

PC3 : Résolution analytique d'équations hyperboliques non linéaires en 1D

16 mars 2026

EXERCICE 1 (PROBLÈME DE RIEMANN À 3 ÉTATS POUR L'ÉQUATION DE BÜRGERS)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (1)$$

On choisit comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} u_1, & \text{si } x \leq 0, \\ u_2, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ u_3, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Question 1. A quelle condition a-t-on une solution continue à $t > 0$?

Question 2. Calculer la solution pour $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et $u_3 = 0$. Tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution à différents temps. Montrer que l'amplitude et la vitesse du choc tendent vers 0 quand $t \rightarrow +\infty$.

Question 3. Calculer la solution pour $u_1 = 2$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, et tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution à différents temps.

EXERCICE 2 (PROBLÈMES DE RIEMANN POUR UNE NOUVELLE ÉQUATION NON LINÉAIRE)

On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^4}{4} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (2)$$

Question 1. Écrire l'équation de la caractéristique dans le plan (x, t) qui passe par le point x_0 à $t = 0$.

Question 2. On choisit comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} u_g, & \text{si } x < \alpha, \\ u_d, & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Question 2 (a). On se place dans le cas où $u_g > u_d$. Construire, à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique.

Dans le cas particulier où $u_g = 0$, $u_d = -2$ et $\alpha = 0$ donner et tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution aux temps $t = 0$ et $t = 1$.

Question 2 (b). On se place dans le cas où $u_g < u_d$. Construire, à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique.

Dans le cas particulier où $u_g = -2$, $u_d = -1$ et $\alpha = 1$ donner et tracer les caractéristiques dans le plan (x, t) et la solution aux temps $t = 0$ et $t = 1$.

Question 3. On choisit comme condition initiale

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0, \\ -2, & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ -1, & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Calculer à l'aide de la méthode des caractéristiques, la solution faible entropique, donner l'équation des caractéristiques dans le plan (x, t) et tracer leur allure.

EXERCICE 3 (LIGNE DE CHOC COURBE)

On considère encore le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) = 0, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = u^0(x). \end{cases} \quad (3)$$

mais on choisit cette fois ci comme condition initiale

$$u^0(x) = \begin{cases} -1/2, & \text{si } x \leq -1/2, \\ x, & \text{si } -1/2 < x \leq 1, \\ -1/2, & \text{si } x > 1. \end{cases} \quad (4)$$

Question. Calculer la solution exacte du problème avec cette condition initiale.