

COURS 3MA03

Introduction aux équations aux dérivées partielles hyperboliques et à leur discrétisation par différences finies

Sonia Fliss

sonia.fliss@ensta.fr

UMA - Bureau 2.2.21

avec en TD : Clément Beneteau (Gr. 10), Akram Beni Hamad (Gr. 7), Antonin Boisneault (Gr. 3), Eliane Bécache (Gr. 8), Benjamin Bonrepaux (Gr. 9), Mayeul Chavanne (Gr. 2), Sonia Fliss (Gr. 1), Edouard Meddouri-Bernard (Gr. 5), Simone Pescuma (Gr. 4), Michele Zaccaron (Gr. 6).

Déroulé du cours

Les transparents du cours et les énoncés du TD seront mis à disposition sur le moodle le vendredi avant chaque séance.
Le corrigé de chaque TD sera disponible après chaque séance de TD.

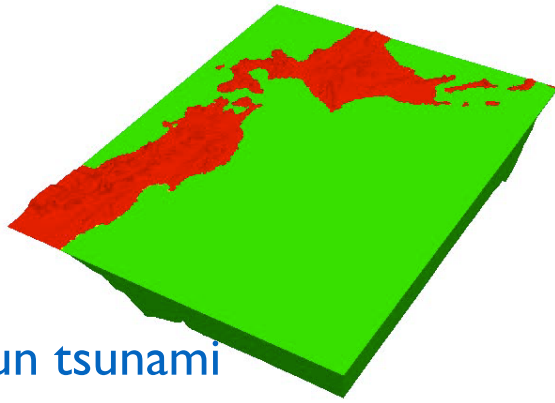
Planning du cours.

23/02, 09/03 et 16/03: cours + TDs - **Partie 1: Analyse des équations aux dérivées partielles hyperboliques linéaires et non linéaires**
DM distribué le 16/03, à rendre le 23/03 (ne rapporte pas de bonus, c'est juste pour s'entraîner)

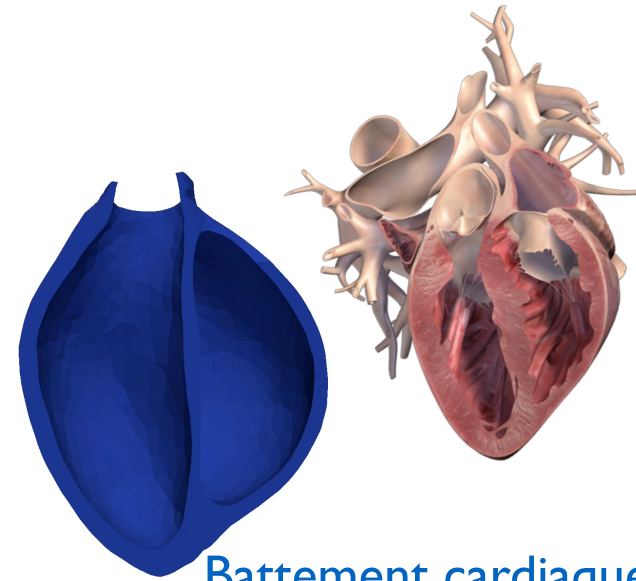
23/03 et 13/04 avril: cours + TDs - **Partie 2: Discrétisation par la méthode des différences finies**

30/03: cours + TP matlab : merci d'apporter son ordinateur.

L'examen **sans documents** est prévu le 20/04.



Propagation d'un tsunami



Battement cardiaque
(Philippe Moireau, Inria-X)



Propagation d'une onde
électromagnétique à l'extérieur d'un avion
(Marc Duruflé)

Glossaire

Equation aux dérivées partielles (EDP)

Les EDPs sont le résultat de la **modélisation** de phénomènes issus de la mécanique, physique, économie,...

Equation dont l'inconnue est une **fonction** de **plusieurs variables**

$$u(t, x_1, x_2, \dots, x_N) \quad t \geq 0, (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$$

et qui exprime des relations entre les **dérivées partielles** de cette fonction:

$$F(t, x_i, u, \partial_{x_i}^{\alpha_i} u) = 0.$$

On distingue les **problèmes stationnaires** (l'inconnue ne dépend que des variables d'espaces) des **problèmes d'évolution** (une des variables est le temps, qui joue un rôle particulier)

Objectifs du cours MA103

Acquérir les premiers outils mathématiques pour

- **analyser** des **équations aux dérivées partielles hyperboliques**
montrer que le problème est bien posé (existence et unicité d'une solution, continuité par rapport aux données), définir le cadre fonctionnel dans lequel il est bien posé
trouver des propriétés importantes de la solution
- **construire un problème discrétisé approché** qui peut être résolu informatiquement, à partir d'une méthode de discrétisation (ici la méthode des **différences finies**)
- **évaluer la qualité de la solution approchée**
précision de la méthode et erreur commise par rapport à la solution exacte
- **comprendre et interpréter les simulations numériques**

Glossaire

EDPs hyperboliques

On distingue classiquement **trois** grandes classes d'équations

Les équations elliptiques : phénomènes d'**équilibre**

Modèle : l'équation de **Laplace** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$ (voir 4ANN1)

Les équations paraboliques : phénomènes de **diffusion**

Modèle : l'équation de la **chaleur** $\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$ (voir 4ANN2)

Les équations hyperboliques : phénomènes de **propagation**

Modèles : l'équation de **transport** $\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = f, t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$

l'équation des **ondes** $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f, t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$

l'équation de **Burgers** $\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = f, t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$

Glossaire

EDPs hyperboliques

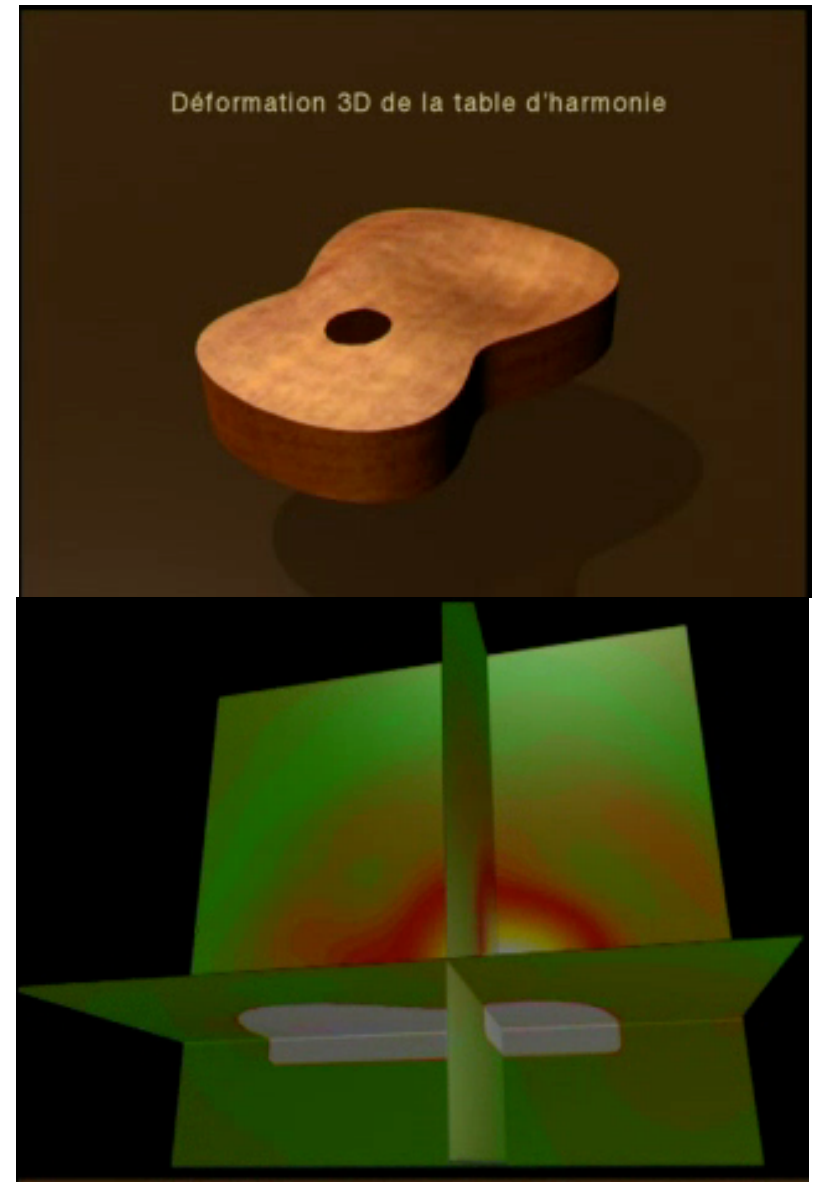
Exemple I : Onde **acoustique** produite par une guitare

$$\begin{aligned} \underset{\substack{\text{masse volumique} \\ \nearrow}}{\rho} \frac{\partial \underset{\substack{\text{pression} \\ \nwarrow}}{\mathbf{v}}}{\partial t} + \nabla \cdot \underset{\substack{\text{pression} \\ \nwarrow}}{\mathbf{p}} &= 0, \\ \underset{\substack{\text{module d'incompressibilité} \\ \nearrow}}{\frac{1}{K}} \frac{\partial \underset{\substack{\text{vitesse} \\ \nwarrow}}{\mathbf{p}}}{\partial t} + \nabla \cdot \underset{\substack{\text{vitesse} \\ \nwarrow}}{\mathbf{v}} &= 0, \end{aligned}$$

- + conditions initiales
- + conditions aux bords
- + interaction **fluide-structure**

Difficultés qui ne seront pas abordées dans le cours :
variable d'espace 3D et géométrie complexe,
conditions aux limites, couplage de plusieurs EDPs

Résultats numériques de Grégoire Derveaux



Glossaire

EDPs hyperboliques

Exemple 2 : Propagation d'une onde de choc en mécanique des fluides compressibles

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho e) + \nabla \cdot (\rho e + p) = 0,$$

$$p = (\gamma - 1) \left[\rho e - \rho \frac{|\mathbf{u}|^2}{2} \right]$$

+ conditions initiales

+ conditions aux bords



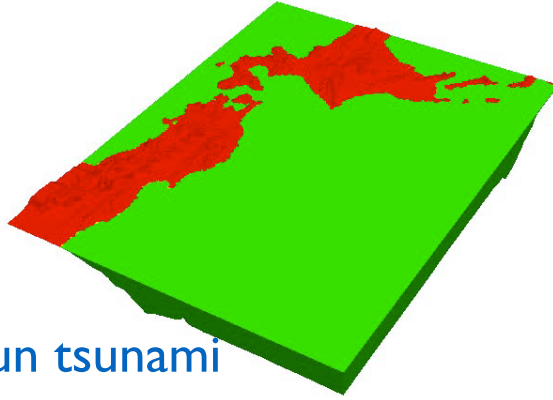
Résultats numériques de Frédéric Alauzet

Difficultés qui ne seront pas abordées dans le cours : variable d'espace 2D et géométrie complexe, conditions aux limites

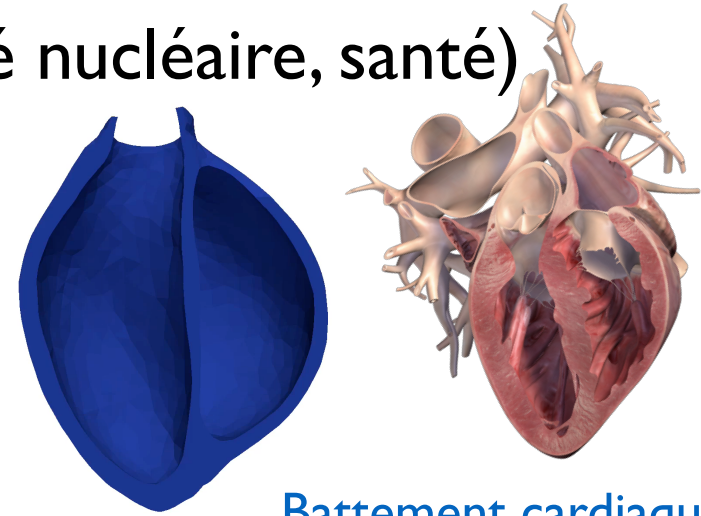
Les simulations numériques

A quoi ça sert?

- **prévoir** (météo, environnement, sureté nucléaire, santé)



Propagation d'un tsunami



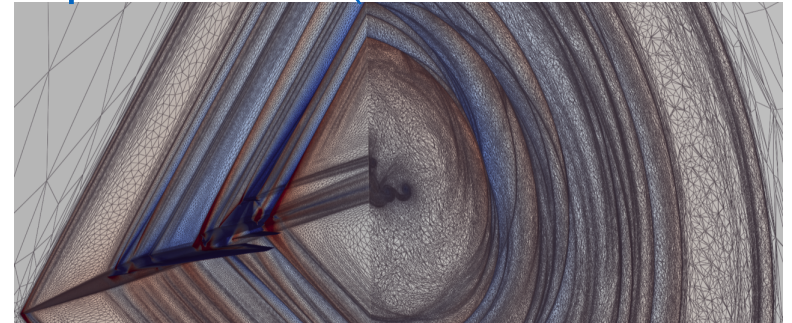
Battement cardiaque
(Philippe Moireau, M3DISIM INRIA)

- **concevoir** (antennes, avions, automobiles)



Propagation d'une onde
électromagnétique à l'extérieur d'un avion
(Marc Duruflé, INRIA)

Bang sonique du C608 (Adrien Loseille, INRIA)



- **comprendre** (validation d'un modèle physique, vérification d'une théorie)

Dans ce cours...

On va s'intéresser à des EDPs hyperboliques **linéaires** et **non linéaires** en 1 dimension d'espace (1D) et sans bords

$$x \in \mathbb{R}$$

Les problèmes 2D et 3D et les conditions aux limites en présence de bords seront abordés dans d'autres cours.

Dans ce cas, on va introduire des outils pour **analyser** ces EDPs (utiles même en dimension supérieure) et pour les **discrétiser**.

En 1D, on peut souvent calculer les solutions de ces EDPs directement mais ce n'est pas possible en général (d'où l'utilité des méthodes de discrétisation).

Cours I : Introduction aux problèmes hyperboliques linéaires.

Introduction de l'équation de transport à vitesse constante

Caractère bien posé de l'équation - Solution classique

Méthode des caractéristiques

Quelques propriétés

Généralisation aux systèmes hyperboliques

L'équation de transport à coefficients constants

Dans ce qui suit c désigne un nombre réel donné.

On appelle **équation de transport** avec vitesse c l'EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0$$

$\swarrow$ la variable d'espace $\swarrow$ le temps

où la fonction inconnue $u = u(x, t)$ est une fonction à valeurs réelles des deux variables réelles.

On considère le **problème de Cauchy**

$$(\mathcal{P}) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

où $u^0(x)$ est la **donnée initiale**.

Notion de solution classique

On appelle **solution classique** du problème, une fonction qui satisfait le problème

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

au sens **ordinaire**, les dérivées étant prises au sens **usuel**.

On peut chercher $u \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

Remarque: une solution classique existe seulement si $u^0 \in C^1(\mathbb{R})$

Question : sous cette hypothèse, est ce que le problème de Cauchy est **bien posé** au sens classique ?

Definition

On dit qu'un problème est **bien posé** dans V , un espace vectoriel normé, au **sens de Hadamard** si et seulement si (ssi)

- ☑ il **existe** une solution dans V
- ☑ cette solution est **unique**
- ☑ la norme de cette solution dans V est contrôlée par les données

Remarque: la dernière propriété souvent appelée “**stabilité par rapport aux données**” est **fondamentale**.

Notion de solution classique

Question : quelle norme munir $C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$?

On va plutôt chercher

$$u \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

où

$$C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$$

$$C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) = \left\{ u \in C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+), \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x} \in C_b^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+) \right\}$$

muni de
$$\|u\|_{C_b^1} = \|u\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^\infty} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^\infty}$$

Une telle solution existe seulement si $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$.

Méthode des caractéristiques

Supposons qu'il existe une telle solution classique.

*Du fait de la nature de l'équation de transport, on montre qu'il existe des courbes le long desquelles l'EDP se simplifie. Ce sont les **courbes caractéristiques**.*

Définition

On appelle courbe caractéristique, les fonctions $X(t)$ telles que

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (X(t), t) = \frac{d}{dt} [u(X(t), t)] ,$$

Rappel: $\frac{d}{dt} [u(X(t), t)] = \frac{\partial u}{\partial t} (X(t), t) + \frac{dX}{dt}(t) \frac{\partial u}{\partial x} (X(t), t)$

Dans le cas de l'équation de transport à vitesse constante c

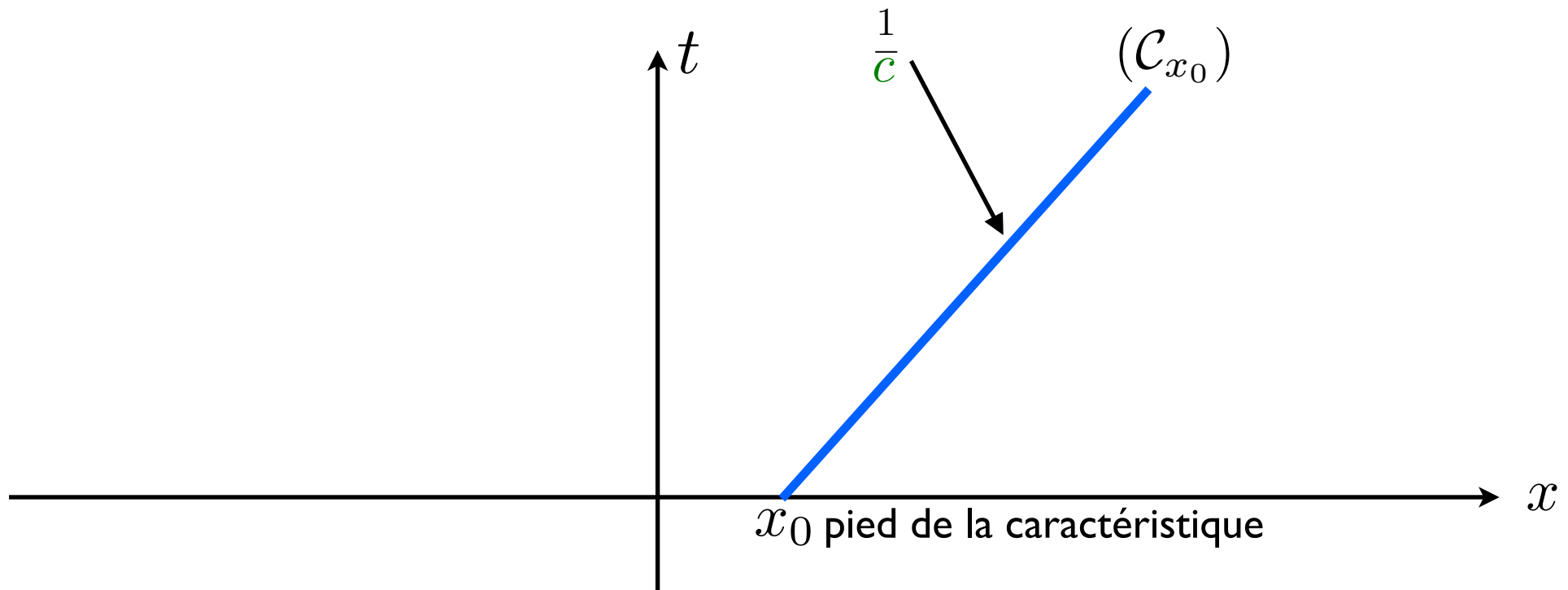
$$\frac{dX}{dt} = c .$$

Les **courbes caractéristiques** sont des **droites caractéristiques**.

Méthode des caractéristiques

Dans le cas de l'équation de transport à vitesse constante c , les **droites caractéristiques** sont solutions de l'EDO (eq. différentielle ordinaire)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = c. \\ X(t=0) = x_0 \end{array} \right. \Rightarrow X_{x_0}(t) = c t + x_0, \quad (\mathcal{C}_{x_0})$$



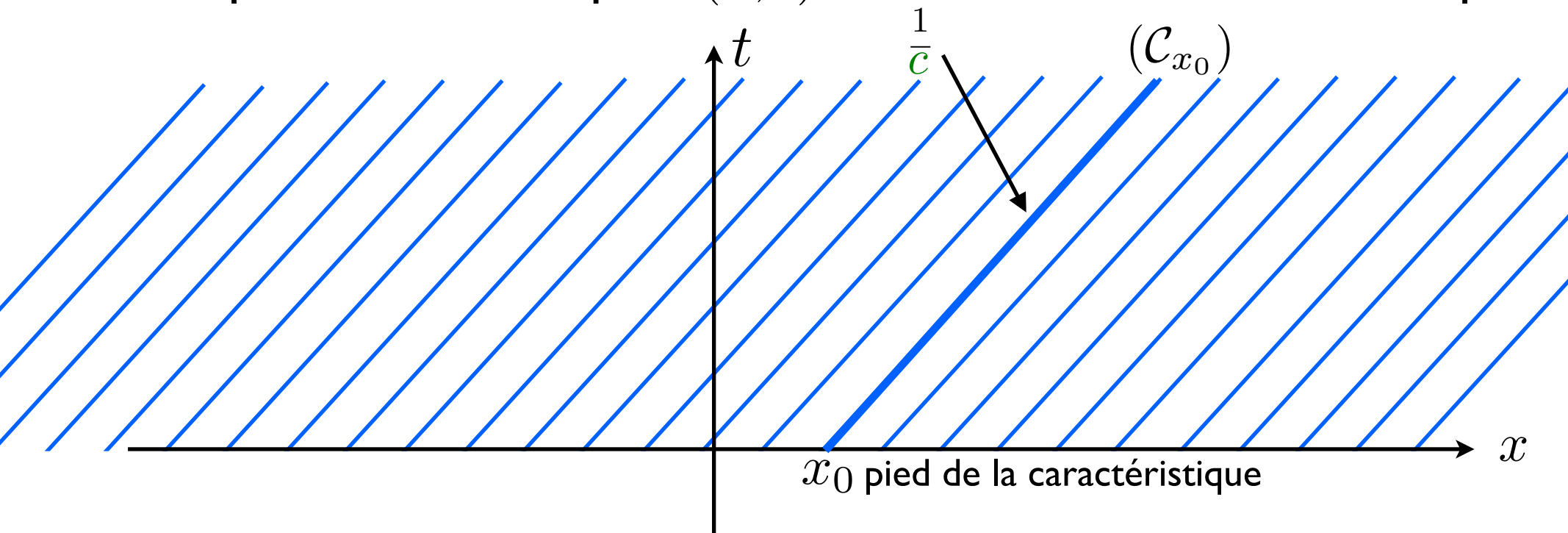
Méthode des caractéristiques

Dans le cas de l'équation de transport à vitesse constante c , les **droites caractéristiques** sont solutions de l'EDO (eq. différentielle ordinaire)

$$\forall x_0 \in \mathbb{R} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = c. \\ X(t=0) = x_0 \end{array} \right. \Rightarrow X_{x_0}(t) = c t + x_0, \quad (\mathcal{C}_{x_0})$$

Les **droites caractéristiques** forment un **fibrage** du demi-plan (x, t) .

Elles remplissent tout l'espace $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ et ne se croisent pas.



Méthode des caractéristiques

Si u est solution classique de

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = u^0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Le long des droites caractéristiques $X_{x_0}(t)$, $x_0 \in \mathbb{R}$, elle vérifie

$$\forall x_0, \quad 0 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } u \text{ est solution classique}}}{=} \left[\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right] (X_{x_0}(t), t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{par définition des droites caractéristiques}}}{=} \frac{d}{dt} [u(X_{x_0}(t), t)],$$

On en déduit que $u(X_{x_0}(t), t)$ est une fonction constante du temps

$$\forall x_0, \quad \underline{u(X_{x_0}(t), t)} = \underline{u(X_{x_0}(0), 0)} = \underline{u^0(x_0)}$$

La solution classique est constante le long de chaque caractéristique.

Méthode des caractéristiques

Si u est solution classique alors

$$\forall x_0, \quad u(X_{x_0}(t), t) = u^0(x_0)$$

Question : Peut on trouver l'expression de $u(x, t)$, $\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$?

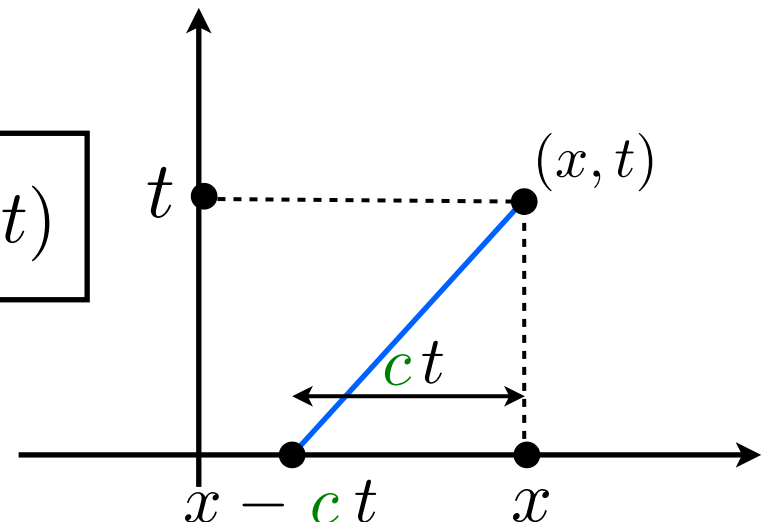
Soit $(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, il existe une et une seule caractéristique qui passe par ce point

$$\exists! x_0, \quad X_{x_0}(t) = x$$

Comme $X_{x_0}(t) = ct + x_0$, on a $x_0 = x - ct$

Alors

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad u(x, t) = u^0(x - ct)$$



Solution classique du problème de Cauchy

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy ($\mathcal{P}$) est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

La solution $u \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, u(x, t) = u^0(x - c t)$$

Preuve: • Existence $U(x, t) = u^0(x - c t)$ est solution. En effet $U \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t}(x, t) &= -c \frac{du^0}{dx}(x - c t) \\ \frac{\partial U}{\partial x}(x, t) &= \frac{du^0}{dx}(x - c t) \end{aligned} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial t} + c \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad \text{et} \quad \underline{U(x, 0) = u^0(x)}$$

• Unicité On a vu dans les transparents précédents que si u est solution classique alors elle est donnée par l'expression ci dessus.

• Stabilité

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty} &= \|u^0\|_{L^\infty} \\ \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L^\infty} &= c \left\| \frac{du^0}{dx} \right\|_{L^\infty} & \left\| \frac{\partial u}{\partial x} \right\|_{L^\infty} &= \left\| \frac{du^0}{dx} \right\|_{L^\infty} \end{aligned}$$

Solution classique du problème de Cauchy

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

La solution $u \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, u(x, t) = u^0(x - ct)$$

Propriétés de la solution classique

Préservation de la régularité.

Conservation de la norme L^p voir le slide suivant pour $p=2$

Propagation à vitesse finie.

$$\text{Supp } u^0 \subset [a, b] \Rightarrow \text{Supp } u(\cdot, t) \subset [a + ct, b + ct]$$

Ces propriétés sont caractéristiques des équations hyperboliques linéaires

Conservation de la norme L^2

Prenons $u^0 \in L^2(\mathbb{R})$ et supposons que $u(\cdot, t)$ et $\frac{\partial u}{\partial x}(\cdot, t)$ aussi.

L'outil fondamental pour la stabilité L^2 est la **transformée de Fourier**

$$\hat{u} := \mathcal{F}u, \quad \hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-ix\xi} dx$$

Si on note

$$u(x, t) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{u}(\xi, t)$$

et qu'on applique la transformée de Fourier au problème

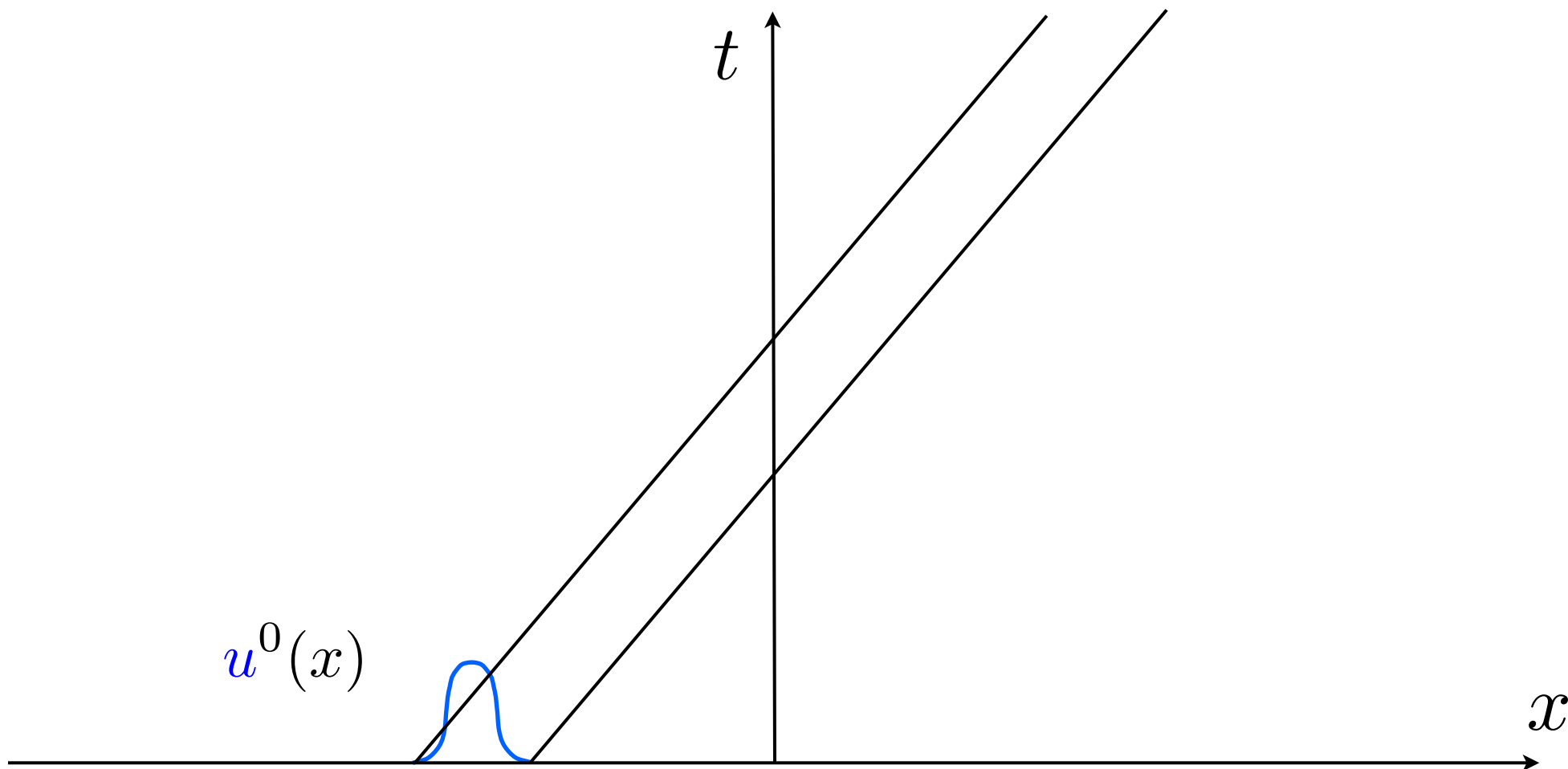
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u^0(x), \end{array} \right. \xrightarrow{\mathcal{F}} \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\hat{u}}{dt} + i c \xi \hat{u} = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}^0(\xi), \end{array} \right.$$

on trouve $\hat{u}(\xi, t) = \hat{u}^0(\xi) e^{-i c \xi t}$ Par TF inverse, on retrouve la solution.

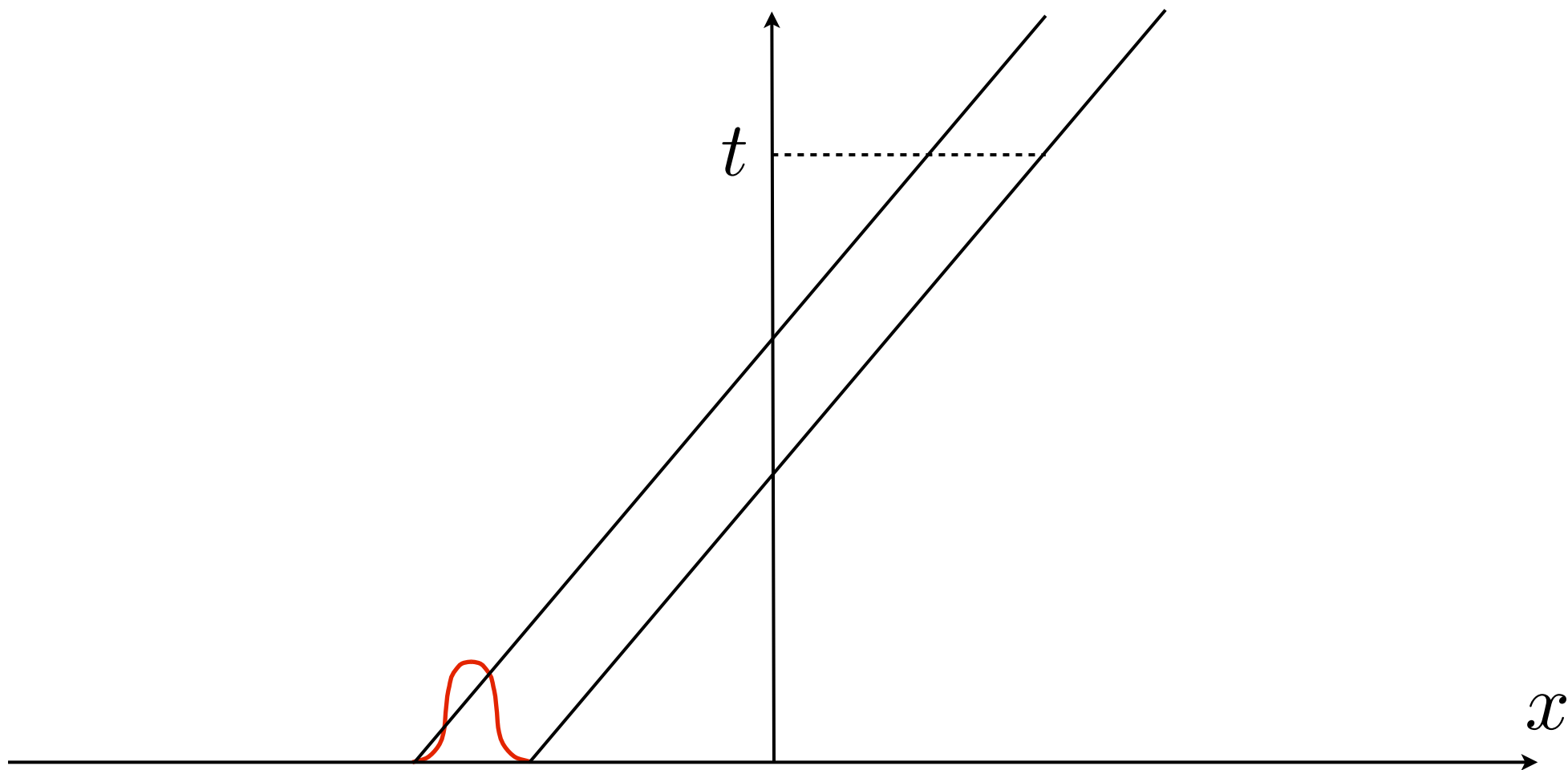
$$\forall t > 0, \quad \|\hat{u}(\cdot, t)\|_{L^2} = \|\hat{u}^0\|, \quad \xRightarrow{\text{Plancherel}} \quad \forall t > 0, \quad \|u(\cdot, t)\|_{L^2} = \|u^0\|.$$

Lors de l'étude de la stabilité L^2 des schémas, on réutilisera la Transformée de Fourier.

Propagation à vitesse finie

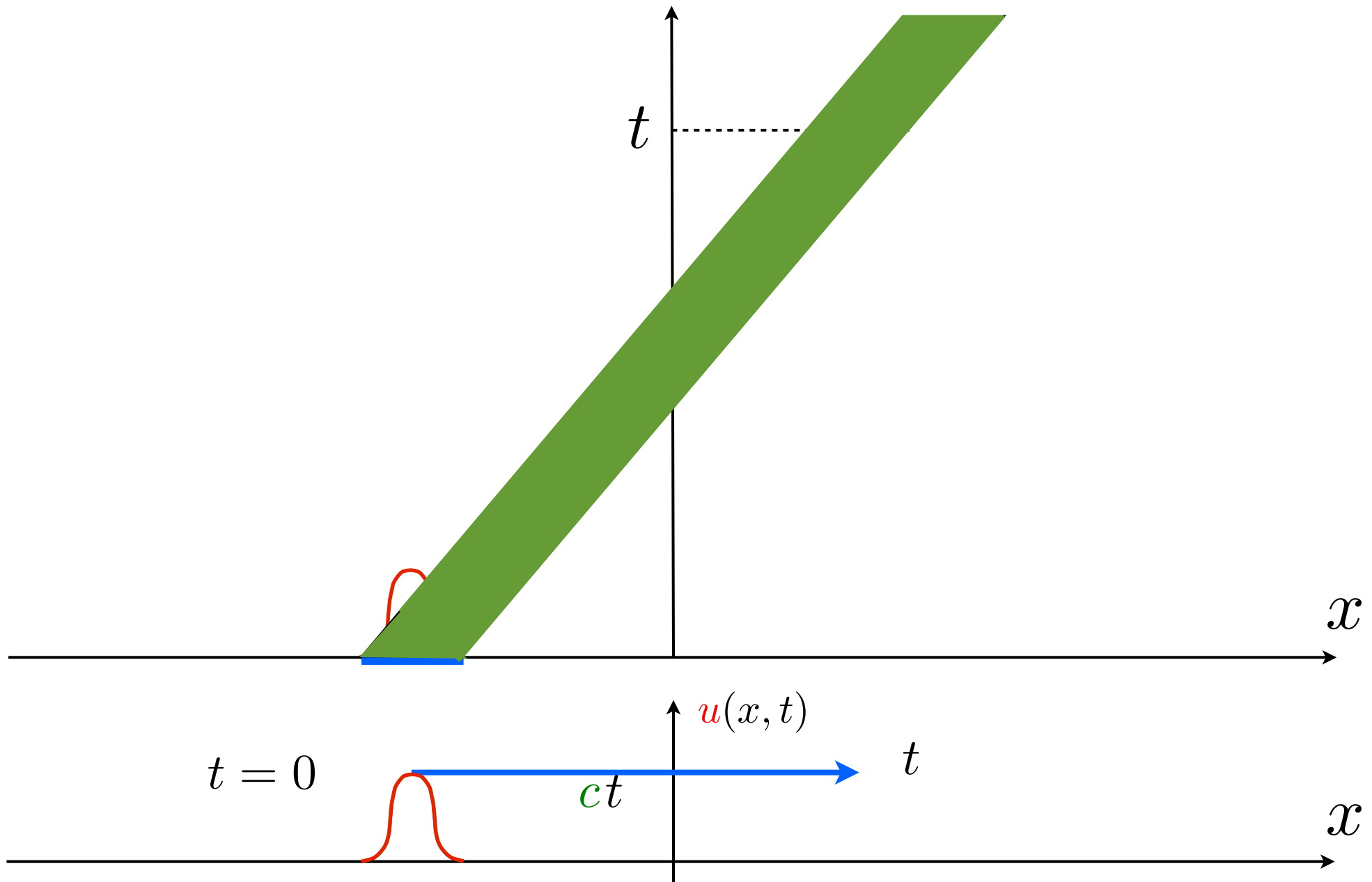


Propagation à vitesse finie



Propagation à vitesse finie

$$\text{Supp } u^0 \subset [a, b] \quad \Rightarrow \quad \text{Supp } u(\cdot, t) \subset [a + ct, b + ct]$$



Solution classique/faible du problème de Cauchy

Théorème : Pour toute donnée initiale $u^0 \in C_b^1(\mathbb{R})$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$.

La solution $u \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ est donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, u(x, t) = u^0(x - c t)$$

Remarque : que se passe-t-il si $u^0 \notin C^1(\mathbb{R})$? Par exemple, $u^0 \in L^p(\mathbb{R})$

On peut définir

$$\text{p.p. } (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, u(x, t) = u^0(x - c t)$$

C'est une **solution faible** du problème de Cauchy (on verra la définition la prochaine fois). On peut montrer que le problème est bien posé dans L^p .

Généralisation aux systèmes

Etant donné $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, on considère le problème

$$(S) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Definition : On dit que le système (S) est **hyperbolique** ssi A est **diagonalisable** à valeurs propres **réelles**.

Exemple : l'équation des ondes (voir l'exercice 2 du TDI)

On suppose que c'est bien le cas dans la suite.

Généralisation aux systèmes

Etant donné $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$, on considère le problème

$$(S) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}(x, t) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^N \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Soit $P \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ telle que $A = P\Lambda P^{-1}$ avec $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_N \end{pmatrix}$

Posons $\mathbf{v}(x, t) := P^{-1} \mathbf{u}(x, t)$ et $\mathbf{v}^0(x) := P^{-1} \mathbf{u}^0(x)$

On voit que $\mathbf{v}$ est solution du système diagonal

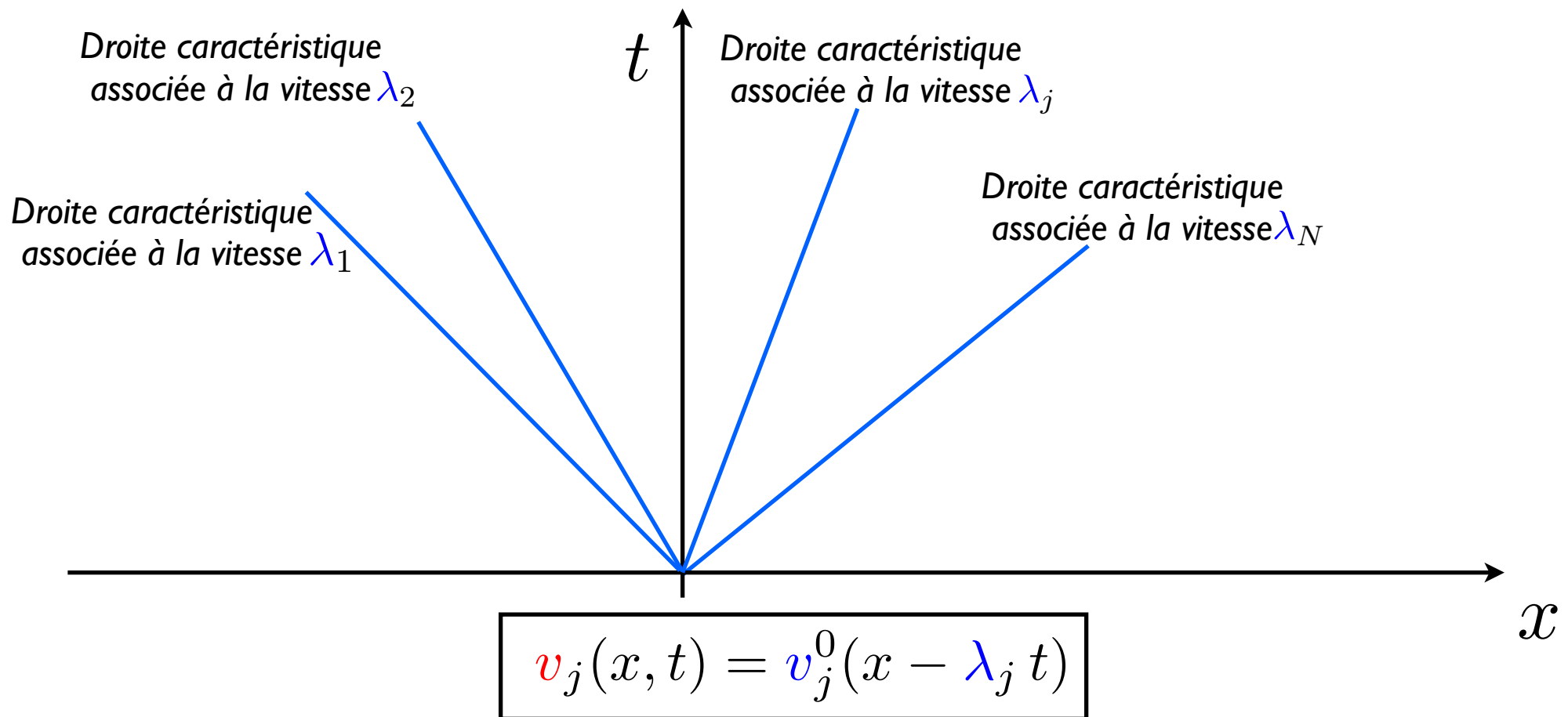
$$(\tilde{S}) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ \mathbf{v}(x, 0) = \mathbf{v}^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

Généralisation aux systèmes

On a donc N équations de transport découplées.

$$(\forall 1 \leq j \leq N) \quad \left| \begin{array}{l} \frac{\partial v_j}{\partial t} + \lambda_j \frac{\partial v_j}{\partial x} = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0 \\ v_j(x, 0) = v_j^0(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{array} \right.$$

On a N familles de droites **caractéristiques**



Généralisation aux systèmes

Théorème : Pour toute donnée initiale $\mathbf{u}^0 \in C_b^1(\mathbb{R})^N$, le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ est bien posé dans $C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)^N$.

La solution $\mathbf{u} \in C_b^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)^N$ est donnée par

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+, \quad \mathbf{u}(x, t) = P \mathbf{v}(x, t)$$

$$v_j(x, t) = v_j^0(x - \lambda_j t)$$

$$\mathbf{v}^0(x) := P^{-1} \mathbf{u}^0(x)$$