir de $t = t_1$, on va donc proposer la solution

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq \sigma_2(t), \\ -\frac{(1-x)^{1/3}}{t^{1/3}}, & \text{si } \sigma_2(t) < x \leq -t+1, \\ -1, & \text{si } x > -t+1. \end{cases} \quad (15)$$

Jusqu'à quand cette solution est-elle valable? Tant que l'intervalle $[-\sigma_2(t), -t+1]$ est non vide c'est à dire tant que la caractéristique de vitesse -1 issue du second point de discontinuité $x_0 = 1$ n'a pas rattrapé le second choc que nous venons d'introduire. Comme lorsque $t \rightarrow +\infty$, $\sigma_2(t)$ tend vers $-\infty$ proportionnellement à $-t^{\frac{1}{4}}$, c'est à dire moins vite que $-t+1$, cette rencontre va se produire, au temps $t_2 > t_1$ tel que

$$\sigma_2(t_2) := -\frac{4}{3} (6t_2)^{\frac{1}{4}} + 1 = -t_2 + 1,$$

ce qui donne après un petit calcul

$$t_2 = \left(\frac{4}{3}\right)^{4/3} 6^{\frac{1}{3}}, \quad (16)$$

l'abscisse du point de rencontre étant alors donnée par

$$x_2 = -t_2 + 1 \equiv -\left(\frac{4}{3}\right)^{4/3} 6^{\frac{1}{3}} + 1.$$

En $t = t_2$, la fonction $x \mapsto u(x, t_2)$, où u est donnée par (15), ne prend plus que deux valeurs, 0 pour $x < x_2$ et -1 pour $x > x_2$. À partir du temps t_2 , on a donc affaire à un simple problème de Riemann et on peut donc, à un simple décalage en temps, se ramener à la question 2, et même plus précisément à la question 2.a avec $u_g = -1$, $u_d = 0$ et $\alpha = x_1$. Il convient donc d'introduire un troisième choc, droit celui-ci

puisque'il s'agit de raccorder deux valeurs constantes. En se référant à la formule (12), l'équation de ce troisième choc est donc

$$\sigma_3(t) = -\frac{1}{4}(t - t_2) + x_2$$

Notons que ce choc se raccorde de façon C^1 avec $\sigma_2(t)$ en $t = t_2$ puisque

$$\sigma_2'(t_2) = (\sigma_2(t_2) - 1)/(4t_2) = (x_2 - 1)/(4t_2) = -\frac{1}{4} \equiv \sigma_3'(t_2).$$

La solution pour $t > t_2$, s'écrit alors

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq \sigma_3(t), \\ -1, & \text{si } x > \sigma_3(t). \end{cases} \quad (17)$$

Comme nous l'avons fait à l'exercice 1, nous pouvons regrouper les trois chocs précédemment introduits en un seul choc d'équation $x = \sigma(t)$ avec

$$\sigma(t) = \begin{cases} \sigma_1(t) \equiv -2t & \text{si } 0 \leq t \leq t_1, \\ \sigma_2(t) \equiv -\frac{4}{3}(6t)^{\frac{1}{4}} + 1, & \text{si } t_1 \leq t \leq t_2, \\ \sigma_3(t) \equiv -\frac{1}{4}(t - t_2) + x_2 & \text{si } t_2 \leq t, \end{cases} \quad (18)$$

La fonction $\sigma(t)$ est bien entendu continue et de classe C^1 .

On peut ensuite regrouper la solution correspondant à (13, 15, 17) en introduisant les quatre domaines

$$\begin{cases} D_1^* = \{(x, t) / x < \sigma(t), t > 0\}, \\ D_2^* = \{(x, t) / t \leq t_1 \text{ et } \sigma(t) < x < 1 - 8t\}, \\ D_{23}^* = \{(x, t) / t \leq t_2 \text{ et } 1 - 8t < x < 1 - t \text{ si } t \leq t_1, \sigma(t) < x < 1 - t \text{ si } t_1 \leq t \leq t_2\}, \\ D_3^* = \{(x, t) / x > 1 - t \text{ si } t \leq t_2, x > \sigma(t) \text{ si } t > t_2\}. \end{cases}$$

La solution, illustrée par la figure 10, s'écrit alors

$$u = 0 \text{ dans } D_1^*, u = -2 \text{ dans } D_2^*, u = -\frac{(1-x)^{1/3}}{t^{1/3}} \text{ dans } D_{23}^*, u = -1 \text{ dans } D_3^*. \quad (19)$$

Les relations de Rankine Hugoniot sont satisfaites à travers tous les chocs (on a tout fait pour ça) et partout ailleurs la fonction est une solution classique, donc on a bien construit une solution faible! Et comme les chocs sont descendants et le flux convexe, la solution est une solution entropique!

EXERCICE 3 (LIGNE DE CHOC COURBE)

On considère encore le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (20)$$

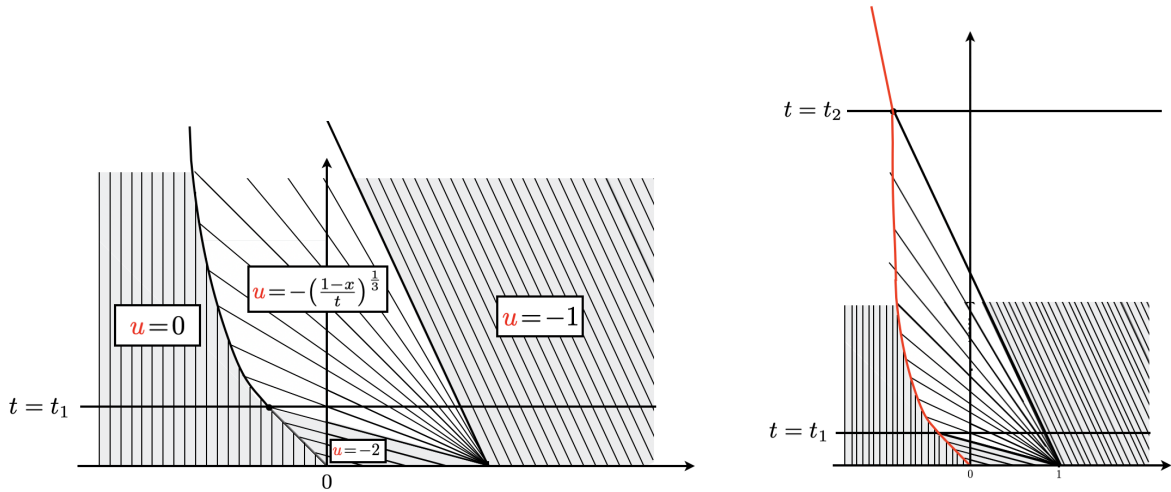


FIGURE 10 – La solution . A droite : zoom pour voir plus tard (choc en rouge)

mais on choisit cette fois ci comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} -1/2, & \text{si } x \leq -1/2, \\ x, & \text{si } -1/2 < x \leq 1, \\ -1/2, & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (21)$$

Question. Calculer la solution exacte du problème avec cette condition initiale.

Corrigé de la question. Comme on résout l'équation de Burgers, les droites caractéristiques $(X_{x_0}(t), t)$ sont des droites de pente : $X'_{x_0}(t) = u_0(x_0)$ d'où les équations

$$X_{x_0}(t) = u_0(x_0)t + x_0$$

Il y a trois zones à distinguer pour les caractéristiques suivant la valeur de x_0 : zone (1) pour $x_0 \leq -1/2$, zone (2) pour $-1/2 < x_0 \leq 1$ et zone (3) pour $x_0 > 1$,

$$\begin{cases} X_{x_0}(t) = x_0 - t/2, & \text{si } x_0 \leq -1/2, & \text{soit } X_{x_0}(t) \leq -(1+t)/2 & \text{zone (1),} \\ X_{x_0}(t) = x_0 + x_0 t, & \text{si } -1/2 < x_0 \leq 1, & \text{soit } (-1-t)/2 < X_{x_0}(t) \leq t+1 & \text{zone (2),} \\ X_{x_0}(t) = x_0 - t/2, & \text{si } x_0 > 1, & \text{soit } X_{x_0}(t) > 1 - t/2 & \text{zone (3).} \end{cases}$$

L'application naïve de la méthode des caractéristiques suggérerait $u(x, t) = -1/2$ dans la zone (1), $u(x, t) = x/(1+t)$ (les calculs sont laissés au lecteur, voir aussi l'exercice 2 du TD2) dans la zone (2) et $u(x, t) = -1/2$ à nouveau dans la zone (3). Le problème est que les caractéristiques des zones (2) et (3) se croisent dès que $t > 0$: il y a donc naissance d'un choc d'équation $x = \sigma(t)$ au point $(x = 1, t = 0)$, à gauche duquel la solution devrait être $u(x, t) = (x - 1)/t$ et à droite duquel elle devrait être $u(x, t) = -1/2$. L'équation de la ligne de choc entre les zones (2) et (3), $x = \sigma(t)$, doit vérifier la relation de Rankine-Hugoniot, soit, avec les notations du corrigé de l'exercice 1

$$\sigma'(t) = \frac{u_-(t) + u_+(t)}{2} = \frac{\sigma(t)}{2(1+t)} - \frac{1}{4}$$

Contrairement à ce que nous avons vu dans les exercices précédents, cette équation n'est pas à variables séparées. Par contre, il s'agit d'une équation linéaire non homogène dont la version homogène

$$\sigma'_0(t) = \frac{\sigma_0(t)}{2(1+t)}$$

est elle à variables séparées et admet pour solution générale $\sigma_0(t) = A\sqrt{1+t}$, $A \in \mathbb{R}$. La méthode de variation de la constante consiste à chercher $\sigma(t)$ sous la forme

$$\sigma(t) = A(t)\sqrt{1+t}$$

où $A(t)$ est à déterminer, ce qui revient à un changement de fonction inconnue. En reportant cette expression dans l'équation différentielle pour $\sigma(t)$, on obtient alors l'équation différentielle suivante pour $A(t)$:

$$A'(t) = -\frac{1}{4\sqrt{1+t}}$$

D'où, pour un certain $C \in \mathbb{R}$, $A(t) = C - \frac{1}{2}\sqrt{1+t}$ et donc $\sigma(t) = C\sqrt{1+t} - \frac{1+t}{2}$.

Comme $\sigma(0) = 1$, on en déduit $C = 3/2$, ce qui donne finalement

$$\sigma(t) = \frac{3\sqrt{1+t} - (1+t)}{2}$$

La solution cherchée s'écrit finalement

$$u(x, t) = \begin{cases} -1/2, & \text{si } x < -(1+t)/2, \\ \frac{x}{1+t}, & \text{si } -(1+t)/2 < x < \sigma(t), \\ -1/2, & \text{si } x > \sigma(t). \end{cases}$$

La relation de Rankine Hugoniot est satisfaite à travers le choc (on a tout fait pour ça) et partout ailleurs la fonction est une solution classique, donc c'est une solution faible! Et comme le flux est convexe et les chocs descendants, la solution est entropique!