

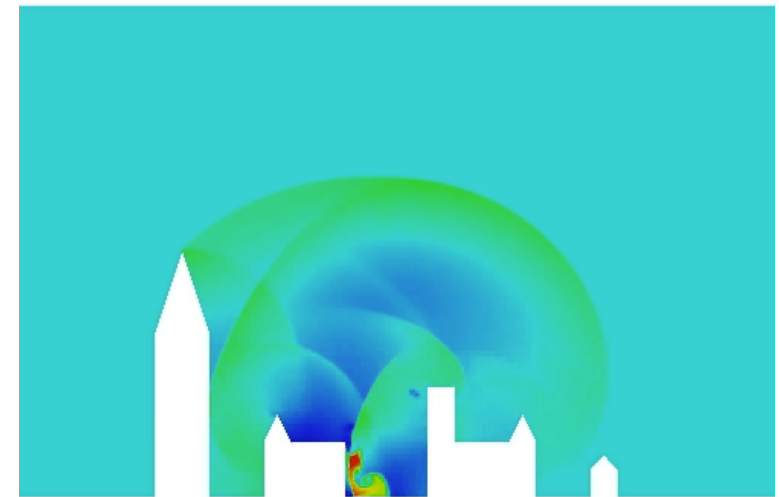
Problèmes hyperboliques non linéaires

Dans le dernier épisode de MA103...

- ☒ Lois de conservation scalaire
- ☒ Solution classique et Temps d'existence
- ☒ Notion de solution faible
- ☒ Solution C^1 par morceaux et relation de Rankine Hugoniot

... et dans l'épisode d'aujourd'hui...

- ☐ Non unicité des solutions faibles
- ☐ Notion de solution faible entropique
- ☐ Théorème d'existence et d'unicité
- ☐ Propriété de monotonie
- ☐ Problème de Riemann à 2 états dans les cas f convexe



Résultats numériques de
Frédéric Alauzet

Solution classique

On considère le **problème de Cauchy**

$$(\mathcal{P}) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

On appelle **solution classique** du problème sur $[0, T[$, une fonction $u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T[)$ qui satisfait $(\mathcal{P})$ au sens **usuel pour** $0 \leq t \leq T$.

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ admet une unique solution classique maximale

$$u \in C^1(\mathbb{R} \times [0, T^*[)$$

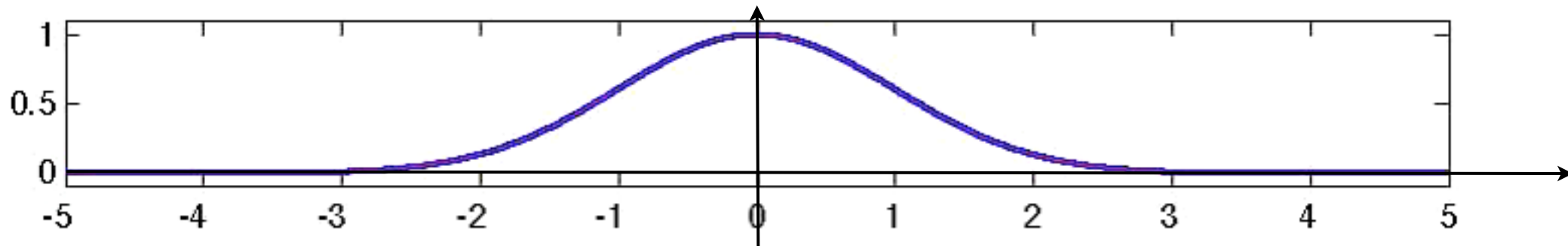
où $\triangleright$ Si $a \circ u^0$ est croissante $T^* = +\infty$

$$\triangleright \text{Sinon} \quad T^* = - \left(\inf_{x_0 \in \mathbb{R}} \frac{d(a \circ u^0)}{dx}(x_0) \right)^{-1}$$

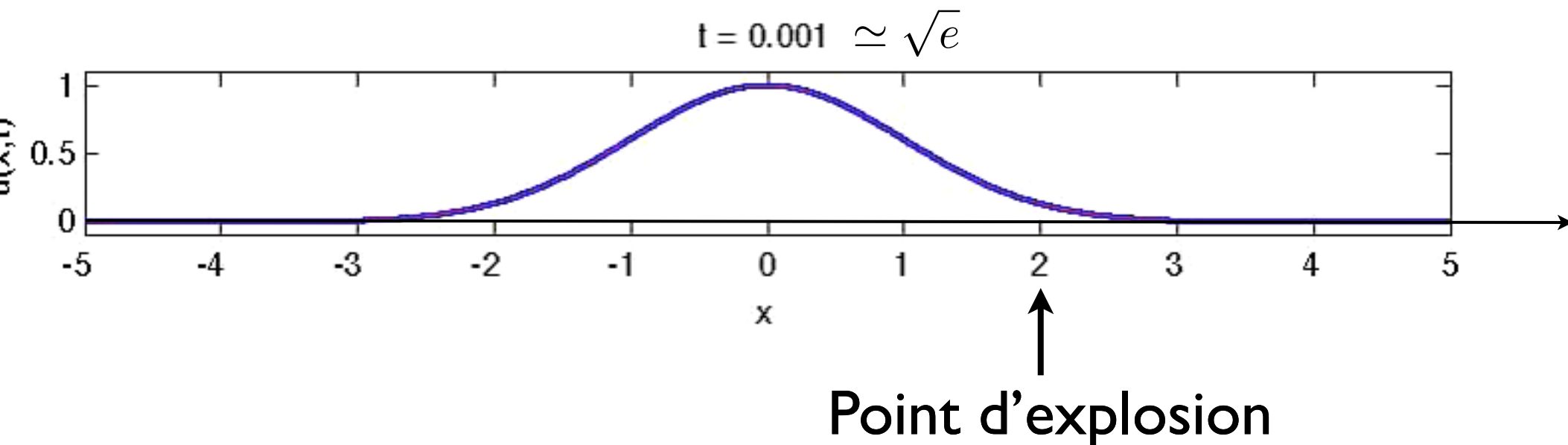
Illustration numérique

Rappel³

Équation de Burgers: $f(u) = u^2/2$ - Donnée initiale $u^0(x) = e^{-x^2/2}$



Question : que se passe-t-il après ce temps T^* ? pour le savoir, on doit étendre la notion de solution pour autoriser des discontinuités.



Définition : Étant donné $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on appelle **solution faible** de $(\mathcal{P})$ sur $[0, T[$, $T \leq +\infty$ une fonction $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R} \times [0, T[)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{V}_T$

$$\mathcal{V}_T = \left\{ \varphi \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) / \text{supp } \varphi \text{ is compact } \subset \mathbb{R} \times [0, T[\right\}$$

$$\iint \left\{ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx dt + \int \varphi(x, 0) u^0(x) dx = 0$$

Remarques :

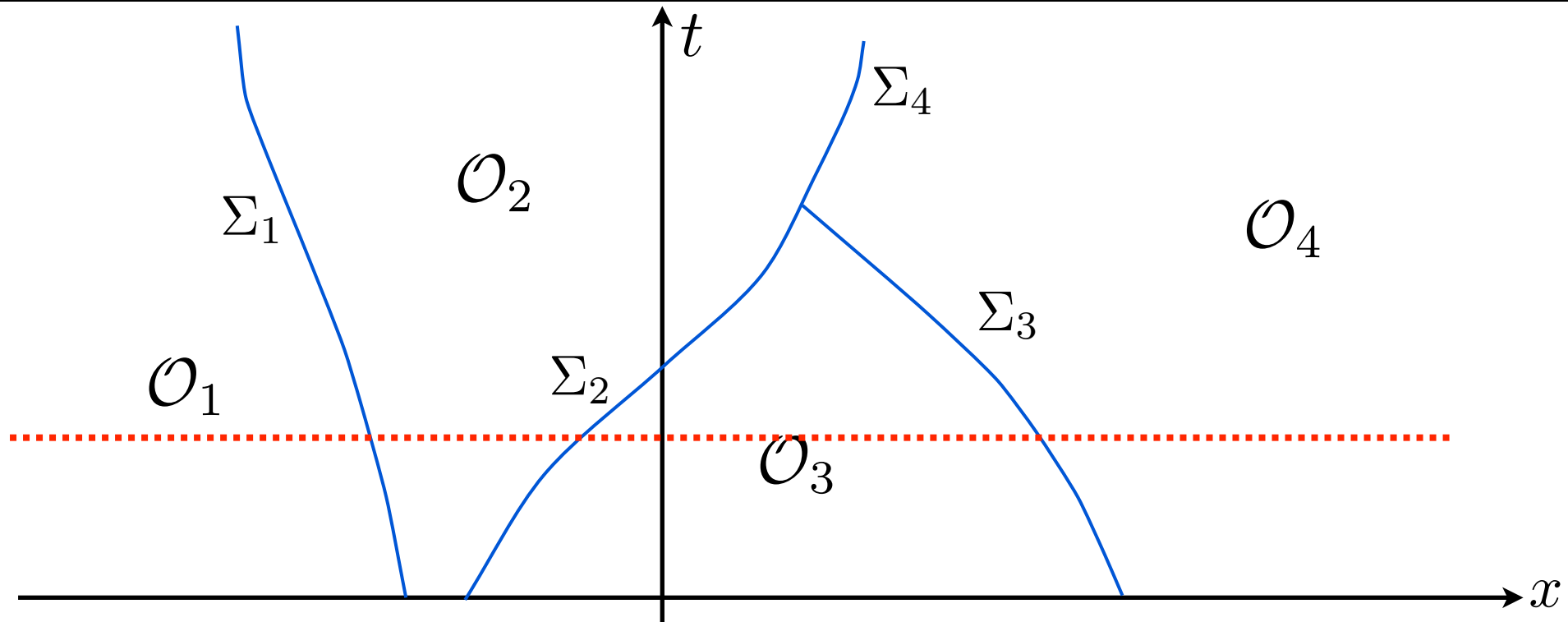
- Par construction, toute solution forte est solution faible. Inversement, toute solution faible ayant la régularité $\mathcal{C}^1$ est solution forte (exercice).
- Cette définition n'est pas très explicite, on donne dans la suite une caractérisation plus explicite pour les solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition : Une **solution $\mathcal{C}^1$ par morceaux** est une solution faible u telle qu'il existe un nombre fini d'arcs

$$\Sigma_i = \{ x = \sigma_i(t), \quad t_i^- \leq t \leq t_i^+ \}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

telle que u est de classe $\mathcal{C}^1$ dans chaque composante connexe

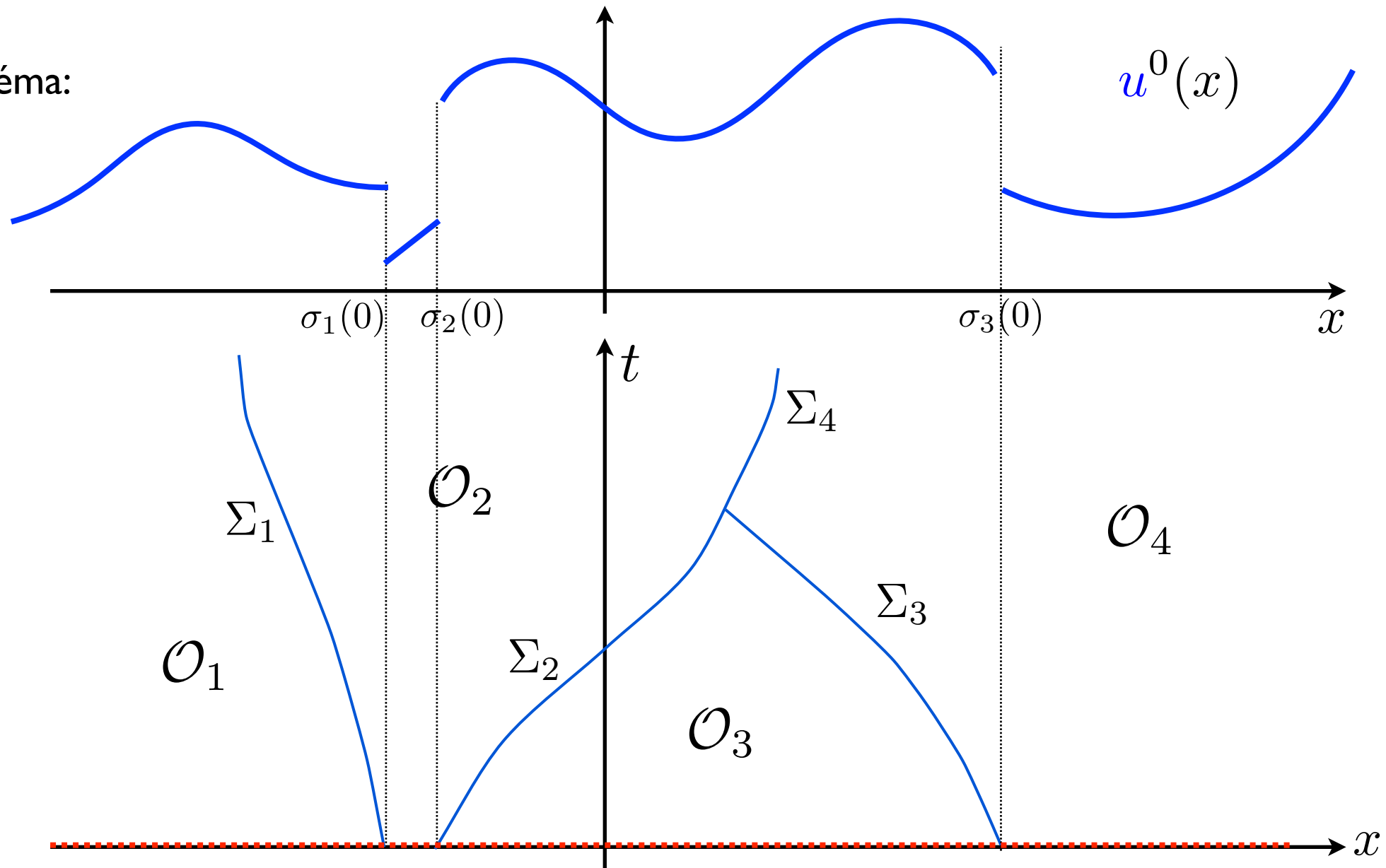
$$\mathcal{O}_j, 1 \leq j \leq M, \quad \text{de} \quad \mathbb{R} \times [0, T[\setminus \bigcup_{i=1}^N \Sigma_i$$



Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Si u est **discontinue** à travers Σ , on dit que u présente un **choc** et que Σ est une **ligne de choc**.

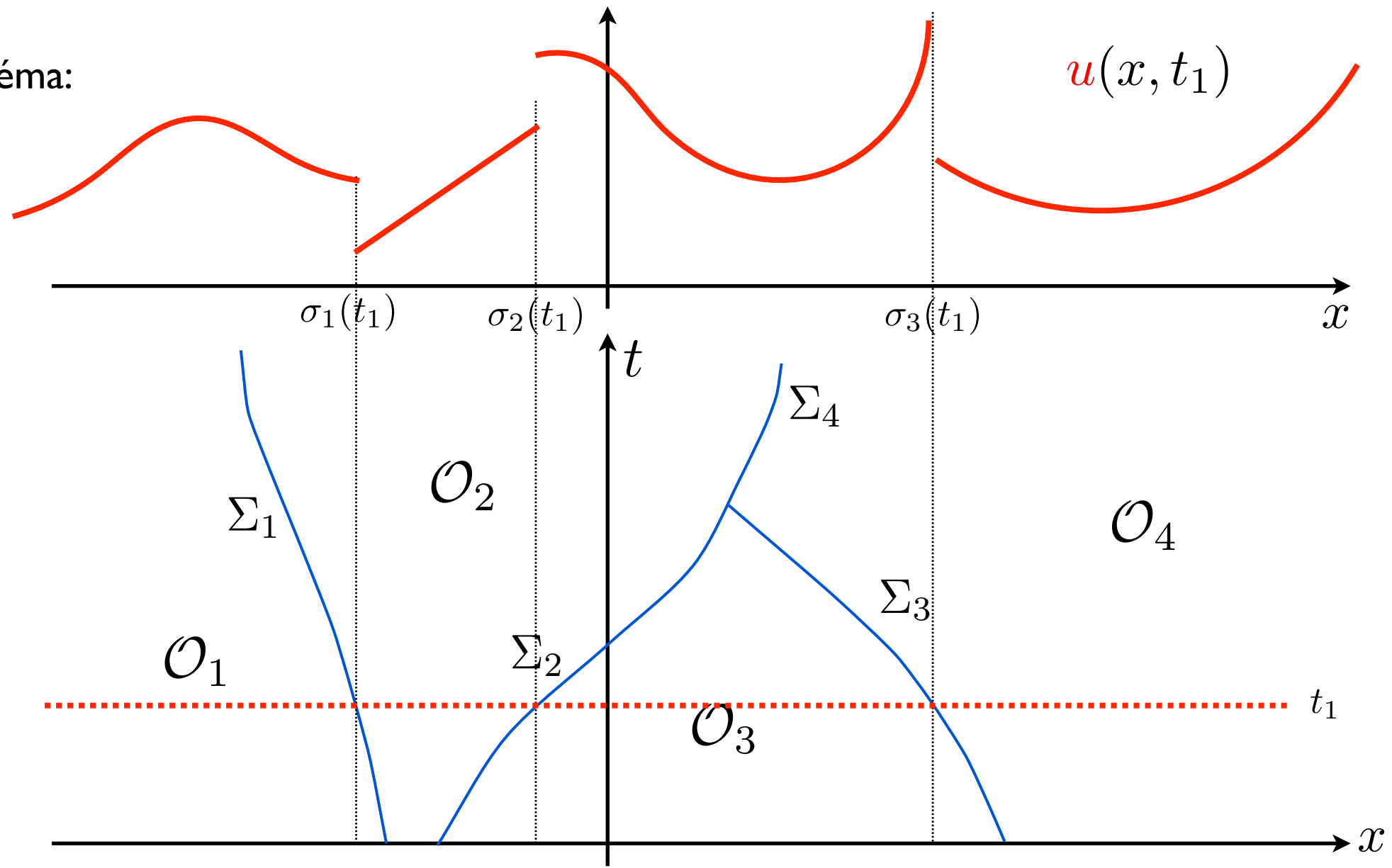
Schéma:



Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Si u est **discontinue** à travers Σ , on dit que u présente un **choc** et que Σ est une **ligne de choc**.

Schéma:

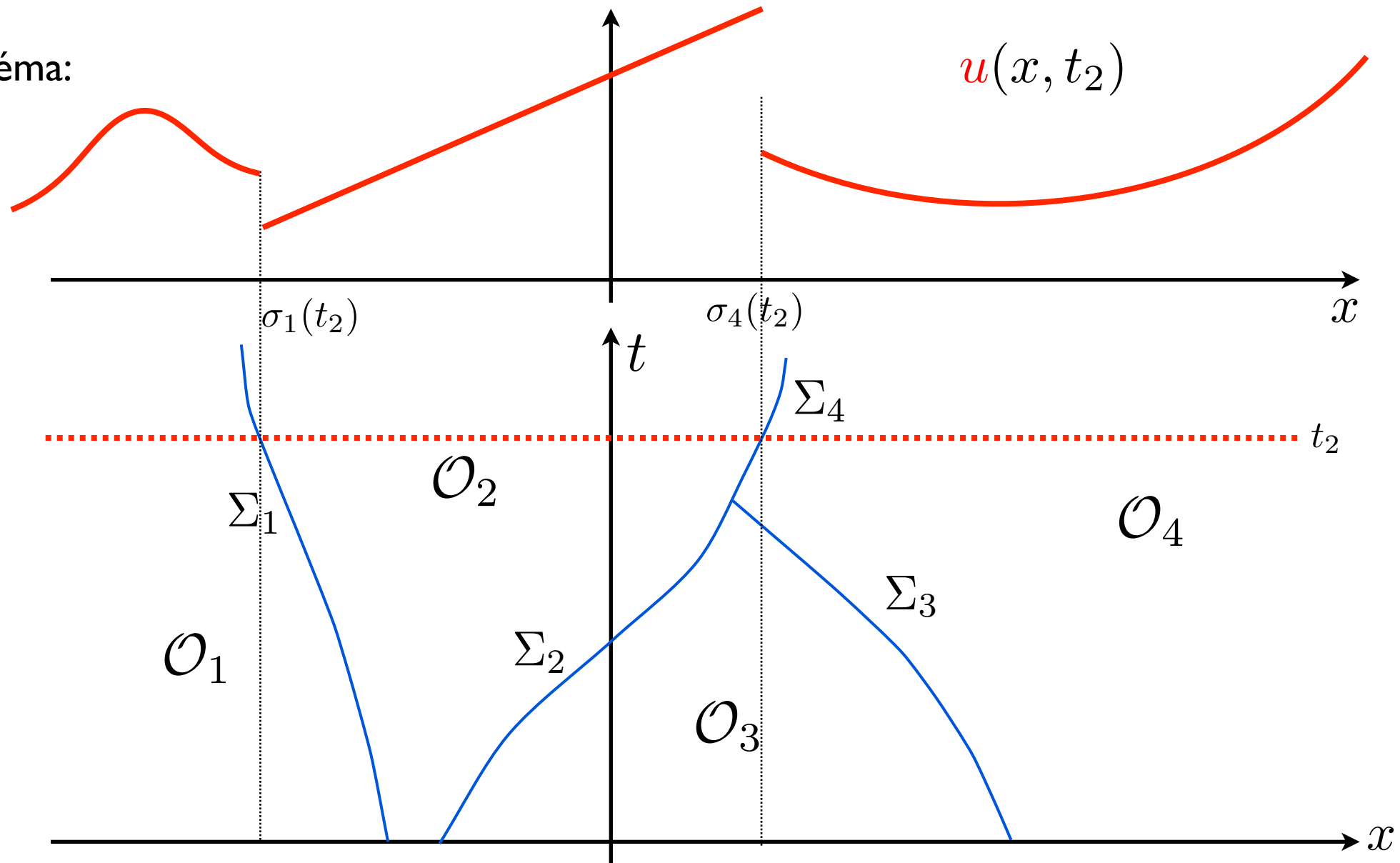


Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Rappel 8

Si u est **discontinue** à travers Σ , on dit que u présente un **choc** et que Σ est une **ligne de choc**.

Schéma:



Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Théorème : Une fonction u , $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est une solution faible si et seulement si u est solution classique dans chaque $\mathcal{O}_j$ et si à travers chaque ligne

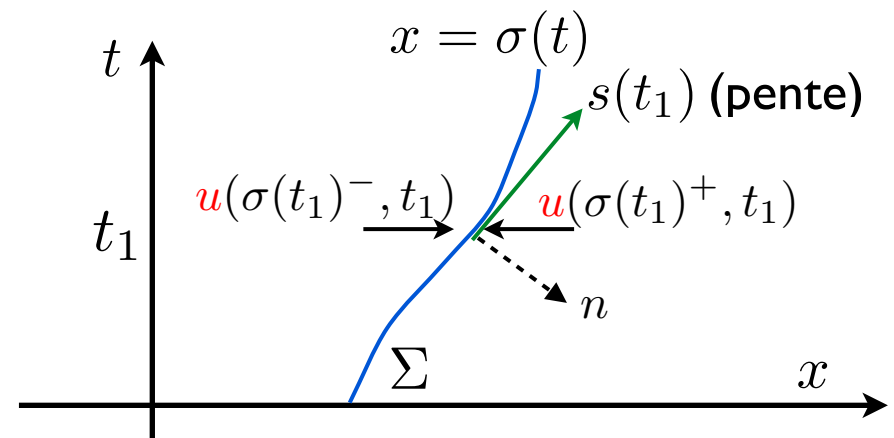
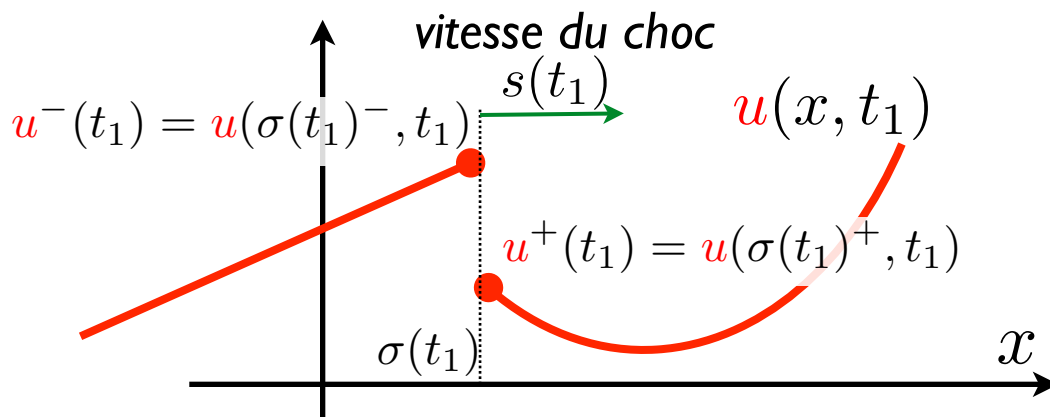
$$\Sigma = \{ x = \sigma(t), t^- \leq t \leq t^+ \},$$

u vérifie la relation de Rankine-Hugoniot pour $t^- \leq t \leq t^+$

$$s(t) [u^+(t) - u^-(t)] = f(u^+(t)) - f(u^-(t))$$

avec $s(t) := \sigma'(t)$ et $u^\pm(t) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(\sigma(t) \pm \varepsilon, t)$

Si Σ est une **ligne de choc**, $s(t) := \sigma'(t)$ est la **vitesse de propagation du choc**.



Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Remarques

- Si $u^+(t) = u^-(t)$ alors la condition de Rankine Hugoniot est satisfaite. Une solution $\mathcal{C}^1$ pm et continue est donc solution faible.
- Si $f(u) = cu$, la condition de Rankine Hugoniot s'écrit

$$\sigma'(t) = c$$

Les lignes de discontinuité se propagent donc à la vitesse c .

- Si $f(u) = \frac{u^2}{2}$, la condition de Rankine Hugoniot s'écrit

(pour $u^+(t) \neq u^-(t)$)

$$\sigma'(t) = \frac{f(u^+(t)) - f(u^-(t))}{u^+(t) - u^-(t)} \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Eq. de Burgers}}}{=} \frac{u^+(t) + u^-(t)}{2}$$

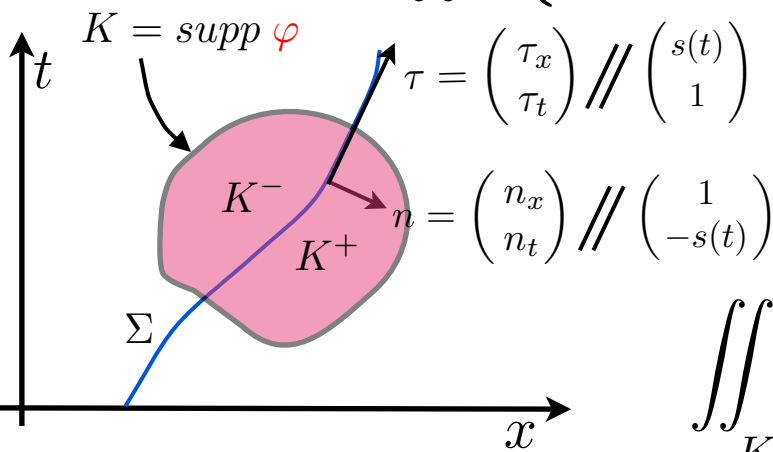
- Pour tout choc, on a $s = \frac{[f(u)]}{[u]}$

qui est à rapprocher de $a(u) = f'(u)$

Solutions $\mathcal{C}^1$ par morceaux

Preuve On montre que la relation de Rankine Hugoniot découle de la définition de solution faible

$$\forall \varphi \in \mathcal{V}_T \iint \left\{ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} dx dt + \int \varphi(x, 0) u^0(x) dx = 0$$



On choisit une fonction test à support dans K (contenant un choc)

$$\iint_{K^+} \left\{ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} + \iint_{K^-} \left\{ u \frac{\partial \varphi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\} = 0$$

Après une intégration par partie dans K^+ et dans K^- on trouve

$$-\iint_{K^+} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right)}_0 \varphi - \iint_{K^-} \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) \right)}_0 \varphi - \int_{\Sigma} (u^+ n_t + f(u^+) n_x) \varphi + \int_{\Sigma} (u^- n_t + f(u^-) n_x) \varphi = 0$$

(car u sol. classique)

On en déduit que
$$\int_{\Sigma} \underbrace{\left[(u^+ - u^-) n_t + (f(u^+) - f(u^-)) n_x \right]}_0 \varphi = 0 \quad \forall \varphi$$

Comme $n = \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} 1 \\ -s(t) \end{pmatrix}$, on a
$$-s(t) (u^+ - u^-) + (f(u^+) - f(u^-)) = 0$$

Non unicité des solutions faibles

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible de

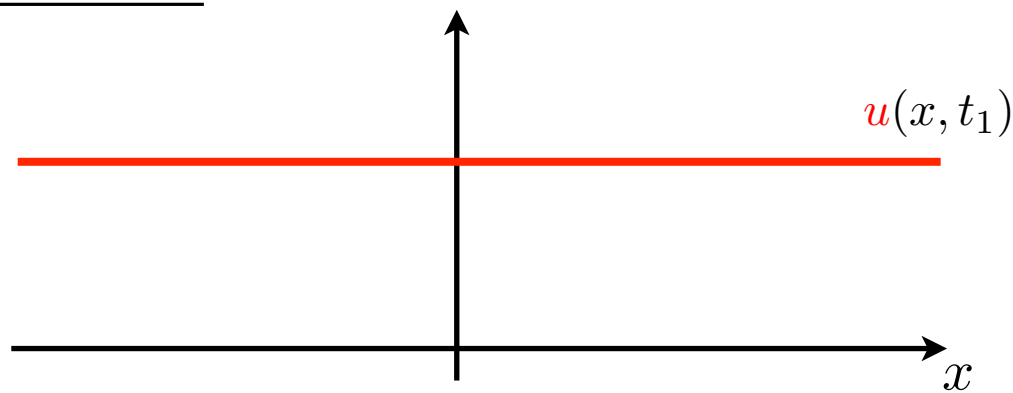
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

voir Exo4 TD2

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ avec } u^0(x) = A \text{ et } f(u) = \frac{u^2}{2}, \quad a(u) = u.$$

Rappel - Equation des caractéristiques : $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0$

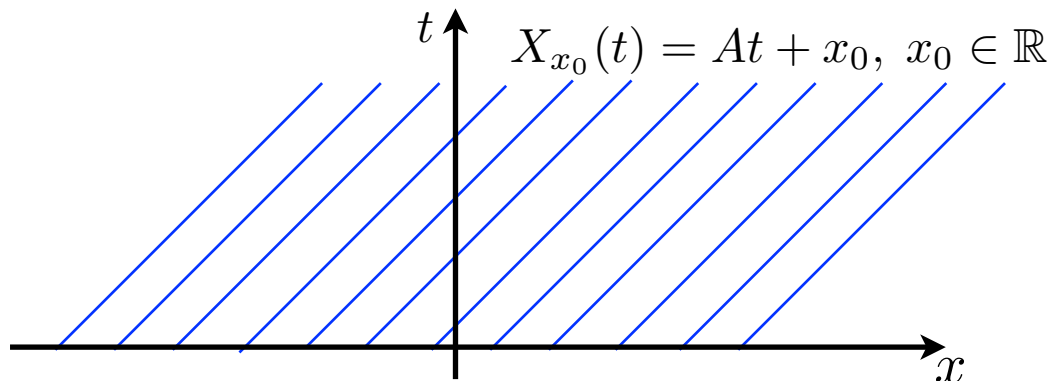
Solution I



$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = A$
est bien solution faible car elle est C^1 et solution classique.

Elle vérifie bien la condition initiale.

Elle n'a pas de discontinuités!



Non unicité des solutions faibles

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

voir Exo4 TD2

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ avec } u^0(x) = A \text{ et } f(u) = \frac{u^2}{2}, \quad a(u) = u.$$

Solution 2

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}^+,$

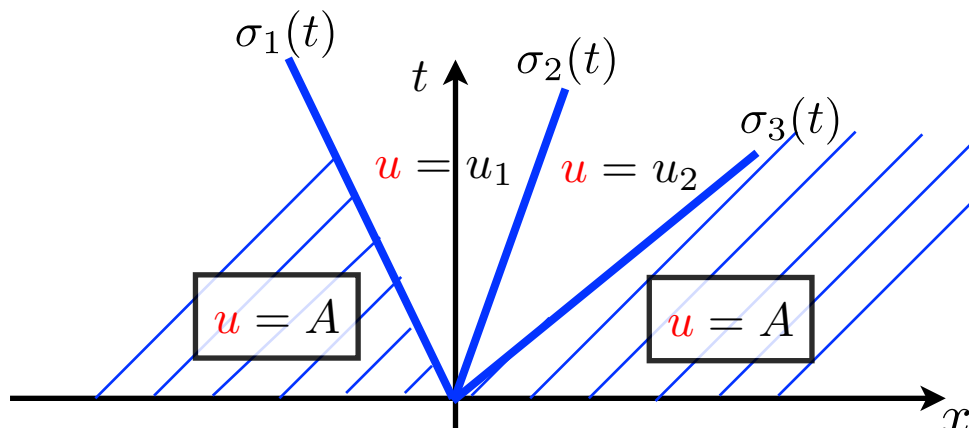
$$u(x, t) = \begin{cases} A & \text{si } x < \sigma_1(t) \\ u_1 & \text{si } \sigma_1(t) < x < \sigma_2(t) \\ u_2 & \text{si } \sigma_2(t) < x < \sigma_3(t) \\ A & \text{si } x > \sigma_3(t) \end{cases}$$

est bien solution faible car

✓ elle est solution classique là où elle est C^1 .

✓ elle vérifie la condition initiale.

✓ Les lignes de chocs vérifient la relation de Rankine Hugoniot



$$\sigma'(t) = \frac{f(u^+(t)) - f(u^-(t))}{u^+(t) - u^-(t)} \stackrel{\text{Eq. de Burgers}}{=} \frac{u^+(t) + u^-(t)}{2}$$

ce qui ici donne $\sigma_i(t) = \lambda_i t$ et

$$\lambda_1 = \frac{u_1 + A}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{u_1 + u_2}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{u_2 + A}{2}$$

La solution a un sens seulement si $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ qui est assuré dès que $\lambda_1 < A$ et $\lambda_3 > A$

Toutes les autres constantes peuvent ensuite être déterminées!

Non unicité des solutions faibles

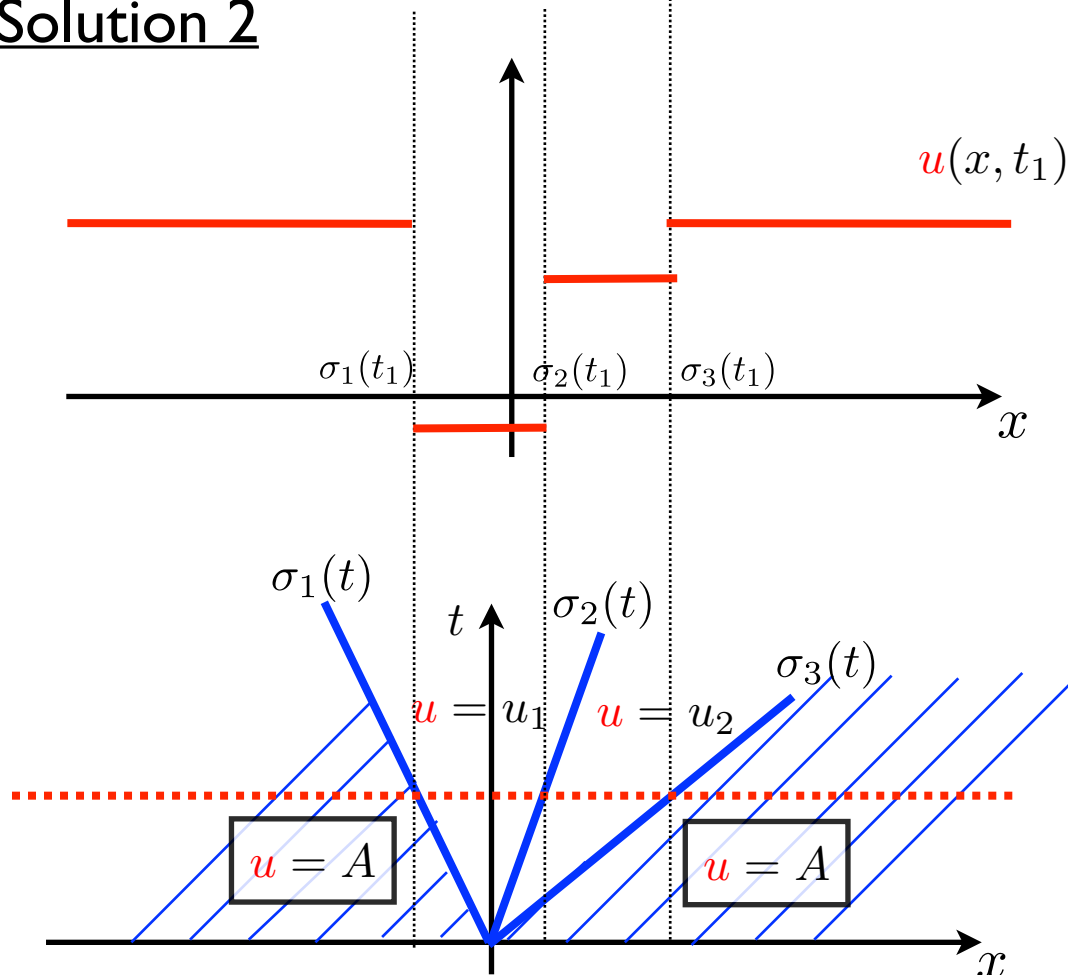
Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

voir Exo4 TD2

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ avec } u^0(x) = A \text{ et } f(u) = \frac{u^2}{2}, \quad a(u) = u.$$

Solution 2



On aurait pu aussi faire partir les lignes de chocs à un autre point que $x_0 = 0$, introduire plus que 3 lignes de chocs au même point, introduire des lignes de chocs à des temps supérieurs, faire tout à la fois!

Il n'y a donc pas **unicité de la solution faible** alors qu'il n'y a qu'**une seule** solution physique. Comment retrouver la solution physique?

Notion de solution faible entropique

Définition : Étant donné $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on appelle **solution** entropique de $(\mathcal{P})$ sur $[0, T[, T \leq +\infty$ une solution faible telle que pour toute entropie (U, F) i.e. U **convexe** et $F' = U' f'$

$$\frac{\partial}{\partial t} U(u) + \frac{\partial}{\partial x} F(u) \leq 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \quad (\text{E})$$

Pour modéliser notre problème non linéaire, on a négligé la dissipation/viscosité.

Or quand on remet un peu de dissipation

$$\left| \begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u_\varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial^2 u_\varepsilon}{\partial x^2} &= 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u_\varepsilon(x, 0) &= u^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \right.$$

Pour $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, on montre qu'il existe une unique solution $u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ et qu'elle est très régulière et elle vérifie (E).

On montre également que u_ε a une limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$. On appelle u sa limite.

Cette fonction u est solution faible du problème de départ et vérifie une condition dite d'entropie.

Remarque : Cette dernière condition est difficile à vérifier en pratique !

Notion de solution faible entropique

Théorème : Une solution faible u , $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est **entropique** si et seulement si, pour tout choc $\Sigma(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$ et pour toute entropie (U, F) on a

$$\sigma'(t) [U(u^+(t)) - U(u^-(t))] \geq F(u^+(t)) - F(u^-(t))$$

Cette condition (de choc **entropique**) se démontre comme la relation de Rankine-Hugoniot.

Corollaire : Une solution faible $\mathcal{C}^1$ par morceaux et $\mathcal{C}^0$ est **entropique**!

On peut donner une forme encore **plus pratique** à cette condition de choc entropique, qui s'interprète **géométriquement**.

Notion de solution faible entropique

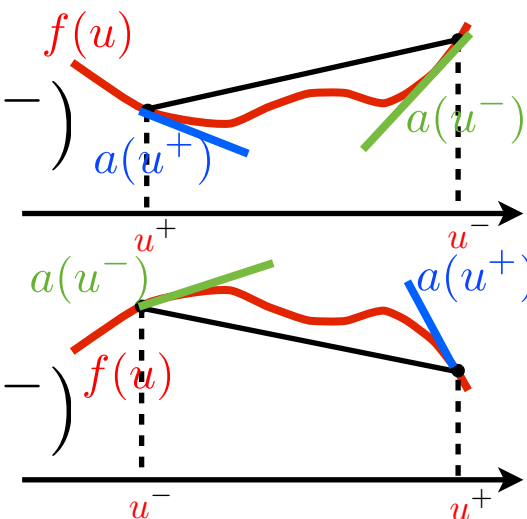
Théorème : Une solution faible u , $\mathcal{C}^1$ par morceaux, est **entropique** si et seulement si, pour tout choc $\Sigma(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$

Pour $u^+ < u^-$, le long du choc, on doit avoir

$$f(\alpha u^+ + (1 - \alpha) u^-) \leq \alpha f(u^+) + (1 - \alpha) f(u^-)$$

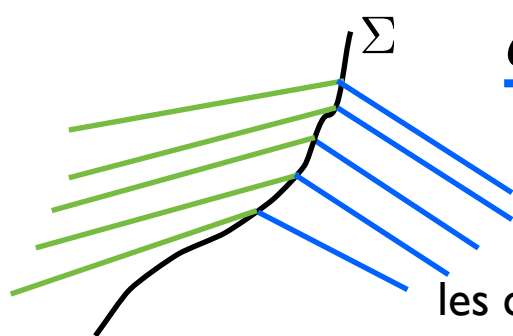
Pour $u^+ > u^-$, le long du choc, on doit avoir

$$f(\alpha u^+ + (1 - \alpha) u^-) \geq \alpha f(u^+) + (1 - \alpha) f(u^-)$$

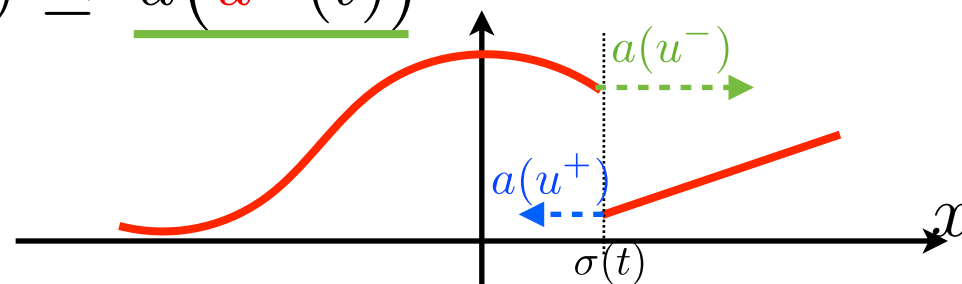


Propriété : le long d'un choc entropique $\Sigma(\sigma(t), u^-(t), u^+(t))$

$$\underline{a(u^+(t))} \leq \sigma'(t) \leq \underline{a(u^-(t))}$$



les caractéristiques se croisent



Corollaire : Si f est **convexe**, un choc est **entropique** ssi $u^+ < u^-$
 Si f est **concave**, un choc est **entropique** ssi $u^+ > u^-$

Théorème d'existence et unicité

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, le problème $(\mathcal{P})$ admet une **unique solution faible entropique globale**

$$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

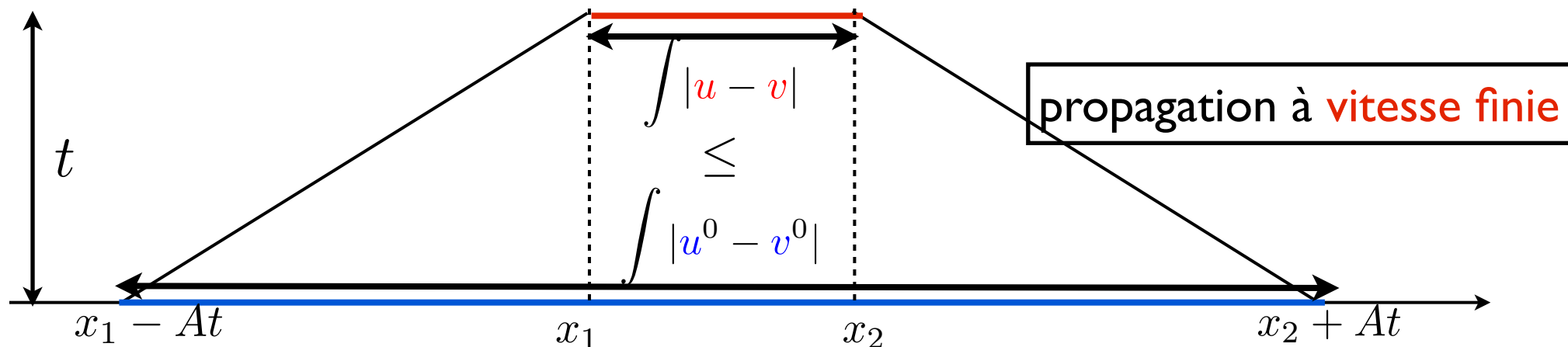
qui vérifie le résultat de stabilité

$$\text{p.p. } t \geq 0, \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Remarques : on a l'estimation de continuité L^1

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u^0(x) - v^0(x)| dx$$

avec $A = \max \{ |a(\xi)|, |\xi| \leq \max (\|u^0\|_{L^\infty}, \|v^0\|_{L^\infty}) \}$.



Théorème d'existence et unicité

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, le problème admet une **unique solution faible entropique globale**

$$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

qui vérifie le résultat de stabilité

$$\text{p.p. } t \geq 0, \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u^0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

Idées de la preuve (qui dépasse le cadre du cours):  **Godlewski&Raviart, 1991**
Hyperbolic systems of conservation laws

Le résultat d'**existence** se fait par passage à la limite sur les solutions visqueuses

Le résultat d'**unicité** est une conséquence de l'estimation de continuité L^1 .

$$\int_{x_1}^{x_2} |u(x, t) - v(x, t)| dx \leq \int_{x_1 - At}^{x_2 + At} |u^0(x) - v^0(x)| dx$$

L'estimation de **continuité** se démontre à l'aide des entropies de Kruzkov.

$$U_\lambda(u) = |u - \lambda|$$

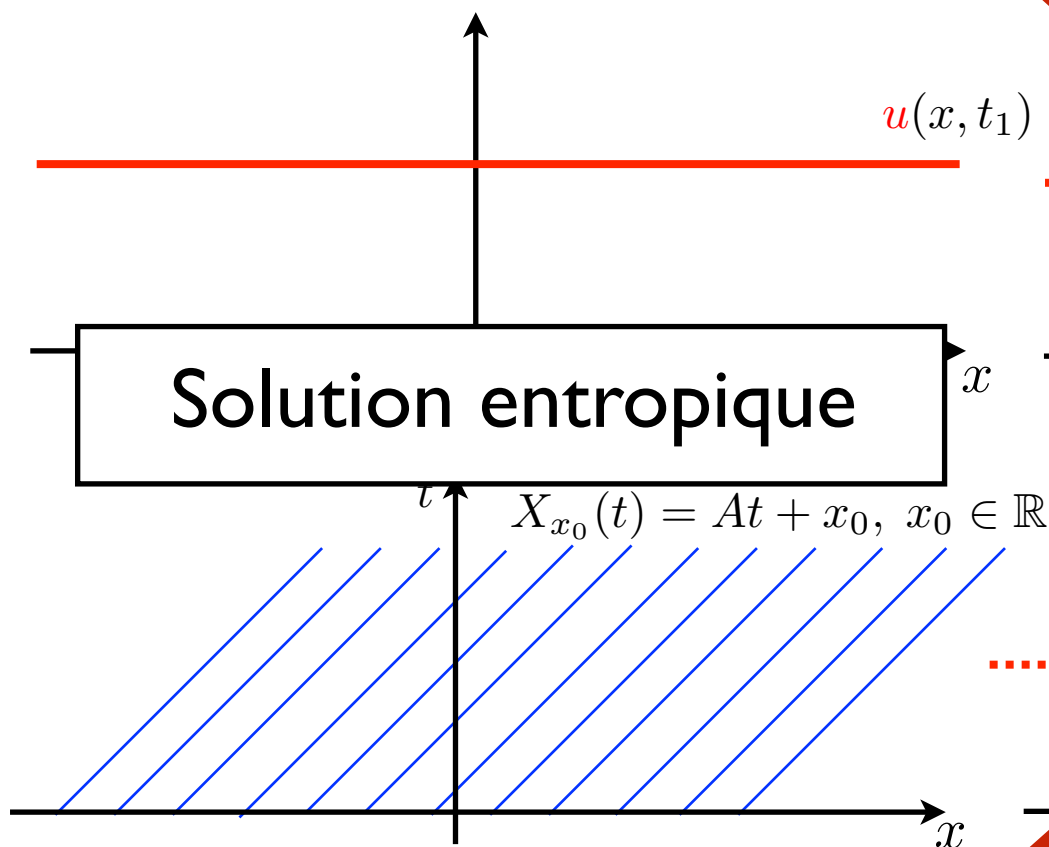
Exemple de solution faible entropique

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

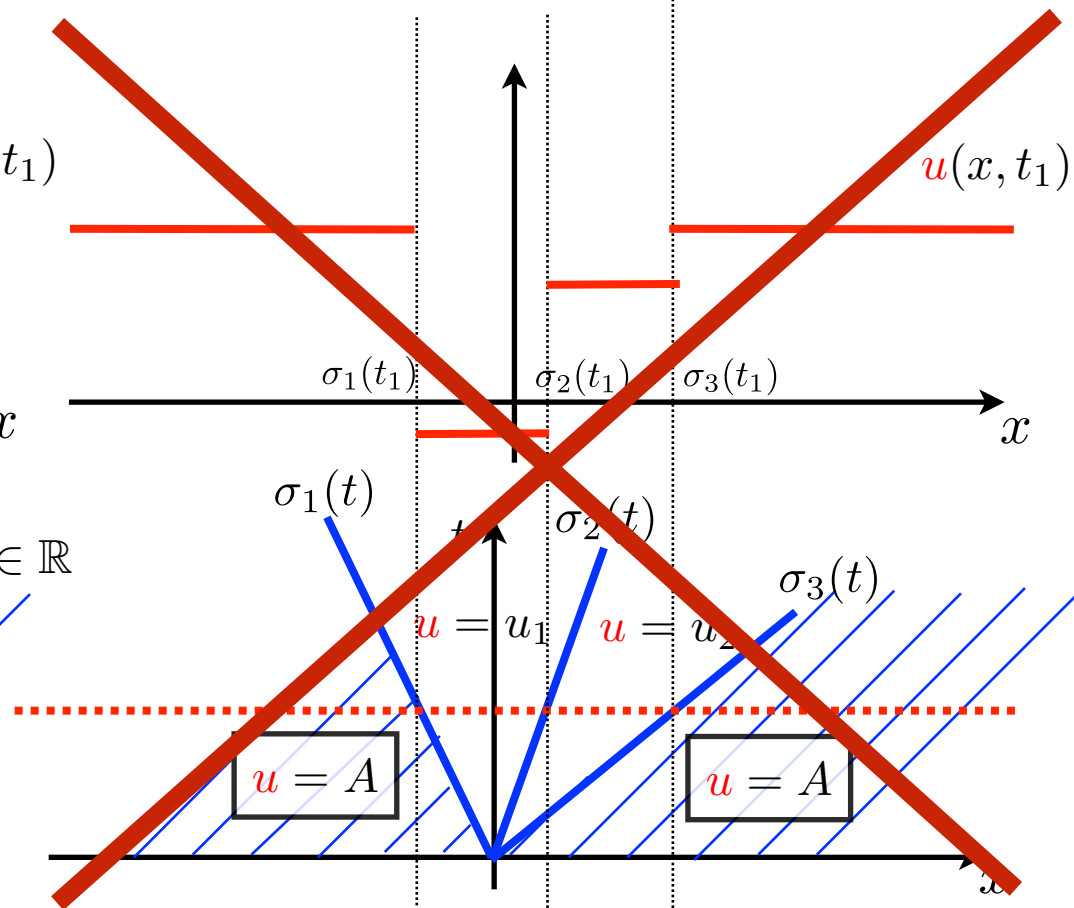
$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ avec } u^0(x) = A \text{ et } f(u) = \frac{u^2}{2}, \quad a(u) = u.$$

Solution faible 1



Solution faible 2



Propriétés de monotonie

Théorème : On a le résultat de comparaison

$$u^0(x) \leq v^0(x) \quad p.p. \ x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad u(x, t) \leq v(x, t) \quad p.p. \ x \in \mathbb{R}$$

Evident dans le cas où les solutions sont classiques

Corollaire : $a \leq u^0(x) \leq b \quad \Rightarrow \quad a \leq u(\cdot, t) \leq b$

Preuve :

$$\begin{aligned} u^0(x) = a &\quad \Rightarrow \quad v(x, t) = a \\ v^0(x) = b &\quad \Rightarrow \quad v(x, t) = b \end{aligned}$$

Par le principe de comparaison $a \leq u(x, t) \leq b$

Corollaire : $x \rightarrow u^0(x)$ croissante $\Rightarrow \quad x \rightarrow u(x, t)$ croissante

Preuve : Posons $u_h^0(x) := u^0(x + h)$

Par invariance par translation en espace de l'EDP $u_h(x, t) = u(x + h, t)$

Par définition u^0 croissante $\iff u_h^0(x) \geq u^0(x), \quad \forall h > 0.$

Par le principe de comparaison $u_h(x, t) \geq u(x, t), \quad \forall h > 0$

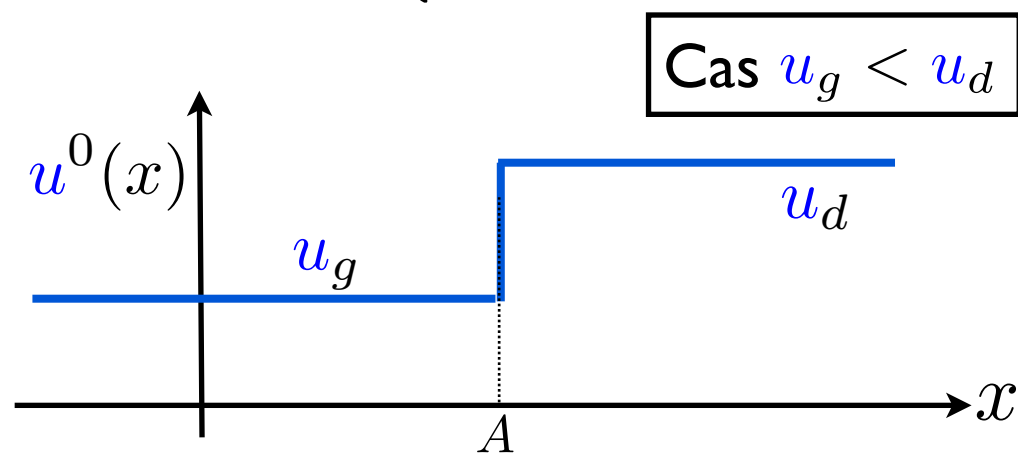
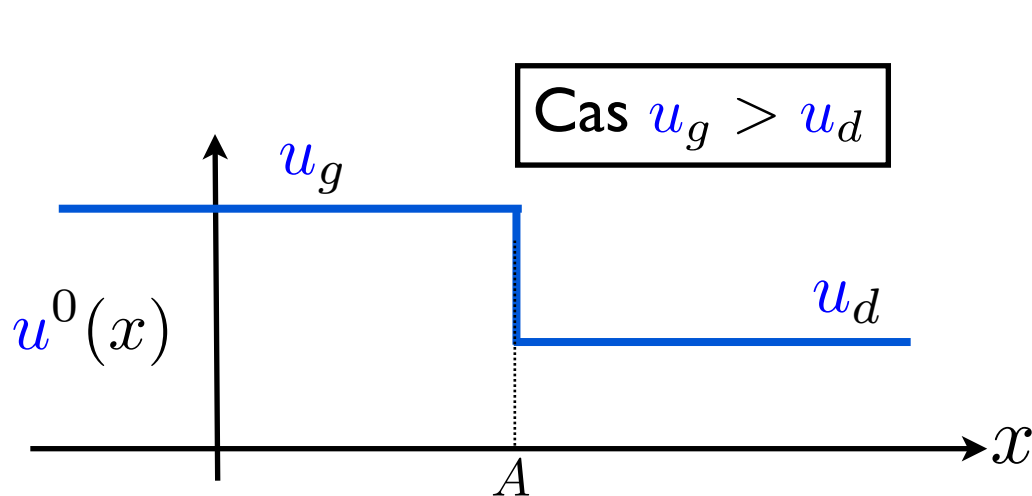
ce qui signifie que $x \rightarrow u(x, t)$ est croissante.

Le problème de Riemann

Pour illustrer les résultats précédents, considérons le problème

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \text{ avec } u^0(x) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < A \\ u_d & \text{si } x > A \end{cases}$$



On suppose ici que f est **convexe** sur (u_g, u_d) . L'extension au cas où elle est **concave** est simple. L'extension au cas général est plus délicate et dépasse le cadre du cours.

Le problème de Riemann

Propriété : La solution faible entropique de $(\mathcal{P})$ est auto-similaire, c'est à dire de la forme

$$u(x, t) = \mathcal{U}\left(\frac{x - A}{t}\right), \quad t > 0$$

Preuve : (1) on commence par montrer le résultat pour $A = 0$

Il suffit de montrer que $\forall \lambda > 0, \quad u(\lambda x, \lambda t) = u(x, t)$

Soit donc $u_\lambda(x, t) := u(\lambda x, \lambda t)$

u solution faible de l'équation $\Rightarrow u_\lambda$ solution faible de l'équation

où on a utilisé le fait que $u^0(x) = u^0(\lambda x)$

u entropique $\Rightarrow u_\lambda$ entropique

Par unicité de la solution faible entropique, on a que $u_\lambda = u, \forall \lambda > 0$, soit

$$u(x, t) = \mathcal{U}(x/t)$$

(2) Pour $A \neq 0$, il suffit d'appliquer ce qui précède à $v(x, t) = u(x + A, t)$.

Le problème de Riemann

Propriété : La solution faible entropique de $(\mathcal{P})$ est auto-similaire, c'est à dire de la forme

$$u(x, t) = \mathcal{U}\left(\frac{x - A}{t}\right), \quad t > 0$$

Si u est une solution classique de $(\mathcal{P})$ que doit vérifier $\mathcal{U}$?

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\left(\frac{x - A}{t^2}\right) \mathcal{U}'\left(\frac{x - A}{t}\right) \quad \text{et} \quad a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{t} a\left(\mathcal{U}\left(\frac{x - A}{t}\right)\right) \mathcal{U}'\left(\frac{x - A}{t}\right)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{t} \mathcal{U}'\left(\frac{x - A}{t}\right) \left[-\frac{x - A}{t} + a\left(\mathcal{U}\left(\frac{x - A}{t}\right)\right) \right] = 0$$

Propriété : Une fonction de la forme

$$u(x, t) = \mathcal{U}\left(\frac{x - A}{t}\right), \quad t > 0$$

est solution classique de $(\mathcal{P})$ dans le domaine $\alpha < \frac{x - A}{t} < \beta$ ssi

$$\mathcal{U} = cte \quad \text{ou} \quad \mathcal{U}(\xi) = a^{-1}(\xi), \quad \xi \in (\alpha, \beta)$$

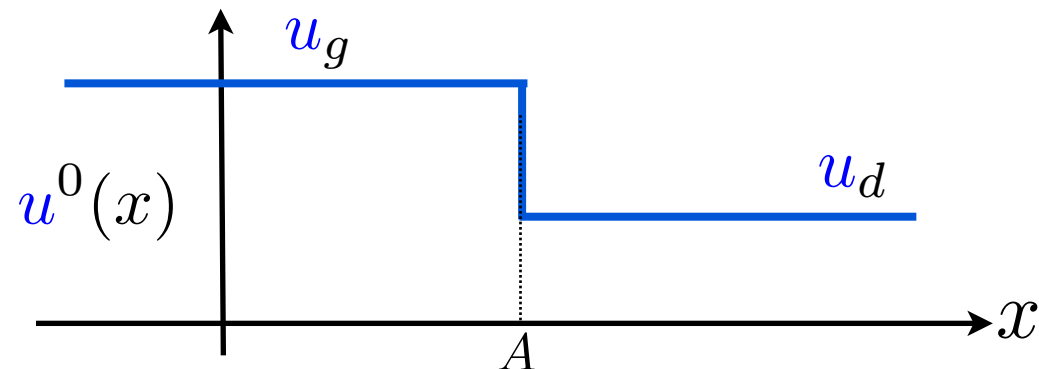
Remarque : comme f est convexe, a est croissante et donc inversible

Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

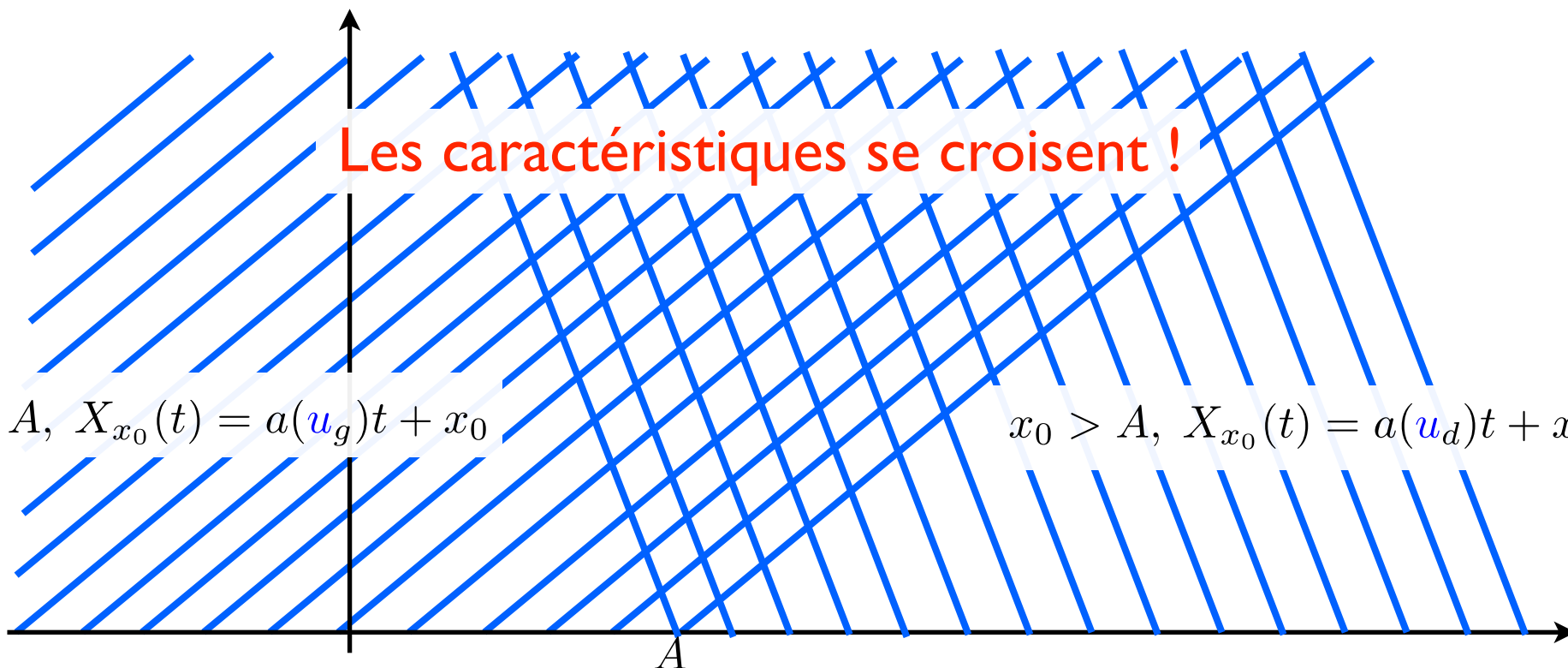


Etape I: Tracer les droites caractéristiques: $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0$

Les caractéristiques se croisent !

$$x_0 < A, \quad X_{x_0}(t) = a(u_g)t + x_0$$

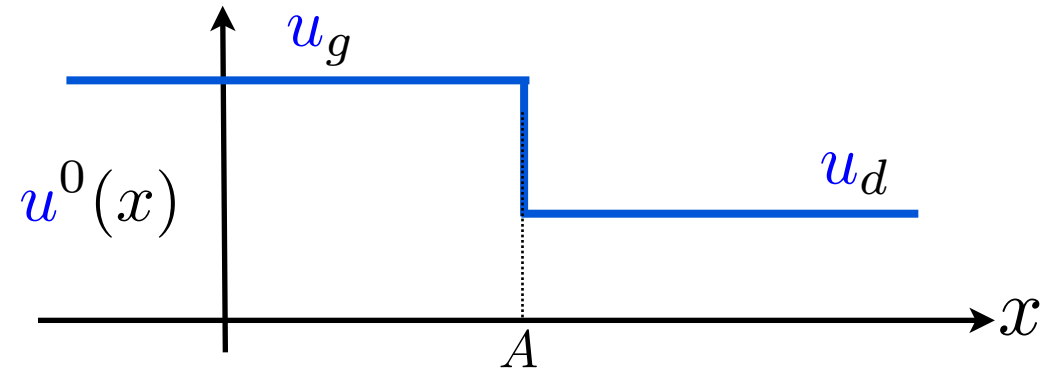
$$x_0 > A, \quad X_{x_0}(t) = a(u_d)t + x_0$$



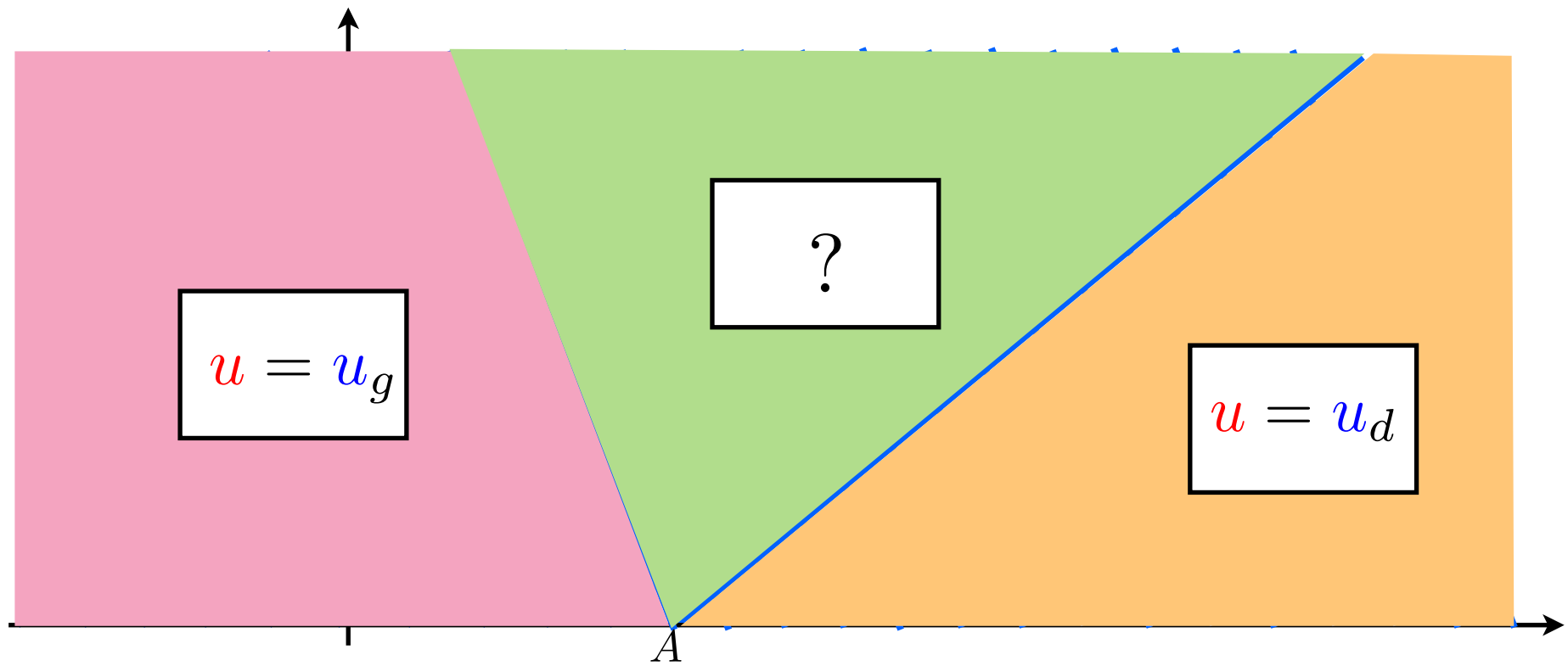
Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



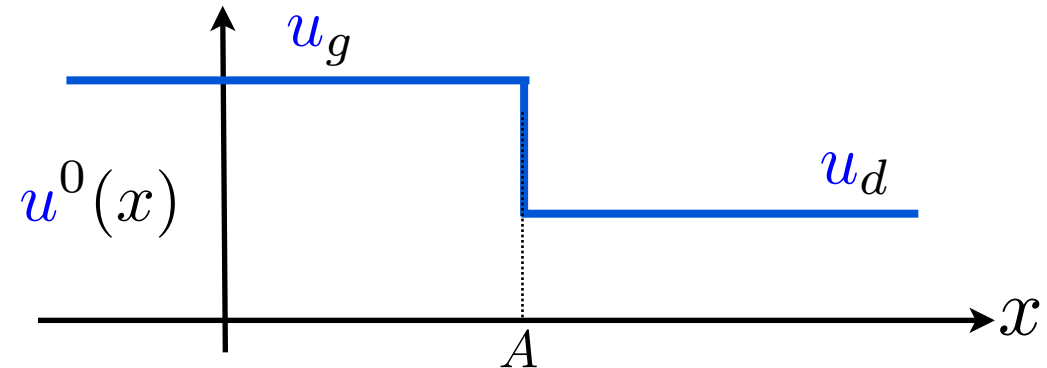
Etape 2: Construire une solution classique dans les régions où cela est possible.



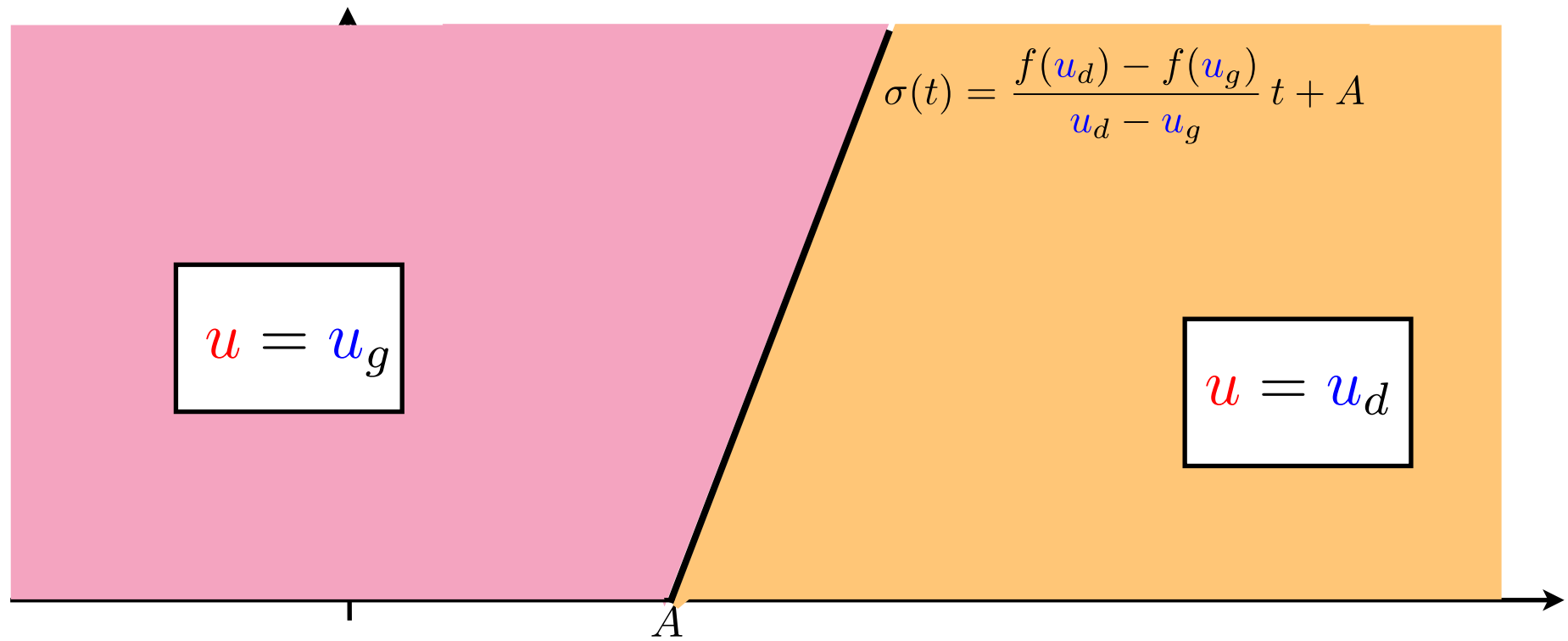
Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Etape 3: Comme $u_g > u_d$ (ou encore $a(u_g) > a(u_d)$) les caractéristiques se croisent) on peut introduire un choc qui vérifie la relation de Rankine Hugoniot.

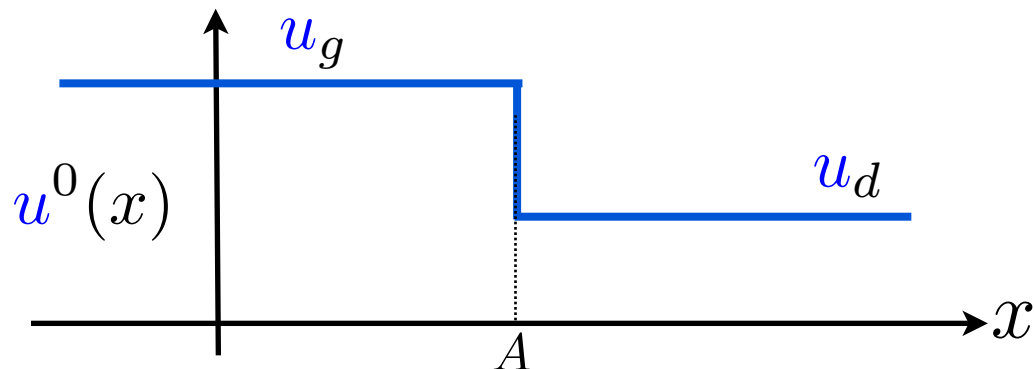


Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



La fonction ainsi construite, définie par

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t + A \\ u_d & \text{si } x > \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t + A \end{cases}$$

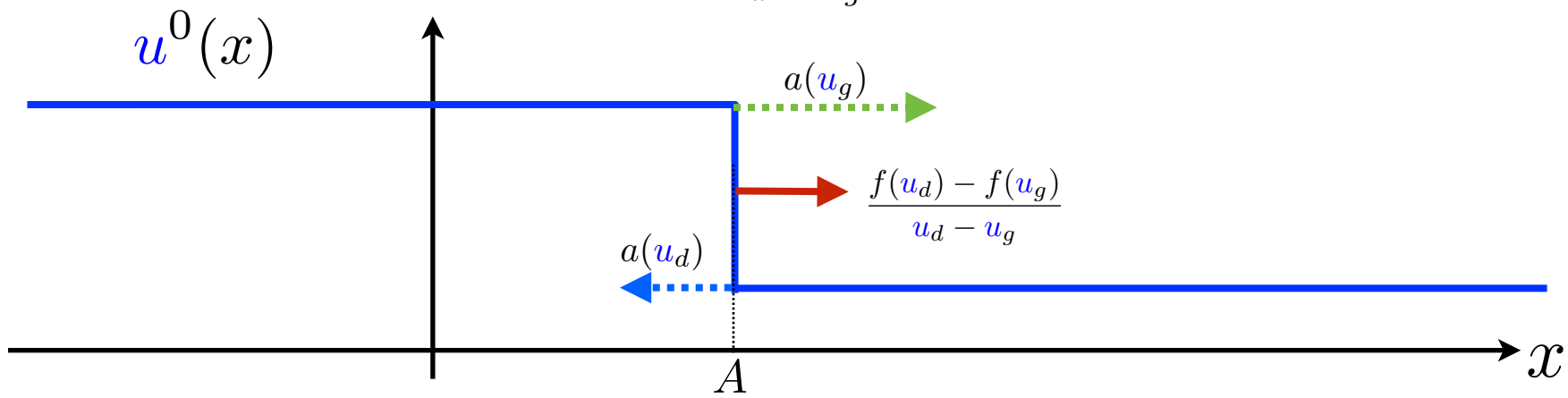
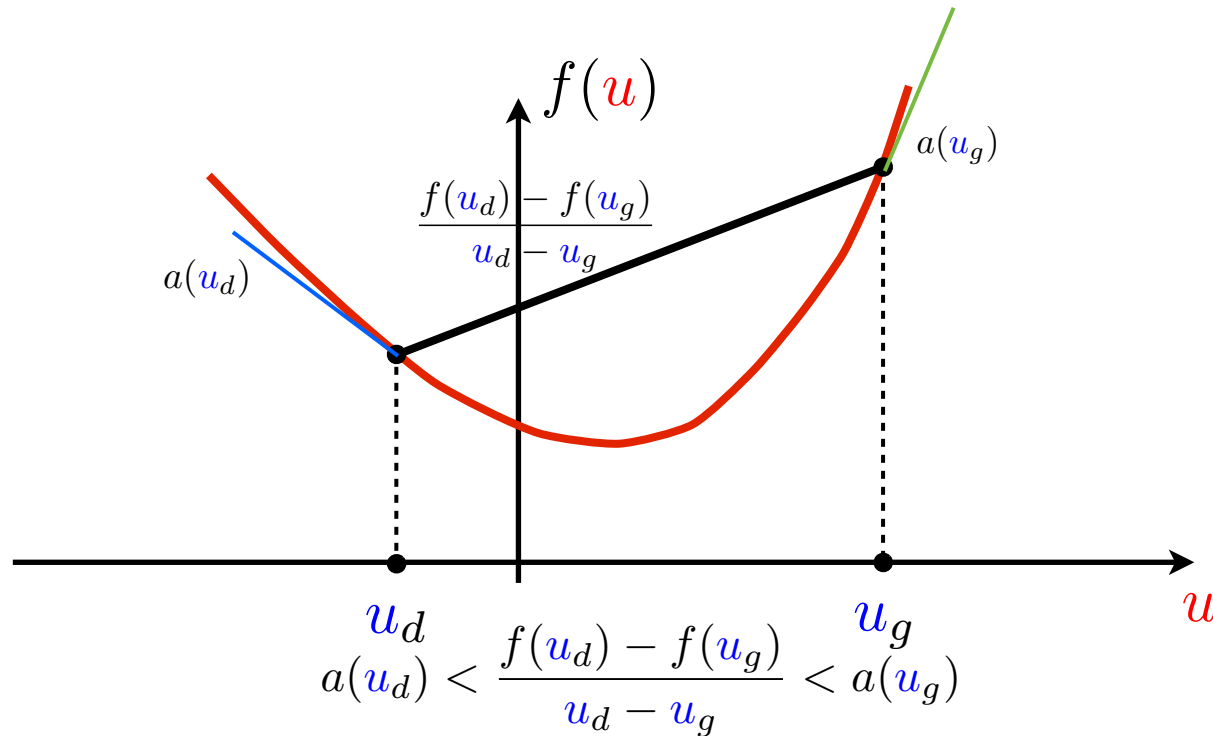
est une solution **faible** du problème car

- elle satisfait l'équation de manière classique là où elle est C^1
- l'équation du choc vérifie la relation de **Rankine-Hugoniot**

C'est l'unique solution **entropique** car le long du choc, la condition d'entropie est satisfaite : $u_g > u_d$

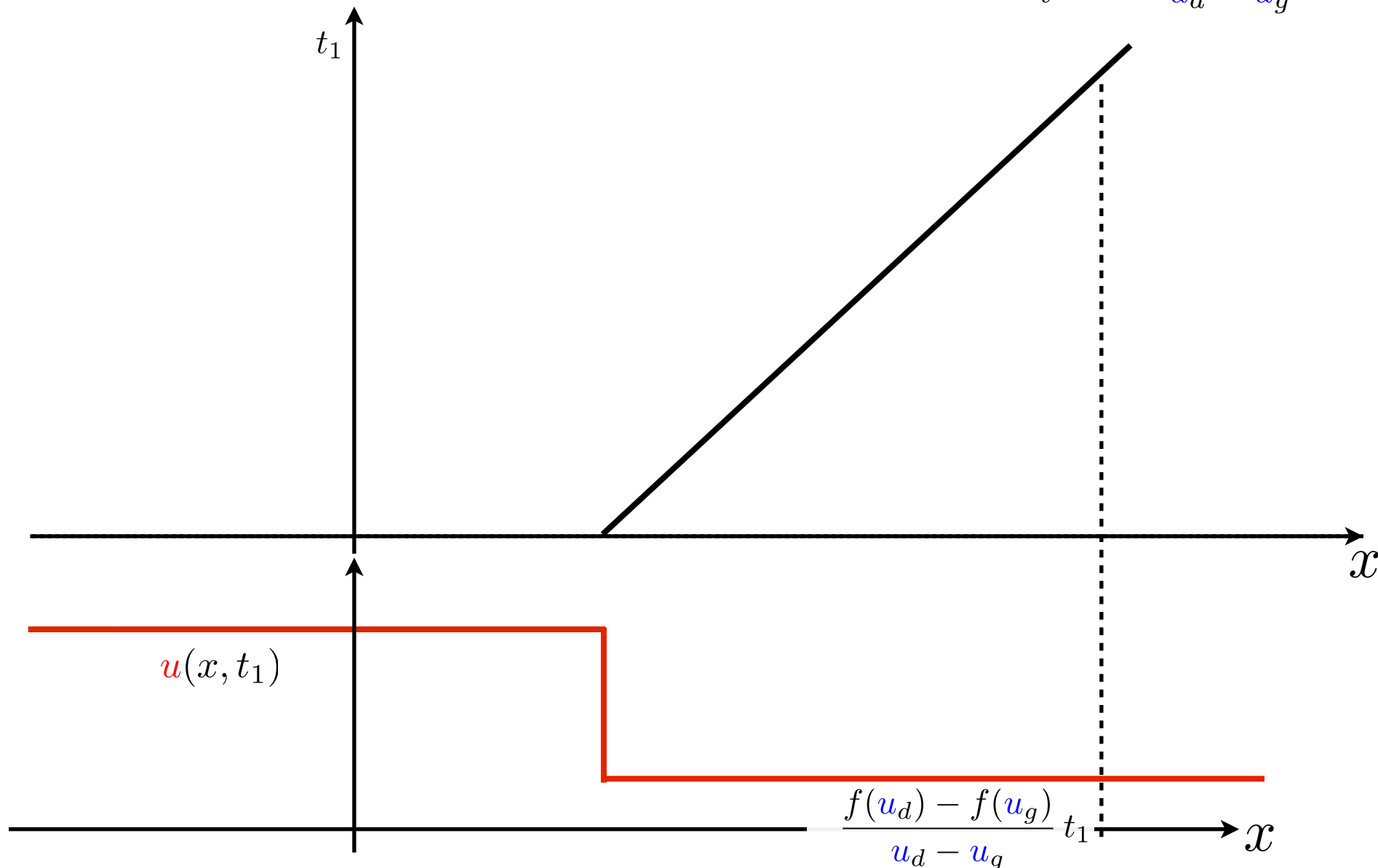
Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t \\ u_d & \text{si } x > \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t \end{cases}$$



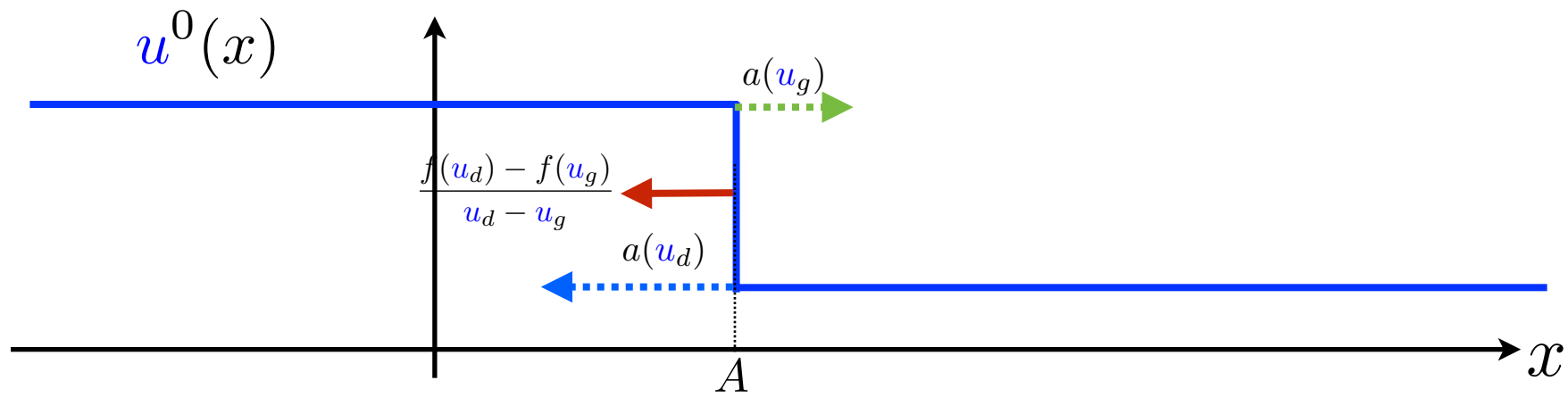
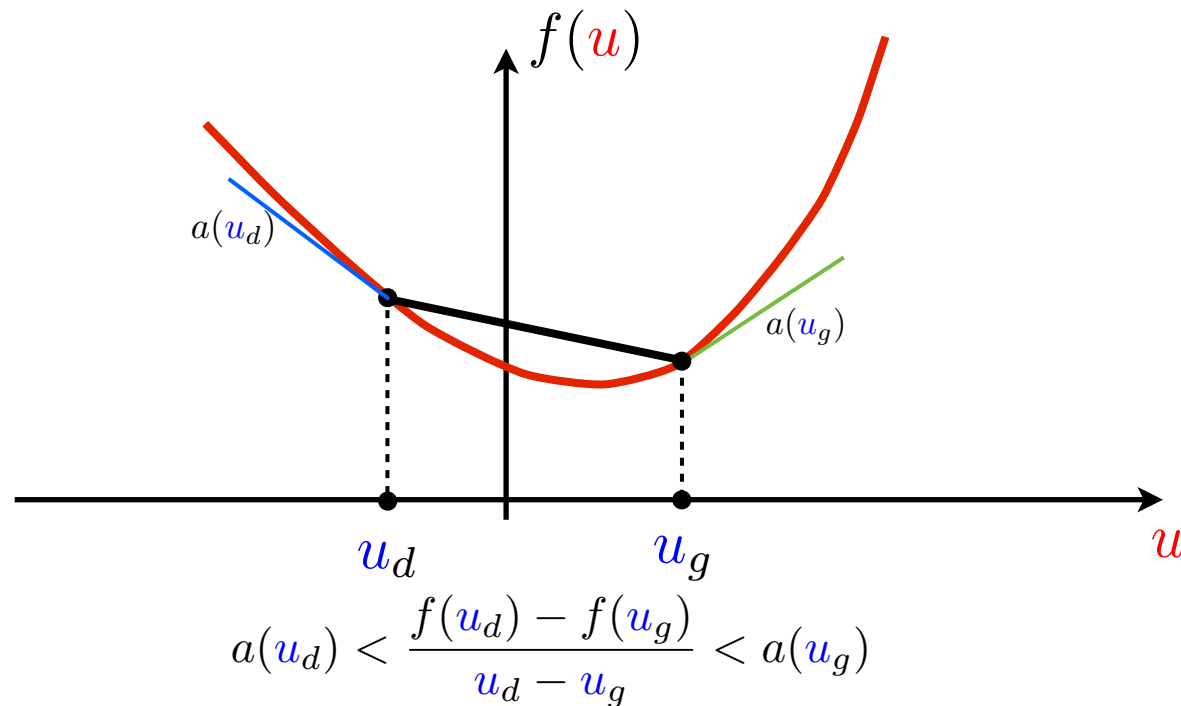
Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t \\ u_d & \text{si } x > \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t \end{cases} \quad \frac{x}{t} = \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g}$$



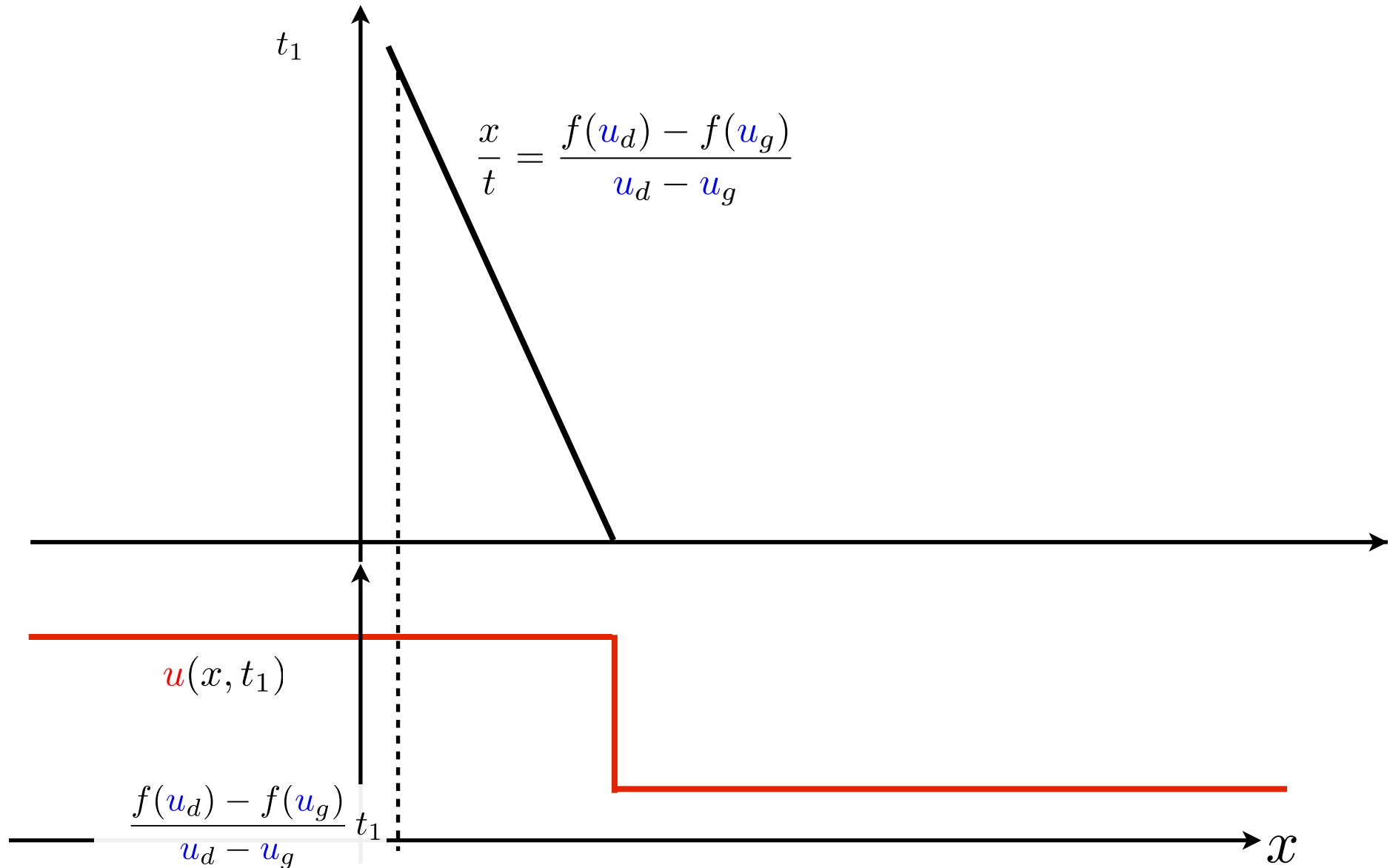
Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t \\ u_d & \text{si } x > \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t \end{cases}$$



Le problème de Riemann avec $u_g > u_d$

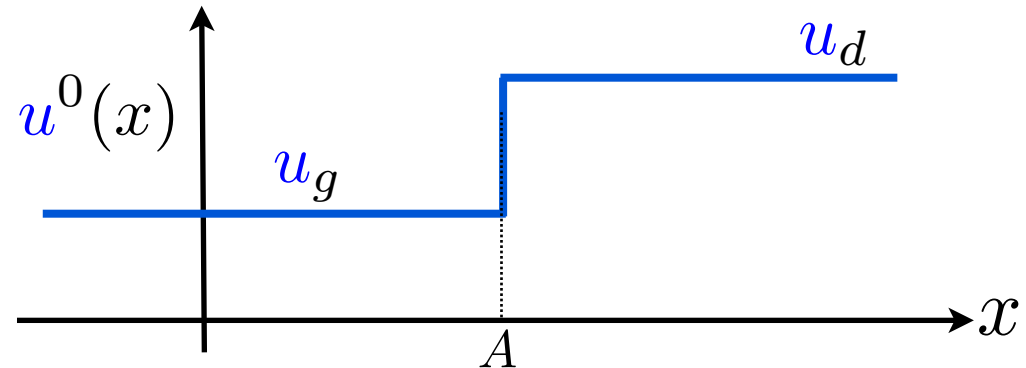
$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t \\ u_d & \text{si } x > \frac{f(u_d) - f(u_g)}{u_d - u_g} t \end{cases}$$



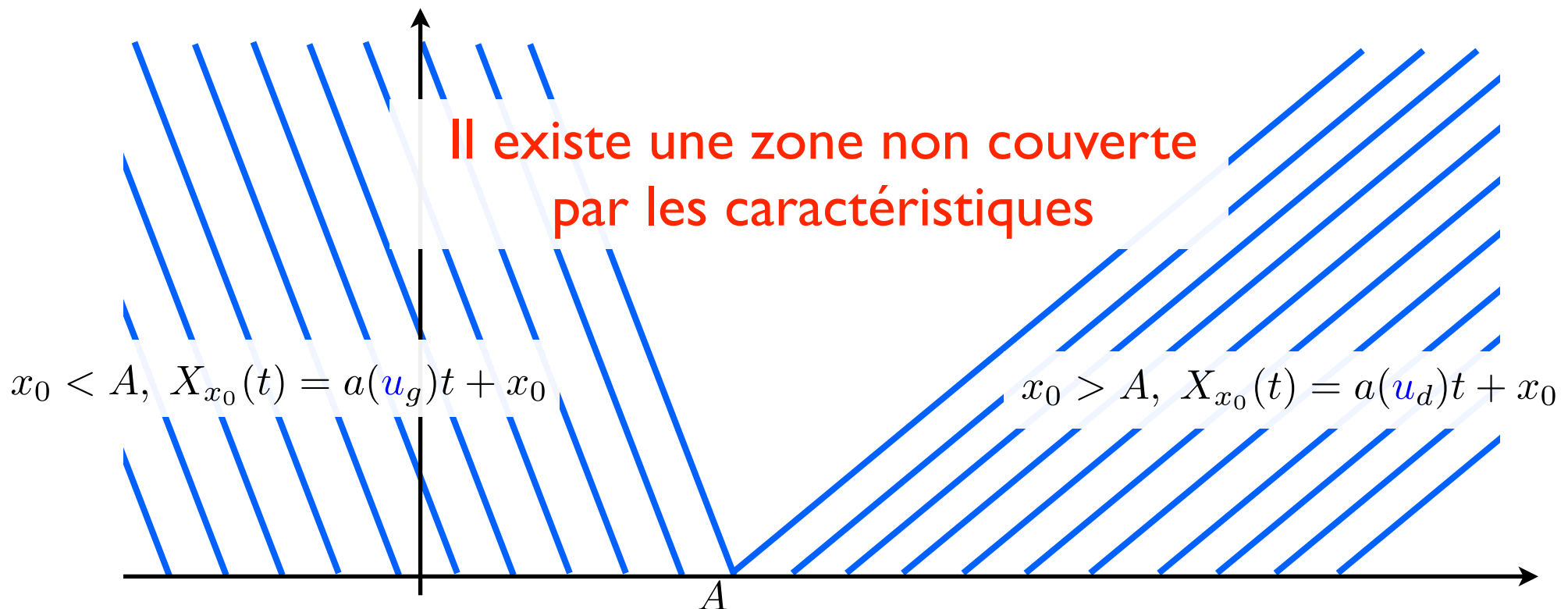
Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



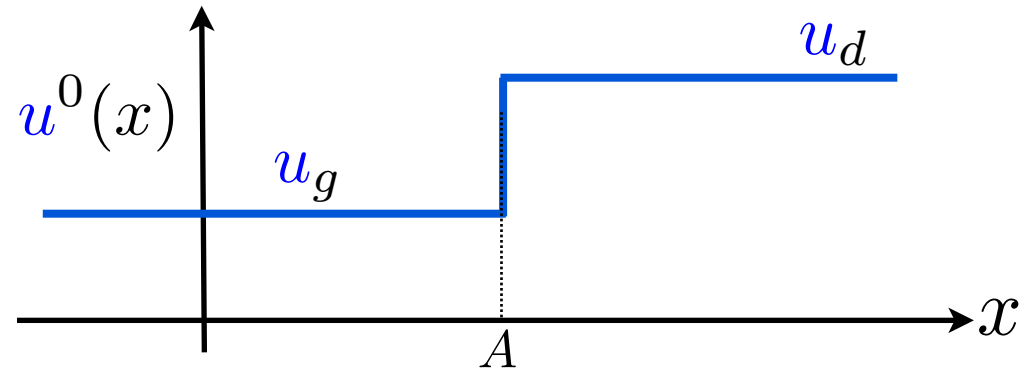
Etape I: Tracer les droites caractéristiques: $\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad X_{x_0}(t) = a(u^0(x_0))t + x_0$



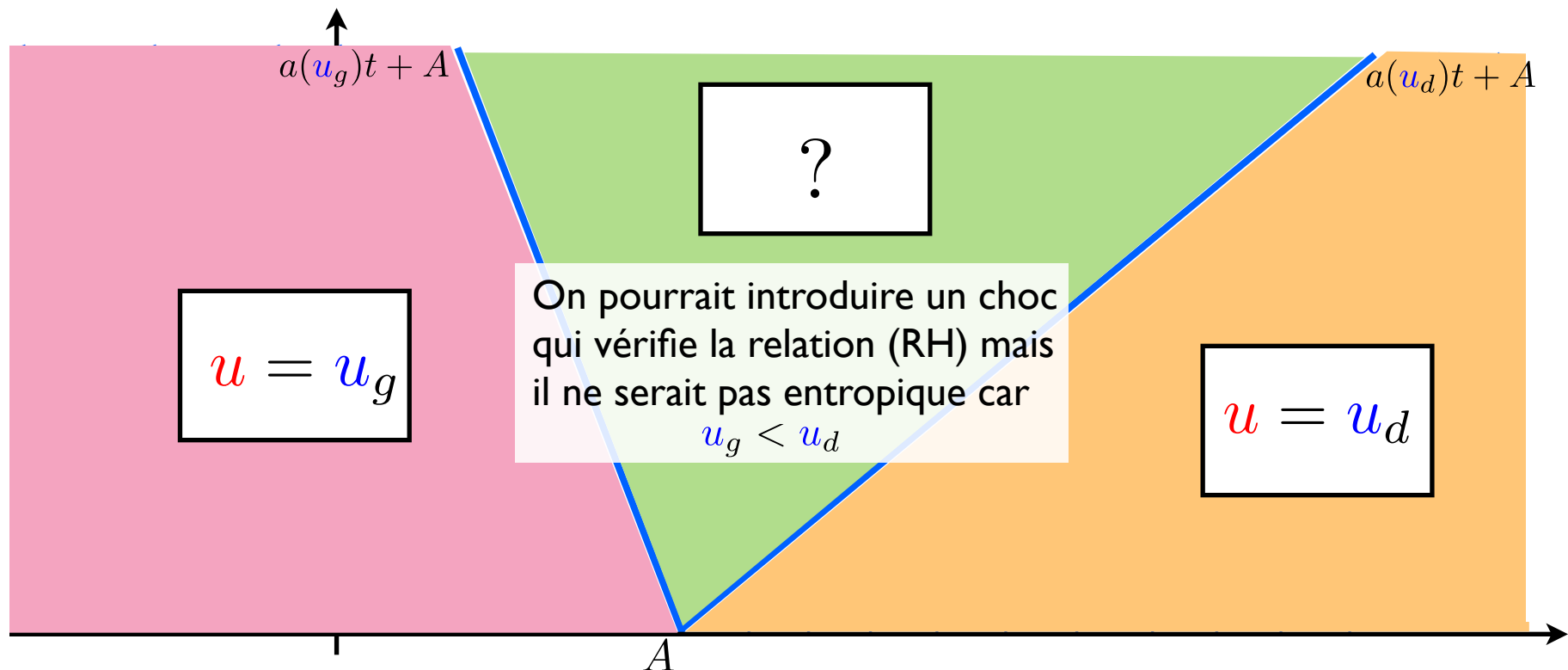
Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



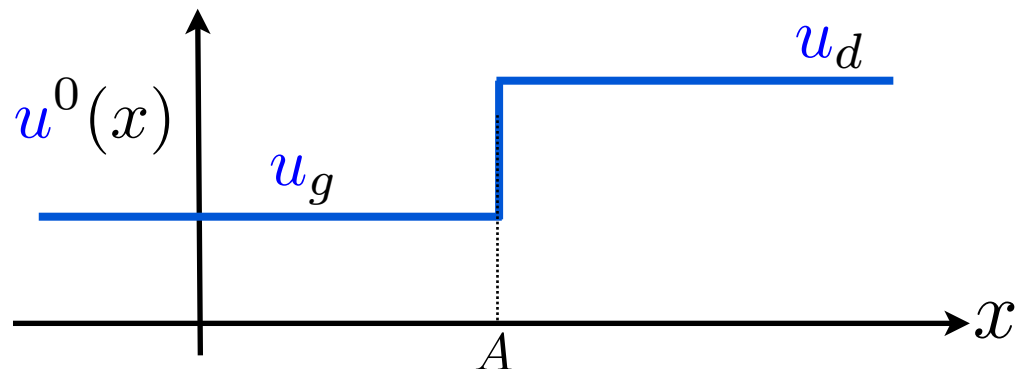
Etape 2: Construire une solution classique dans les régions où cela est possible.



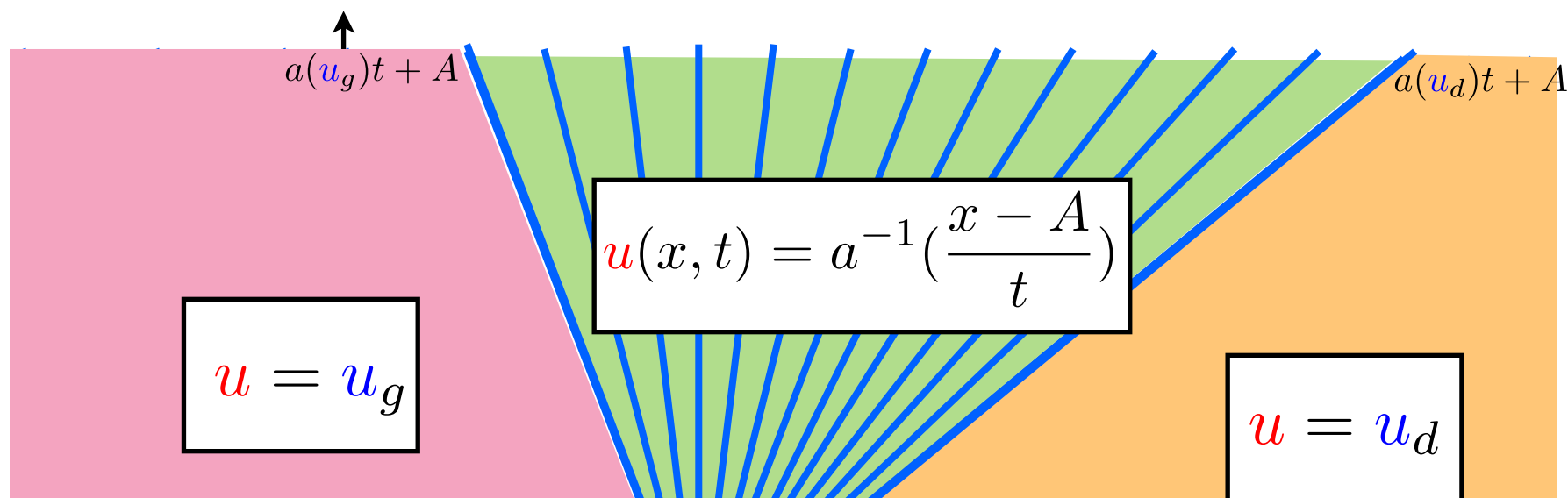
Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$



Etape 3: Une solution classique dans cette zone est donnée par $u(\frac{x-A}{t})$, $u = a^{-1}$



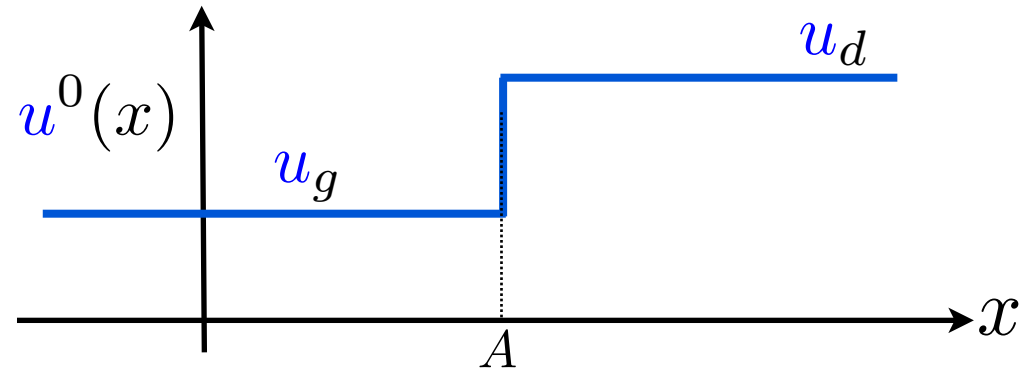
C'est comme si on introduisait des caractéristiques fictives $Y_\alpha(t) = \alpha t + A$, $\alpha \in (a(u_g), a(u_d))$ le long desquelles la solution est constante $u(Y_\alpha(t), t) = a^{-1}(\alpha)$, $\alpha \in (a(u_g), a(u_d))$

Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

Trouver $u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ solution faible entropique de

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0,$$

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$



La fonction ainsi construite, définie par

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

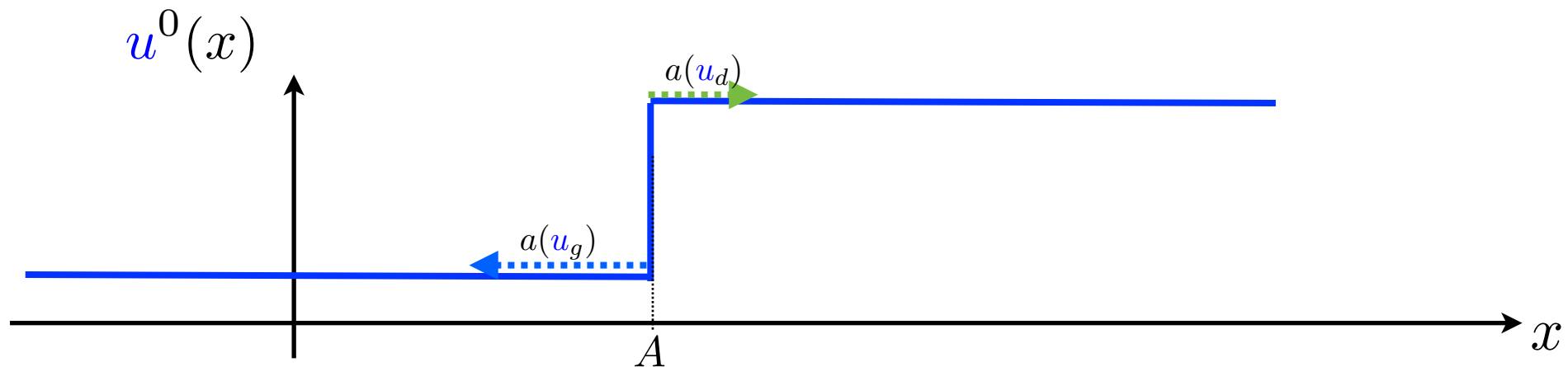
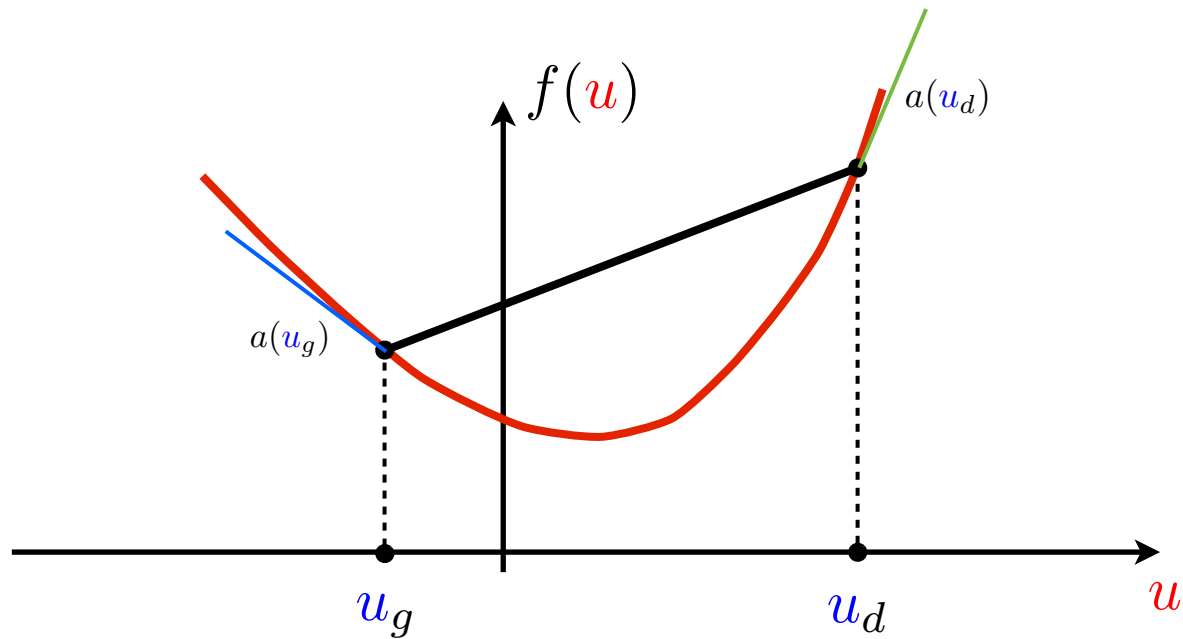
est une solution **faible** du problème car

- elle satisfait l'équation là où elle est C^1
- elle est **continue**

C'est l'unique solution **entropique** car elle est **continue**.

Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g) t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g) t + A < x < a(u_d) t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d) t + A \end{cases}$$

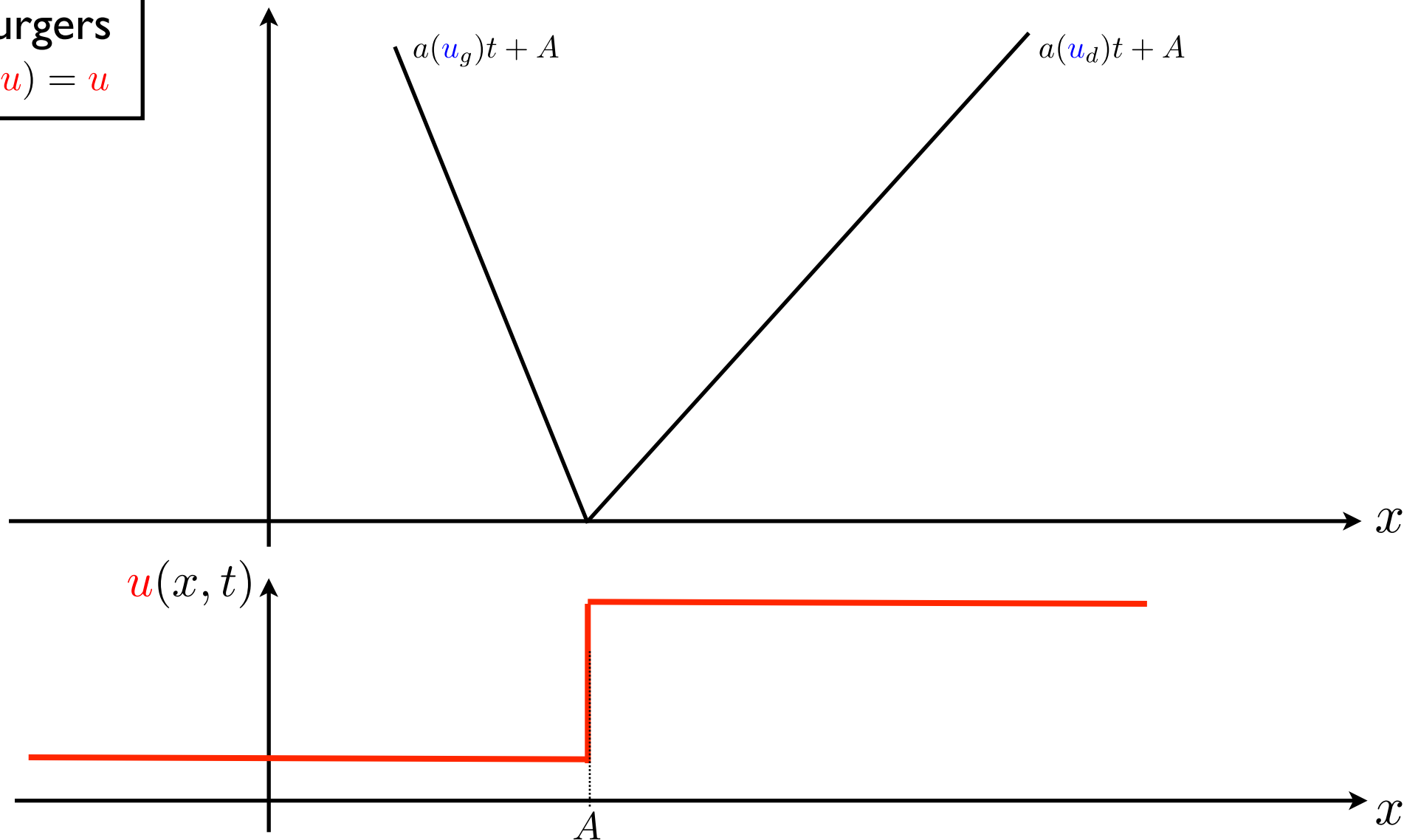


Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

Burgers

$$a(u) = u$$

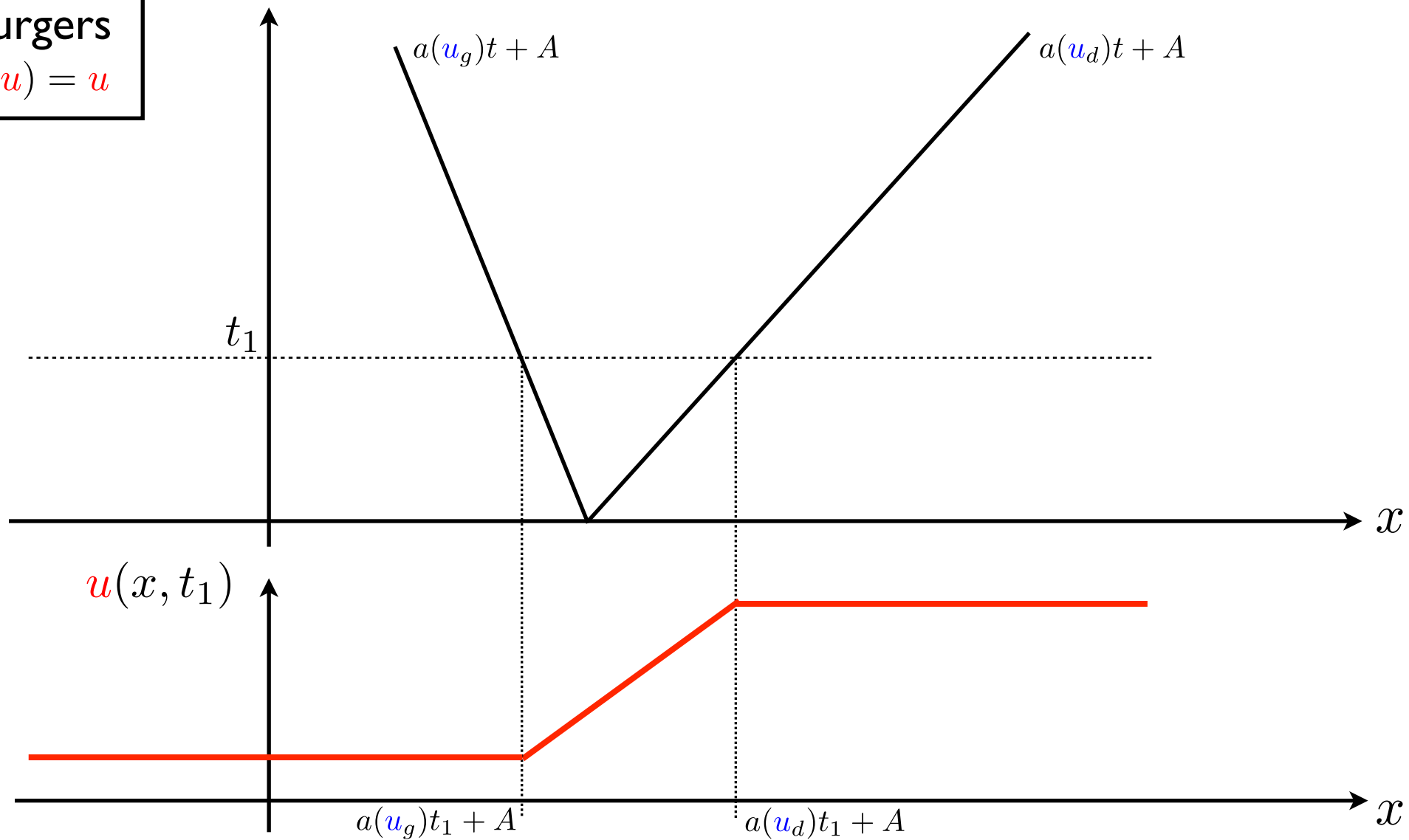


Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

Burgers

$$a(u) = u$$

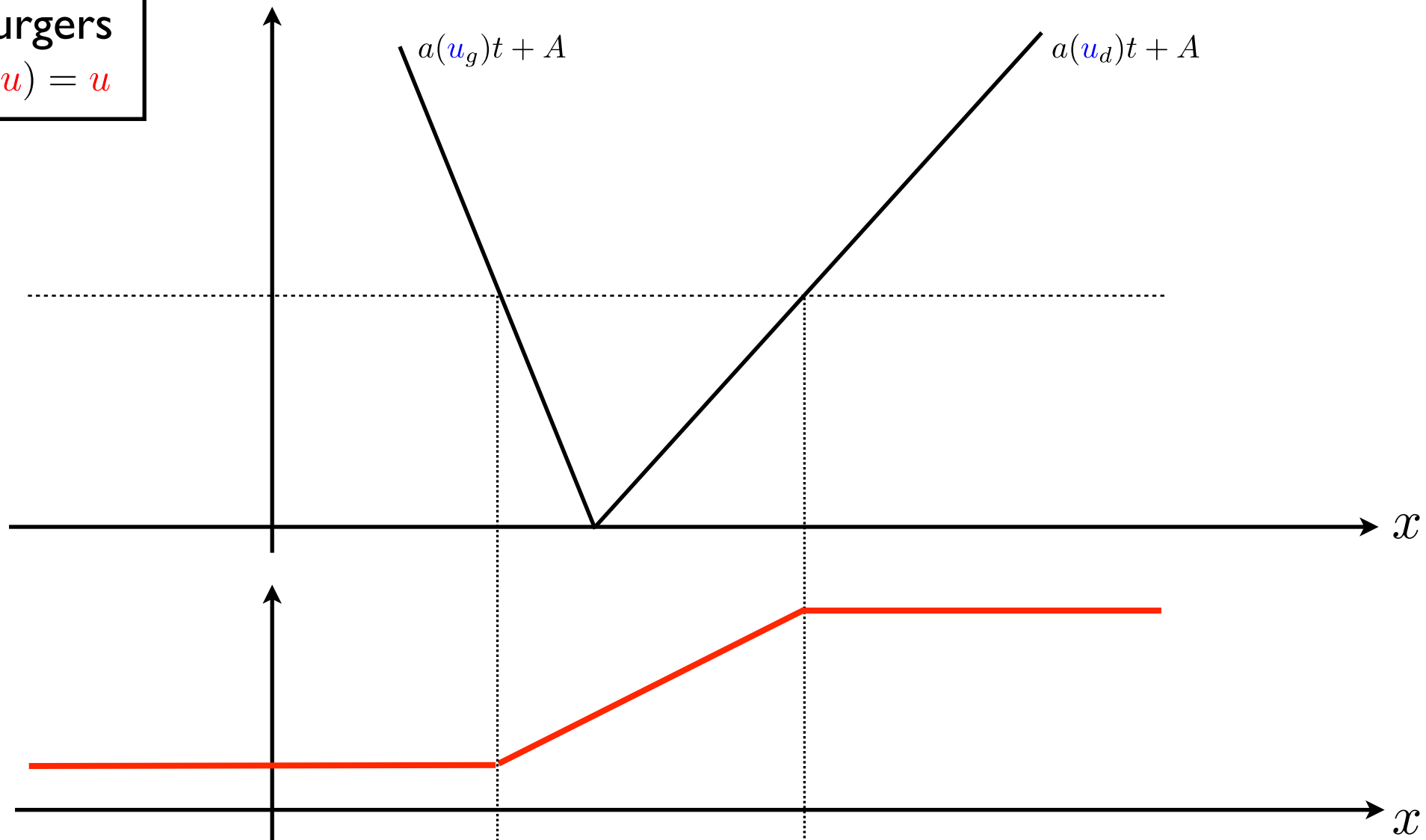


Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

Burgers

$$a(u) = u$$

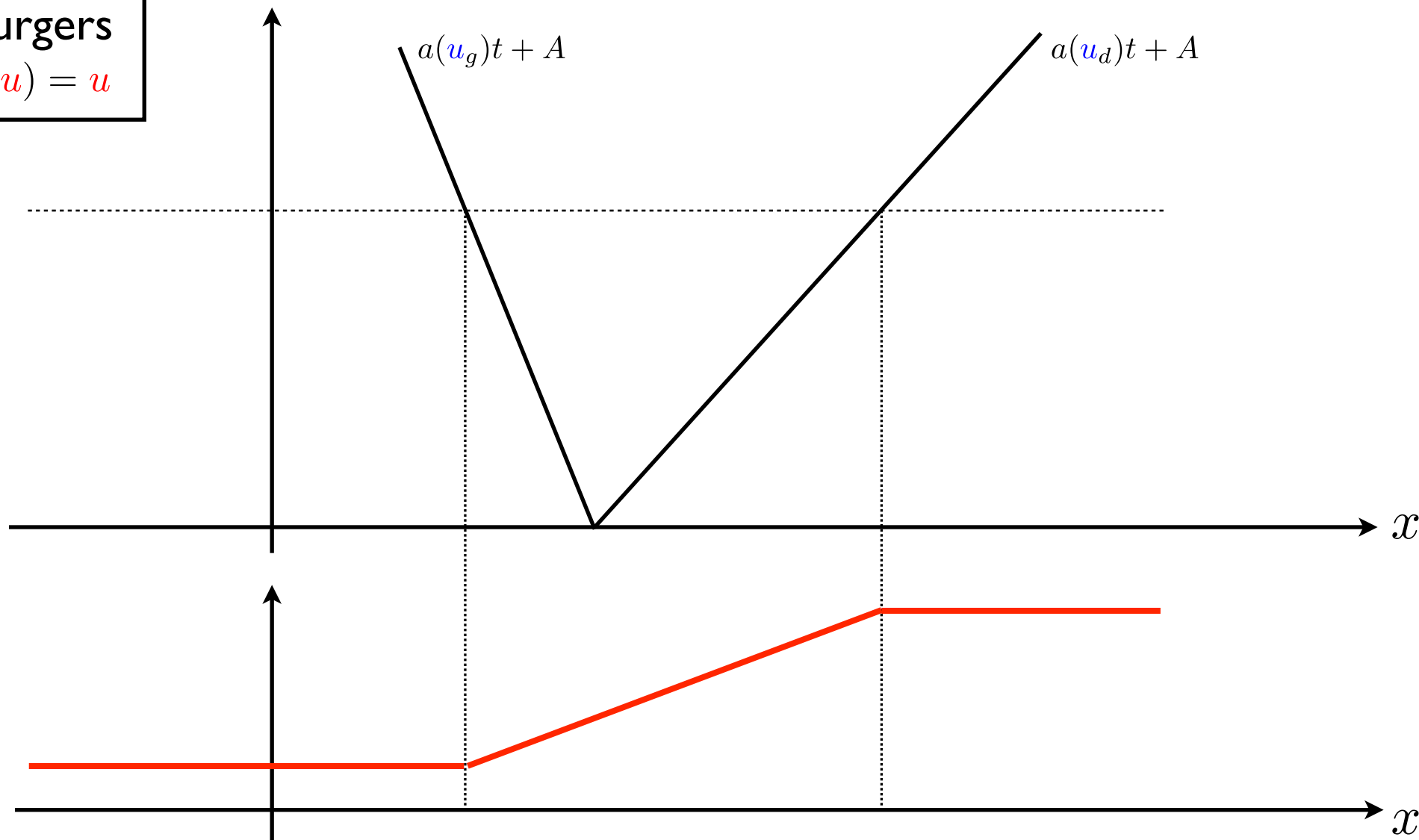


Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

Burgers

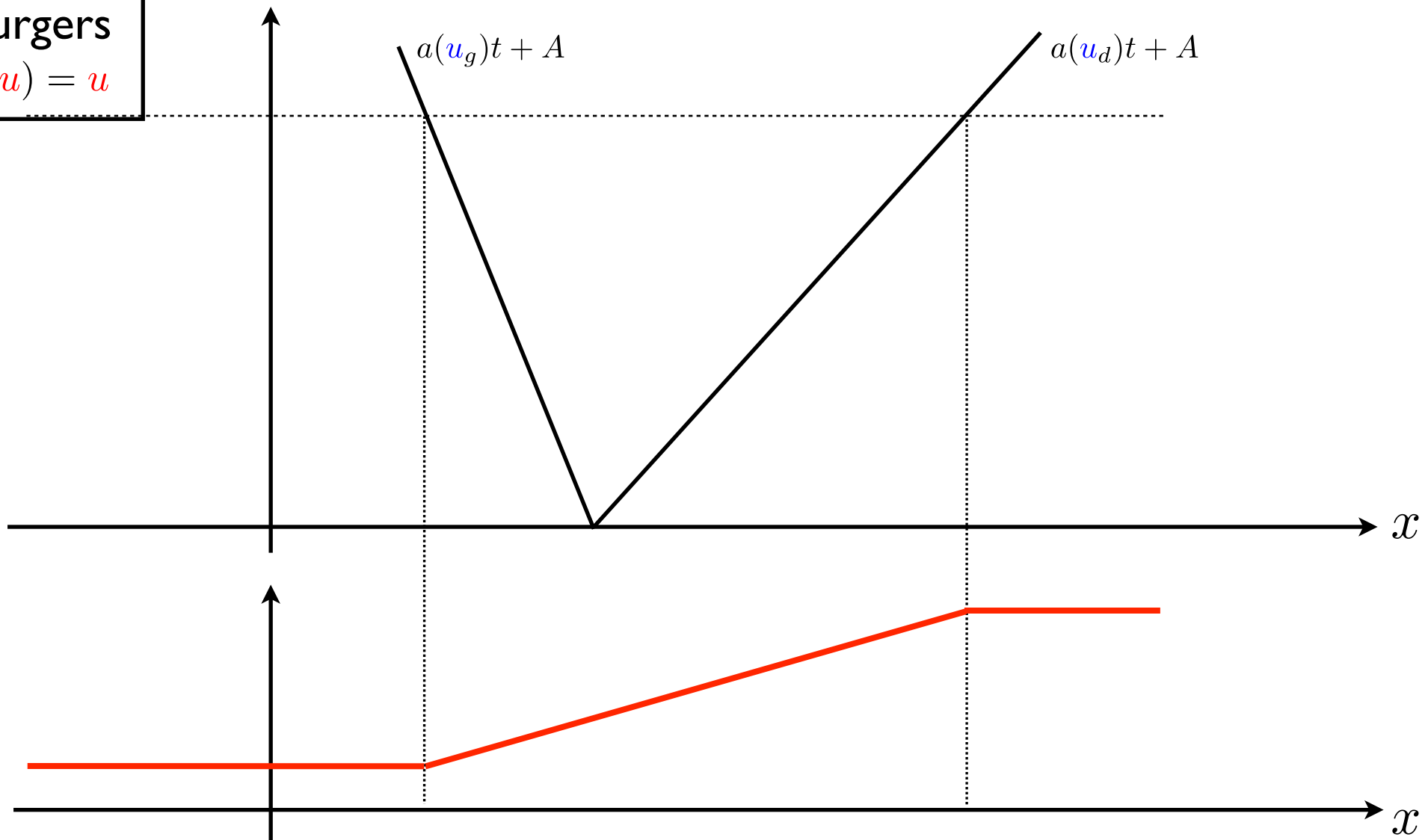
$$a(u) = u$$



Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

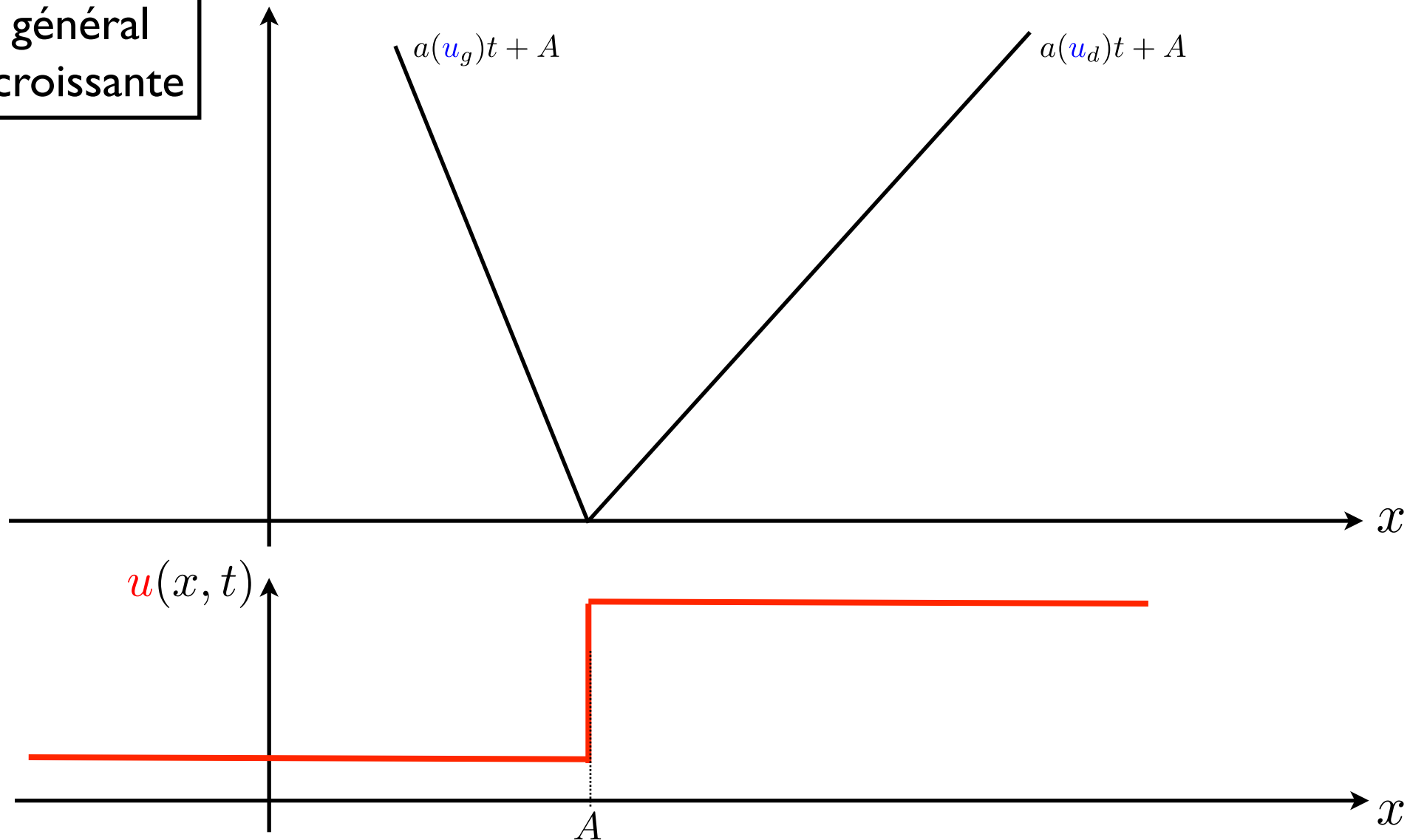
Burgers
 $a(u) = u$



Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

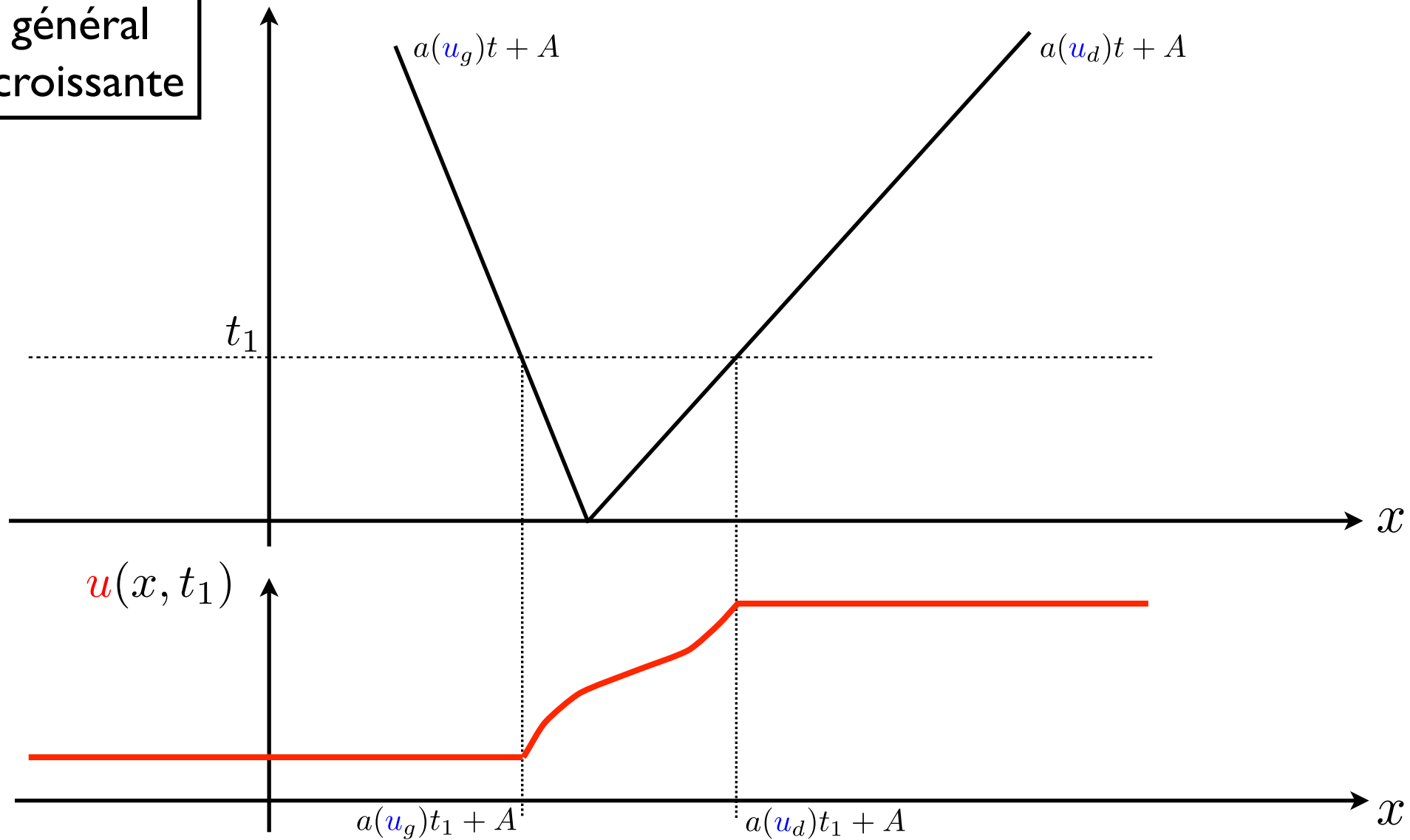
Cas général
 $a(u)$ croissante



Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

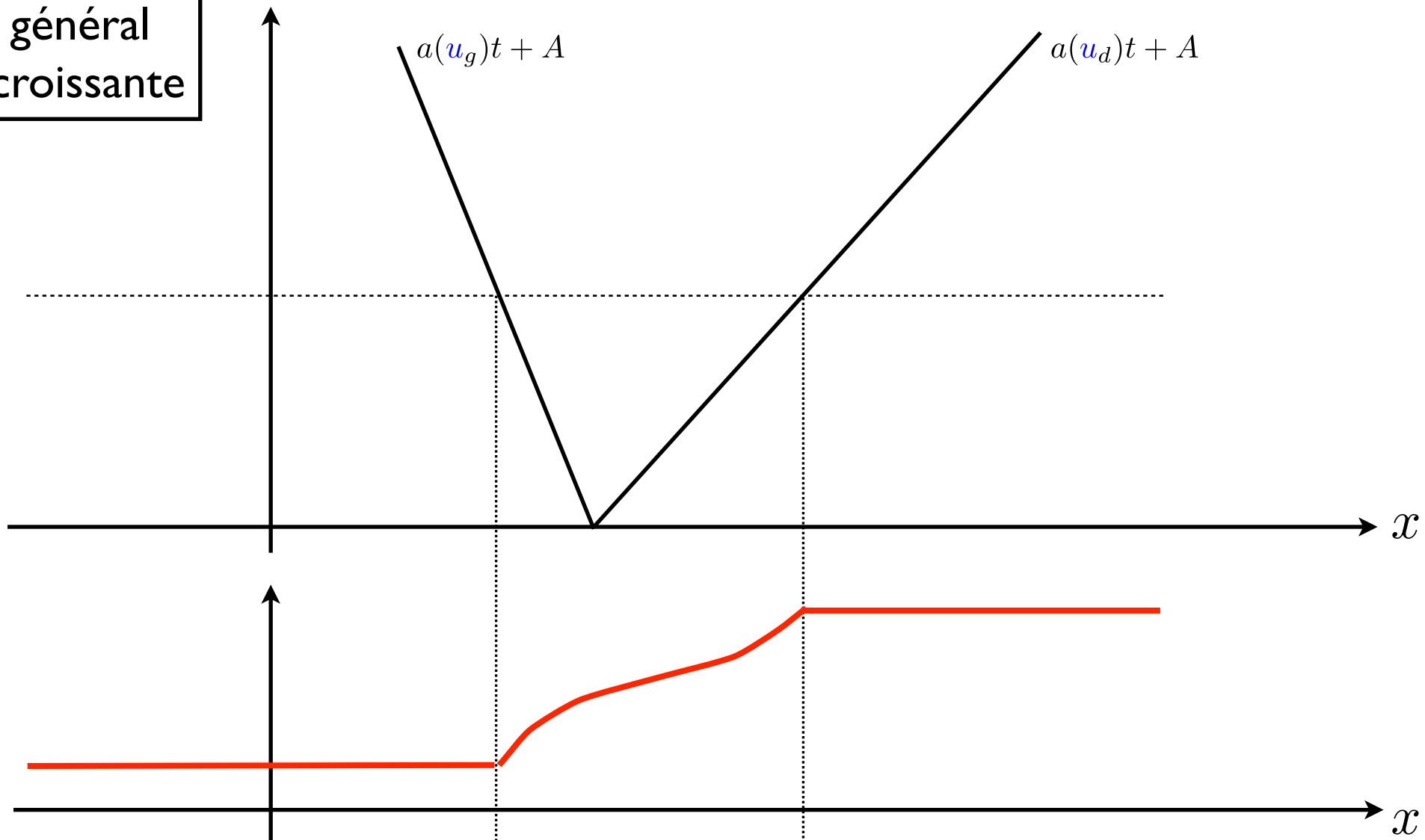
Cas général
 $a(u)$ croissante



Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

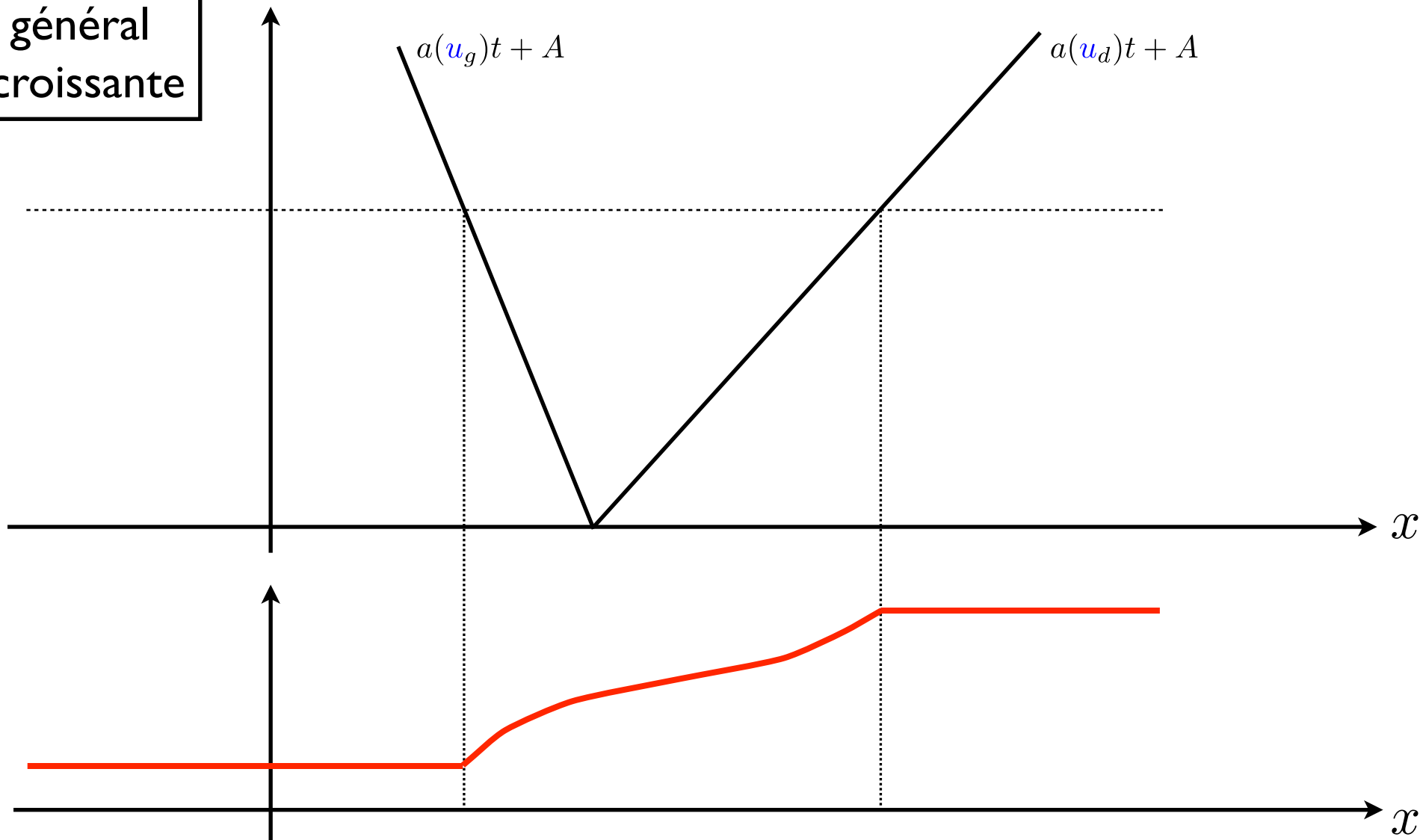
Cas général
 $a(u)$ croissante



Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

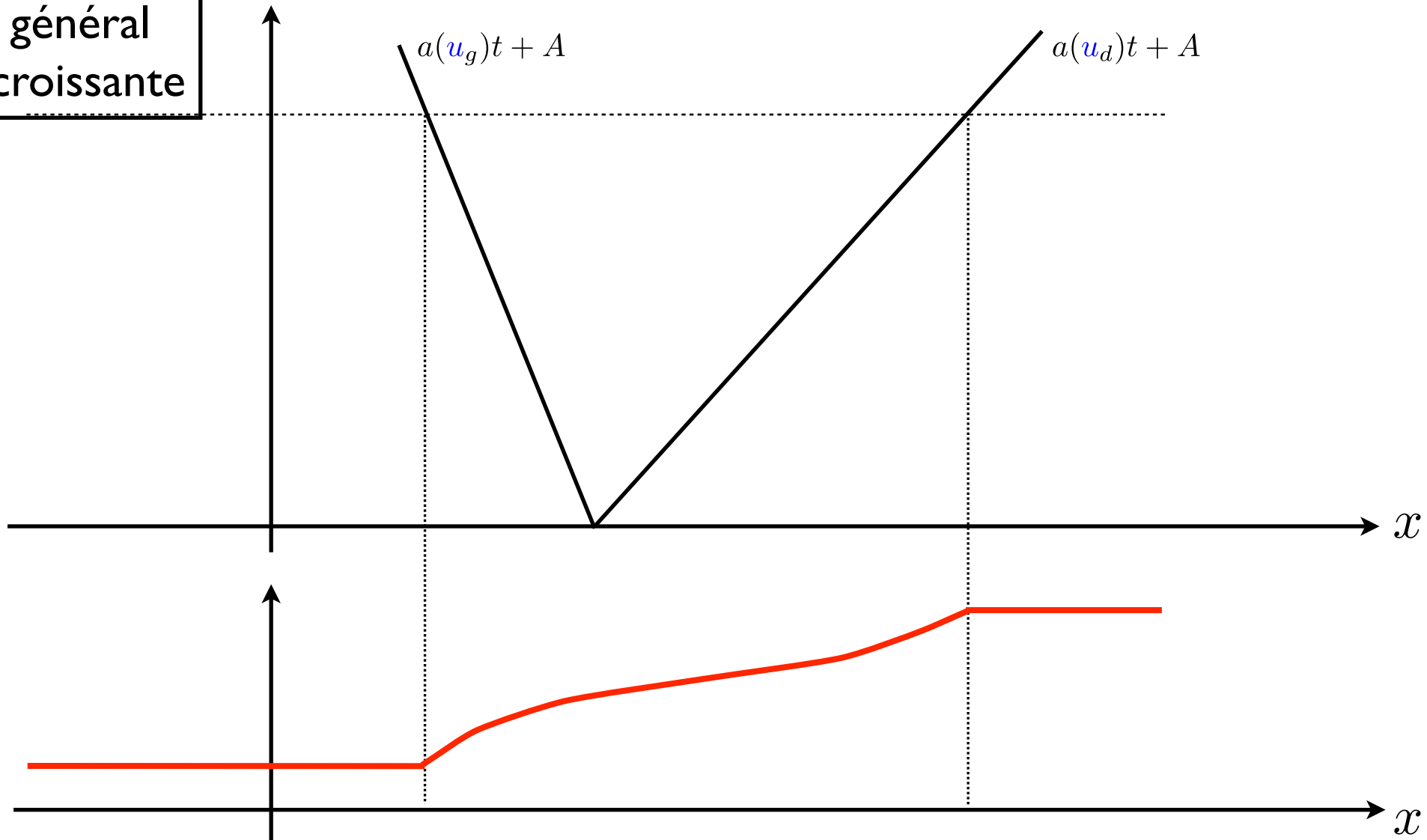
Cas général
 $a(u)$ croissante



Le problème de Riemann avec $u_g < u_d$

$$u(x, t) = \begin{cases} u_g & \text{si } x < a(u_g)t + A \\ a^{-1}\left(\frac{x - A}{t}\right) & \text{si } a(u_g)t + A < x < a(u_d)t + A \\ u_d & \text{si } x > a(u_d)t + A \end{cases}$$

Cas général
 $a(u)$ croissante



Comment construire la solution faible entropique?

Etape 1 : On propose une solution en s'inspirant de la méthode des caractéristiques :

- dans les régions où la solution est $\mathcal{C}^1$, elle doit être classique;
- si les caractéristiques se croisent : présence d'un choc;
- si une région est sans caractéristique : présence d'une détente;

Etape 2 : On démontre ensuite que la solution proposée est bien la solution faible entropique:

- elle est une solution faible si les équations des lignes de choc vérifient la relation de Rankine Hugoniot;
- elle est la solution entropique si le long des lignes de chocs, la condition d'entropie est satisfaite (choc descendant si f est convexe et choc ascendant si f est concave).

Cette séance clot la première partie du cours.

Je mettrai un DM sur le moodle dès cette après midi.
Vous aurez une semaine pour le rendre à vos chargés de TDs.