UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

–Paris VI–

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Spécialité

MATHEMATIQUES

présentée

par Patrick CIARLET

Sujet :

Préconditionnements matriciels et théorie des graphes. Résolution des équations de Maxwell et de modèles approchés.

Soutenue le 1er avril 1998

devant le jury composé de :

Madame	Christine BERNARDI	
Messieurs	Franco BREZZI	(Rapporteur)
	Michel CESSENAT	
	Tony CHAN	(Rapporteur)
	Patrick JOLY	
	Patrick LE TALLEC	
	Marc LENOIR	
	Yvon MADAY	
	Olivier PIRONNEAU	
	Jean-Marie THOMAS	(Rapporteur)

ORGANISME ÉMETTEUR :

Ecole Nationale Supérieure
de Techniques Avancées
Unité de Mathématiques Appliquées
32, boulevard Victor
75739 Paris Cedex 15

CLASSIFICATION

Secret militaire	Secret Industriel

SI LE DOCUMENT ÉMANE D'UNE SOCIÉTÉ

Numéro du contrat	Service chargé de l'exécution du contrat

TITRE :
Mémoire d'habilitation à diriger les recherches.
Préconditionnements matriciels et théorie des graphes.
Résolution des équations de Maxwell et de modèles approchés.

AUTEUR : Patrick CIARLET.

DATE : avril 1998	Rapport de Recherche n° 314	52 Pages	4 Figures	78 Références bibliographiques

Dans le cadre de ce mémoire d'habilitation à diriger les recherches, nous présentons des travaux répartis selon deux catégories.
Tout d'abord, ceux relatifs au calcul parallèle, qui comprennent notamment l'élaboration et l'adaptation de méthodes numériques itératives pour la résolution de problèmes linéaires, ainsi que la conception et l'étude d'algorithmes dont le but est de partitionner ou de contracter des graphes et, par extension, des maillages.
La seconde partie du mémoire est consacrée à quelques problèmes théoriques et numériques liés à la résolution des équations de Maxwell temporelles, ainsi que celle de modèles approchés, dans un domaine borné, soit non simplement connexe, soit à frontière polyédrique.

NOTIONS D'INDEXAGE :

Calcul parallèle, Gradient Conjugué, préconditionnements, méthodes de décomposition de domaine, renumérotation, graphes, partitionnement, connectivité, contraction.
Equations de Maxwell, modèles approchés, décompositions orthogonales, domaines non simplement connexes, domaines polyédriques, singularités géométriques.

A Mum, Papa, LN & Gas, et F.

Remerciements

Un grand nombre de personnes m'ont aidé au cours de ces années passées à chercher quelques vérités mathématiques. Je vais essayer de les remercier comme il se doit...

A tout seigneur tout honneur, les membres du jury, et, pour débuter, les trois rapporteurs qui ont eu le courage de lire ce qui suit en grand détail : deux figures familières, le flamboyant Franco Brezzi et Tony Chan à l'esprit (et le coup droit) si vif, et enfin Jean-Marie Thomas dont j'ai enfin pu faire la connaissance. J'avais déjà rencontré les autres membres de cet imposant jury avant le 1er avril. Par ordre alphabétique, Christine Bernardi qui m'a très souvent aidé, et dont j'apprécie particulièrement la rigueur scientifique et la gentillesse, Michel Cessenat, bien connu pour ses relectures extrêmement précises, Patrick Joly à l'humour presque déstabilisant, Patrick Le Tallec qui avait eu la lourde tâche de participer à un autre jury il y a quelques années, Marc Lenoir, mon chef, et donc parfait à ce titre, le dynamique Yvon Maday et Olivier Pironneau dont j'envie l'intuition numérique.

Si les membre du jury ont pu juger le travail présenté dans la suite, c'est aussi grâce à sept co-auteurs auxquels j'exprime ma profonde gratitude. Il s'agit de Franck Assous, flegmatique et méridional, Tony Chan (encore lui...), Françoise Lamour, dont j'admire tous les jours l'intuition et la vision globale des problèmes, Barry Smith, un analyste numéricien de grande valeur et un vrai spécialiste du calcul scientifique, Eric Sonnendrücker, qui rédige plus rapidement qu'il ne faut de temps pour le dire, W. K. Szeto, l'inconnu de Hong-Kong, et Jun Zou, un énorme travailleur, de Hong-Kong lui aussi.

Je ne pouvais pas écrire cette rubrique sans parler des personnes ci-après qui m'ont beaucoup aidé tout au long de ces dernières années. Tout d'abord, le bouillonnant Pierre-Arnaud Raviart, avec lequel j'ai partagé la joie de la découverte et de la construction des preuves. Vivette Girault, qui m'a si souvent et si efficacement conseillé. Roland Glowinski, toujours prêt à m'aider de Houston, Texas. Jean-Claude Nédélec, à qui j'ai posé des questions très diverses, dont les réponses m'ont fait entrevoir l'étendue des connaissances. Monique Dauge & Martin Costabel, incollables sur des problèmes mathématiques difficiles. Une autre personne m'a elle aussi énormement apporté par l'intermédiaire de ses livres : il s'agit de Pierre Grisvard, trop tôt disparu.

Enfin, je tiens à remercier trois personnes morales, le Commissariat à l'Energie Atomique, la Délégation Générale pour l'Armement ainsi que l'University of California at Los Angeles, pour m'avoir permis de mener mes travaux dans d'excellentes conditions.

Extended abstract

In this report, we present theoretical and practical results in the fields of scientific computing and numerical analysis. Hereafter, we arrange these results into two categories.

First of all, those related to intensive numerical computations and to their favorite tools, which are the parallel and massively parallel computers. In this field, we distinguish two classes of problems to be solved.

The first class is that of adapting, to this type of architecture, already existing numerical methods to solve large sparse linear systems. More precisely, we have studied those linear systems which come from the discretization by finite differences of second order elliptic problems of the type

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\,\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(b\,\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f,$$

with non negative piecewise smooth coefficients, in the unit square, with a Dirichlet boundary condition. The resulting linear system $A\,u_h = f_h$ is such that A is a symmetric positive definite matrix. It is then possible to compute u_h with the help of an iterative algorithm such as the well-known preconditioned conjugate gradient method.

Therefore, we have defined and studied (matrix) preconditioners of A with the following natural properties. The first one is to be numerically efficient, that is to be close to A^{-1}, so that the algorithm converges after a small number of iterations. The second one is that these preconditioners are well-suited for parallel computing, or in other words that their implementation on parallel architectures leads to an optimal parallelization rate (as close as possible to one). Naturally, we have partitioned the unit square into either strips or boxes and used a domain decomposition approach **[2]**, **[12]**. We have also studied another type of preconditioners, based on a red-black reordering of the set of unknowns **[3]**.

Obviously, the main advantage of discretizing the problem (on a square) by finite differences is that, in this way, it is possible to avoid a major difficulty which appears when one wishes to apply a domain decomposition method (on any computational domain), for instance with a finite element approach. Indeed, how should one partition "optimally" the domain?

In the second place, we have tried to address this difficulty. For that, we have studied the more general problem of graph partitioning. In particular, this framework, which consists in modeling the computational domain as a graph, leads to a geometry-free problem. As a matter of fact, the dimension (2d or 3d) has not to be taken into account.

To partition a graph, there exist two main categories, depending whether the data structure of the graph is used as a whole ("global" heuristics), or one substructure after the other ("local" heuristics).

Global heuristics are usually recursive. Among recursive methods, the foremost is the Recursive Spectral Bisection. In **[8]**, we have proved that the partition induced by RSB satisfies to an optimality criterion.

We have also conceived a greedy method, which falls into the local heuristics category. This method has been analysed from both theoretical and practical points of view **[4]**.

In this framework, we have compared several partitioning heuristics on a set of test-graphs. In **"Recursive partitioning methods..."**, we have measured several parameters related to the quality of the partitions thus obtained, together with the CPU time needed to build them. In **[13]**, we have coupled these partitioners to a PDE solver package, in order to estimate the impact of these heuristics on the numerical problem to be solved.

To conclude for this class, we have analysed in **[6]** the coarse mesh generation problem, for 2d triangular meshes. This problem usually appears when multilevel methods, either domain decomposition or multigrid, are used.

The second class corresponds to the study of the solution to the time-dependent Maxwell equations, and to some of its approximate models, in a bounded domain, from the point of view of functional and numerical analyses.

Among these models, we have considered the magnetostatic equations, or **curl** – div problem, in which the dependence in time of the electromagnetic field is neglected. A number of results that have been proved are applicable to the Stokes system of equations. We have also worked on the resolution of the Darwin model, which is derived from Maxwell's equations by neglecting the divergence-free part of the displacement current.

In the first place, we have studied the case of a bounded, connected but not simply connected, domain Ω of $\mathbf{R}^3$ with a smooth boundary. It has been assumed that the domain could be made simply connected by removing (smooth) cuts. The resulting domain has a (pseudo-)Lipschitz continuous boundary on which the classical theory can be used.

On this type of domain, cf. **[1]**, we have introduced the Helmholtz decomposition of elements of $L^2(\Omega)^3$. For the magnetostatic equations, existence and uniqueness results have then been established in the case of a perfectly conducting material enclosing the domain. In a similar manner, existence and uniqueness results have also been obtained for the Darwin model **[10]**.

Then, we have considered the resolution of the time-dependent Maxwell equations in a non convex polygonal domain of $\mathbf{R}^2$, i. e. with reentrant corners. In the case when there is a perfectly conducting boundary condition in conjunction with smooth source terms, one can expect $H^1(\Omega)$ regularity in a convex domain. This does not hold in the more general case. As a consequence, we have built a splitting of the solution into a regular part (which belongs to $H^1(\Omega)$), and a singular part (**[5]**, **[11]**). This splitting of the solution is based on orthogonal decompositions of functional spaces. This allows to define a discretization of the problem by the classical $H^1(\Omega)$-conforming finite elements for the regular part, and to introduce a domain decomposition method for the singular part, which takes into account the explicit knowledge of the singularity around reentrant corners.

In $\mathbf{R}^3$, we have begun the extension of the above mentioned theory to Lipschitz continuous polyhedral domains. In particular, we have determined an orthogonal decomposition of the space $L^2(\Omega)$ in **[9]**.

Last but not least, we have studied the finite element discretization of the Darwin model on Lipschitz continuous polyhedral domains in **[7]**. We have compared the $H(\mathbf{curl};\Omega)$- and $H(\mathbf{curl},\mathrm{div};\Omega)$-conforming finite element methods and obtained the associated error estimates.

N. B. Bracketed numbers refer to the list of publications given pages 43–44.

Introduction

Dans le cadre de ce mémoire, nous présentons des travaux que nous avons choisi de classer selon deux catégories.

Tout d'abord, ceux relatifs au calcul numérique intensif, dont l'outil privilégié est depuis quelques années déjà l'ordinateur d'architecture parallèle ou massivement parallèle. Nous avons isolé deux grandes classes de problèmes à résoudre.

La première est celle de l'adaptation de méthodes numériques connues à ce type d'architecture, en vue de résoudre des systèmes linéaires creux de grande taille. Plus précisément, nous avons considéré les systèmes linéaires issus de la discrétisation par différences finies de problèmes aux limites elliptiques du second ordre, du type

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right)=f,$$

à coefficients positifs éventuellement discontinus, dans le carré unité, avec une condition au bord de type Dirichlet. Le système discret résultant $A\,u_h = f_h$ est tel que la matrice A est symétrique définie positive. Il est ainsi loisible de calculer u_h grâce à un algorithme itératif tel que celui du gradient conjugué préconditionné.

Notre travail a donc consisté en la définition et en l'étude de préconditionnements matriciels de A, qui possèdent les deux propriétés suivantes. La première est d'être numériquement efficaces, c'est-à-dire proches de A^{-1}, afin que l'algorithme converge en peu d'itérations. La seconde est d'être bien adaptés aux besoins spécifiques du calcul parallèle, i. e. que leur mise en œuvre informatique débouche sur un taux de parallélisation proche de 1. Naturellement, nous avons choisi une méthode du type décomposition de domaine, pour laquelle le carré unité est découpé soit en bandes, soit en carrés. Par ailleurs, nous avons également étudié un autre type de préconditionnnement, basé cette fois sur un découpage rouge/noir des inconnues.

L'avantage de la discrétisation par différences finies du problème à résoudre sur un domaine carré permet de s'affranchir d'une difficulté importante qui apparaît lorsque l'on souhaite utiliser une méthode de décomposition de domaine dans un domaine quelconque (par exemple lors d'une discrétisation par éléments finis). En effet, comment découper de façon "optimale" un tel domaine de calcul ?

C'est à cette question que, dans un second temps, nous avons essayé d'apporter une réponse pratique. Pour cela, nous avons considéré le problème plus général de partitionnement d'un graphe. Entre autres, cette modélisation, qui consiste à s'abstraire du domaine de calcul pour ne retenir que la représentation sous forme d'un graphe, présente un avantage important, celui de ne plus avoir à prendre en considération la dimension géométrique (2d ou 3d).

Pour partitionner un graphe, il existe deux catégories d'heuristiques, selon que l'on utilise pour ce faire la donnée du graphe dans sa totalité (heuristiques "globales"), ou simplement une partie de celui-ci (heuristiques "locales").

La plupart des heuristiques globales sont récursives. Parmi ces méthodes récursives, nous avons étudié, pour la plus connue d'entre elles, dite RSB (Recursive Spectral Bisection), la qualité de la partition obtenue en montrant qu'elle satisfait à un critère d'optimalité.

En ce qui concerne les heuristiques locales, nous avons conçu une méthode "gloutonne". Cette méthode a été analysée à la fois d'un point de vue théorique et d'un point de vue pratique.

Dans ce cadre, nous avons comparé les performances de plusieurs heuristiques sur un ensemble de graphe-tests. En premier lieu, en mesurant la qualité de la partition construite ainsi que le temps de calcul nécessaire à l'obtention de celle-ci. Ensuite, en couplant la construction de ces

partitions à la résolution d'un problème elliptique par une méthode de décomposition de domaine itérative, en vue d'estimer l'influence de telles heuristiques sur le problème numérique proprement dit.

Enfin, toujours dans l'optique de l'utilisation de méthodes multiniveaux (décomposition de domaine ou multigrille), nous avons analysé le problème de la génération de maillages grossiers basée sur la contraction d'un maillage triangulaire 2d donné.

La seconde catégorie de travaux présentés ci-après est l'étude de problèmes théoriques et numériques liés à la résolution du système des équations de Maxwell temporelles, ainsi que de certains modèles approchés, dans un domaine borné.

Parmi ces modèles, nous avons notamment considéré les équations de la magnétostatique, ou système en "div-**rot**", dans lequel on néglige la dépendance en temps du champ électromagnétique. Certains de ces résultats sont en particulier applicables au système de Stokes. Nous avons également travaillé à la résolution du modèle de Darwin, qui est obtenu en négligeant la partie à divergence nulle du courant de déplacement dans le système de Maxwell.

En premier lieu, nous avons considéré le cas d'un domaine Ω de $\mathbf{R}^3$, de frontière régulière, connexe, mais ne possédant pas la propriété de simple connexité. On peut, en soustrayant un certain nombre de coupures (nappes régulières de $\mathbf{R}^2$), rendre l'ouvert simplement connexe, de frontière (pseudo-)lipschitzienne et appliquer alors les résultats classiques.

Sur ce type d'ouverts, nous avons introduit des décompositions de Helmholtz pour les fonctions de $L^2(\Omega)^3$. Ceci nous a permis d'établir l'existence et l'unicité de la solution des équations de la magnétostatique pour une condition aux limites de type conducteur parfait, dans les espaces fonctionnels idoines. De même, nous avons pu caractériser la solution des équations du modèle de Darwin.

Par la suite, nous avons étudié la résolution des équations de Maxwell temporelles dans un domaine polygonal de $\mathbf{R}^2$ non nécessairement convexe, c'est-à-dire en présence de coins rentrants. Dans le cas d'une condition aux limites de type conducteur parfait et pour des termes sources réguliers, la solution est de régularité H^1 en espace lorsque le domaine est convexe. Ce n'est plus vrai dans le cas général. En conséquence, nous avons construit une décomposition de la solution en une partie régulière (dans H^1), et une partie singulière. Cette partition de la solution repose sur la décomposition orthogonale d'espaces fonctionnels. Ceci nous a permis de définir une méthode de discrétisation : par éléments finis conformes dans H^1 pour la partie régulière ; par une méthode de décomposition de domaine pour la partie singulière, qui prend en compte la connaissance explicite de l'allure de la solution singulière au voisinage des coins rentrants.

Dans $\mathbf{R}^3$, nous avons entamé l'extension de ces travaux à des domaines polyédriques non convexes à frontière lipschitzienne. Ainsi, la caractérisation d'une décomposition orthogonale de l'espace $L^2(\Omega)$ a été réalisée.Ê

Pour finir, nous avons étudié la discrétisation par éléments finis du modèle de Darwin sur des domaines polyédriques à frontière lipschitzienne. Nous avons comparé les méthodes conformes dans $H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ et $H(\mathrm{div}\,,\mathbf{rot}\,;\Omega)$ et obtenu les estimations d'erreur relatives à chaque approche.
Ê

Dans ce qui suit, nous allons détailler les résultats annoncés ci-dessus, en conservant l'ordre adopté dans l'introduction. Nous commencerons donc par le calcul parallèle, en considérant tout d'abord les préconditionnements de systèmes linéaires, puis le partitionnement et la contraction de graphe. Ensuite, nous aborderons l'étude des décompositions d'espaces fonctionnels, et leurs applications au système des équations de Maxwell ainsi qu'à ses modèles approchés.

Préconditionnements matriciels et théorie des graphes

Nous exposons ci-après un résumé de nos travaux liés au calcul numérique parallèle. Tous ces travaux découlent de la construction de méthodes multiniveaux ou d'outils associés. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [7] ou [27] pour une présentation générale de ces méthodes.

1 Préconditionnements parallèles de systèmes linéaires

Nous résumons les travaux suivants :

[T1] Chapitres 3, 4 et 5 de *Etude de préconditionnements parallèles pour la résolution d'équations aux dérivées partielles elliptiques. Une décomposition de l'espace* $L^2(\Omega)^3$. Thèse de l'Université Paris 6, Laboratoire d'Analyse Numérique, 1992.

[T2] Implementation of a domain decomposition method well-suited for (massively) parallel architectures. *High Speed Comp.*, 6(1):157–182, 1994.

[T3] A comparison of three iterative algorithms based on domain decomposition methods. Dans D. E. Keyes et J. Xu, editeurs, *Domain decomposition methods in scientific and engineering computing*, volume 180, pages 387–393. AMS, Contemporary Mathematics, 1994.

[T4] Repeated red-black ordering: a new approach. *Numerical Algorithms*, 7:295–324, 1994.

Cette première partie est consacrée à des travaux relativement anciens, qui ont portés sur l'étude de préconditionnements de systèmes linéaires bien adaptés à des architectures parallèles ou massivement parallèles. Nous considérons donc le problème modèle du type :

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left(a\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(b\frac{\partial u}{\partial y}\right) = f \text{ dans } \Omega, \quad (1)$$

$$u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad (2)$$

où Ω est le carré unité $]0,1[^2$, a et b sont deux fonctions à valeurs strictement positives éventuellement discontinues, et f est une fonction donnée.

Nous discrétisons (1)-(2) par une méthode de type différences finies "variationnelle". En effet, pour pouvoir convenablement prendre en compte les discontinuités des données, il est préférable d'utiliser une méthode de type élément fini. Nous avons choisi l'élément fini P_1 sur un maillage structuré, formé de triangles isocèles rectangles, avec deux triangles par maille. Ainsi, on suppose implicitement que les sauts éventuels des fonctions a et b se produisent uniquement à l'interface horizontale ou verticale entre deux triangles. De cette façon, on aboutit bien à un schéma à cinq points de type différences finies.

On appelle h le pas du maillage, supposé uniforme. Si on note m le nombre d'inconnues dans chaque direction, i. e. $h = 1/(m+1)$, on obtient le système linéaire

$$Au_h = f_h, \quad (3)$$

où A est une matrice de taille $n \times n$, avec $n = m^2$, symétrique définie positive. Cette propriété de la matrice A nous conduit naturellement à employer la méthode itérative de résolution du gradient conjugué, introduite par Hestenes et Stiefel [22], pour calculer u_h.

Comme mentionné dans l'introduction, le but est d'obtenir à la fois une vitesse de convergence rapide et un taux de parallélisation élevé. Outre la méthode du gradient conjugué préconditionné (GCP en abrégé), nous avons retenu une méthode itérative de résolution hybride (HYB en abrégé). Celle-ci est définie à partir du gradient conjugué et de la méthode de capacitance matricielle [33], et elle repose également sur des préconditionnements matriciels de A.

La méthode de capacitance a été étudiée par Buzbee *et al* dans [5]. Brièvement, on appelle B une matrice $n \times n$ non singulière et S la matrice de prolongement $n \times q$ (avec $q < n$) telles que, en notation par blocs :

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \text{ et } S = \begin{pmatrix} 0 \\ I_q \end{pmatrix}.$$

Par convention, on suppose que seules les q dernières lignes de B sont différentes de celles de A. On appelle matrice de capacitance la matrice $q \times q$ suivante $C = S^T A B^{-1} S$. Par construction, cette matrice est non singulière. On peut alors remplacer (3) par

$$\begin{aligned} Bv &= k, \text{ avec } k_1 = (f_h)_1, \; k_2 = 0, \\ Cw &= g, \text{ avec } g = S^T(f_h - Av), \\ Bx_h &= k + Sw. \end{aligned} \tag{4}$$

Sous réserve que $S^T B^{-1} S$ est symétrique définie positive (voir [33]), on peut remplacer la résolution de $Cw = g$ par une méthode itérative (dans $\mathbf{R}^q$) nécessitant une résolution d'un système linéaire de matrice B à chaque itération.

Dans les deux cas (GCP ou HYB), on doit donc construire un préconditionnement B pour lequel la résolution de

$$Bx = k \tag{5}$$

est peu coûteuse sur une machine d'architecture parallèle. Pour définir les préconditionnements, nous commençons par utiliser une méthode de type décomposition de domaine sans recouvrement, pour laquelle Ω est découpé en bandes ou en carrés. Le but étant ici de résoudre des problèmes

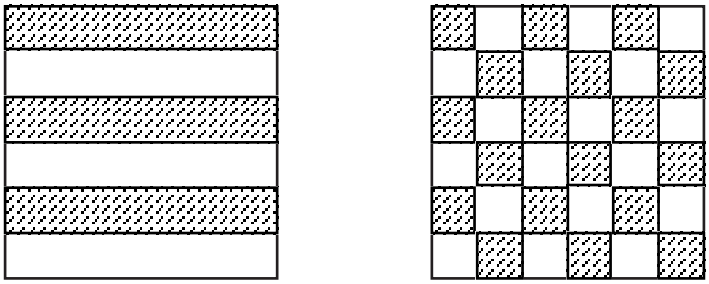

Figure 1: Découpages.

de grande taille, nous avons privilégié des préconditionnements matriciels "creux", c'est-à-dire requérant peu de place mémoire. Plus loin, nous avons considéré un préconditionnement basé sur une numérotation rouge/noir des inconnues (voir paragraphe 1.4), où l'accent est plus particulièrement mis sur la vitesse de convergence.

1.1 Découpage par bandes

Dans ce paragraphe, nous considérons un découpage de Ω tel celui de gauche de la figure 1, en n_0 bandes. A partir de ce découpage, Dryja et Proskurowski [9] ont introduit un préconditionnement B (pour la méthode HYB). Cette matrice B correspond au problème suivant : on conserve (1) à l'intérieur des bandes et (2) sur $\partial\Omega$, avec une condition de transmission de Dirichlet aux interfaces des bandes blanches et une condition aux limites de Neumann homogène aux interfaces des bandes noires. Nous avons choisi, dans [T1] et [T3], de remplacer cette seconde condition par une condition mêlée de Neumann-Dirichlet :

$$\mu\, u + \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \mu \geq 0. \tag{6}$$

Nous appelons B_1 le préconditionnement obtenu. Seules les lignes correspondant aux nœuds de l'interface, ou séparateurs, diffèrent. La matrice de capacitance ainsi définie est de taille $p_1 \times p_1$, où $p_1 = m\,(n_0 - 1)$ est égal au nombre de séparateurs. Bien évidemment, B_1 n'est pas une matrice symétrique, mais $S_1^T B_1^{-1} S_1$ est symétrique définie positive, ce qui nous permet d'appliquer la méthode hybride. De plus, B_1 répond aux critères énoncés relatifs à la résolution de (5), puisqu'elle se résume à :

(a) une résolution en parallèle sur les ensembles bandes noires + séparateurs adjacents.

(b) une résolution en parallèle sur les bandes blanches.

D'après [33], la vitesse de convergence de HYB dépend de $\kappa(C_1)$, le nombre de conditionnement de C_1, qui doit être le plus petit possible. Nous avons étudié celui-ci de deux manières différentes : pour le produit $n_0 h$ donné ou pour n_0 donné, par une analyse de Fourier de la matrice de capacitance [6].

Si $n_0 h$ est donné, le nombre de lignes par bandes $K = (m + 1 - n_0)/n_0$ est constant. Nous avons démontré dans [T1] que

Théorème 1.1 *Pour $\mu \geq 1$,*

$$\kappa(C_1) \leq C(a,b)\,(K+1)\,(1 + \frac{1}{\mu\, h})\, n_0^2.$$

Corollaire 1.1 *Si de plus $\mu\, h$ est constant, alors $\kappa(C_1)$ croît exactement comme n_0^2.*

Théorème 1.2 *Pour une condition de Dirichlet homogène et a et b constants, on a*

$$\kappa(C_1^{\infty}) = \frac{(2 + a/b)}{\pi^2}\,(K+1)\, n_0^2.$$

Supposons maintenant que n_0 soit fixé à 2 et que a et b soient constants. Nous avons prouvé dans [T1] que

Théorème 1.3

$$\begin{aligned} \kappa(C_1) < 2,\ \forall h \qquad & si\ 0 \leq \mu \leq 2. \\ \lim_{h \to 0} \kappa(C_1) = (1 + \mu/2) \qquad & si\ 2 < \mu. \end{aligned}$$

Pour n_0 donné, il nous a donc semblé intéressant d'étudier l'existence d'une valeur optimale du paramètre μ. Tout d'abord, nous avons constaté numériquement que, pour tous les cas bi- ou mono-dimensionnels traités, $\mu = n_0$ correspond au choix optimal, avec en particulier un nombre de conditionnement $\kappa(C_1)$ (numériquement) indépendant du pas du maillage.

Une étude bidimensionnelle théorique s'étant avérée trop complexe, nous avons retenu le problème monodimensionnel (étude non publiée)

$$-u'' = f \text{ dans } \Omega, \text{ avec } u(0) = u(1) = 0. \tag{7}$$

C_1 est alors une matrice de taille $(n_0 - 1) \times (n_0 - 1)$. Pour $n_0 = 4$, on vérifie que

$$C_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\tilde{\mu}} & -\frac{\tilde{\mu}}{\delta} & -\frac{1}{\delta} \\ -\frac{1}{\tilde{\mu}} & \frac{2\tilde{\mu}-1}{\delta} & \frac{2-\tilde{\mu}}{\delta} \\ 0 & \frac{2-\tilde{\mu}}{\delta} & \frac{2\tilde{\mu}-1}{\delta} \end{pmatrix},\ \tilde{\mu} = 1 + \mu/4,\ \delta = \tilde{\mu}^2 - 1.$$

Une fois les valeurs propres calculées, on obtient aisément

$$\kappa(C_1) = \frac{2\tilde{\mu} - 1 + \sqrt{2\tilde{\mu}^2 - 4\tilde{\mu} + 3}}{2\tilde{\mu} - 1 - \sqrt{2\tilde{\mu}^2 - 4\tilde{\mu} + 3}}.$$

Enfin, on démontre que cette fonction de $\tilde{\mu}$ admet un minimum unique pour $\tilde{\mu} = 2$ (i.e. $\mu = 4$), de valeur $1/2\,(\sqrt{3}+1)^2$. Pour $n_0 > 4$, des expériences numériques (calcul de valeurs propres sous *Matlab*) nous ont également permis de constater que $\mu = n_0$ est le choix optimal.

Indépendamment, et pour confirmer ses résultats, Tang [38] et Kim *et al* [26] ont étudié la résolution du problème unidimensionnel (7) par une méthode de décomposition de domaine, avec recouvrement. Dans ces articles, la condition de raccord est

$$\omega_k\, u + (1-\omega_k)\frac{\partial u}{\partial n} = \omega_l\, u + (1-\omega_l)\frac{\partial u}{\partial n}, \quad (\omega_i)_{1\le i\le n_0} \text{ donnés.}$$

Pour $n_0 \le 4$, dans les deux cas (pages 584-585 de [38] et Théorème 2.1 de [26]), la valeur optimale des paramètres $(\omega_i)_{1\le i\le n_0}$ devient $\omega_i = n_0/(1+n_0)$, lorsque le recouvrement "tend vers 0" : on retrouve la valeur optimale $\mu_i = n_0$.

Au paragraphe 1.3, nous présentons les conclusions numériques relatives au préconditionnement obtenu après découpage en bandes du domaine, pour $\mu = n_0$.

1.2 Découpage par boîtes

Nous envisageons maintenant le cas d'un découpage de Ω en n_0^2 carrés (voir le découpage de droite de la figure 1). Proskurowski *et al* ([10], [32]) ont introduit et étudié une méthode HYB semblable à celle initialement proposée pour les bandes, avec une condition de transmission de type Dirichlet sur les boîtes blanches et une condition aux limites de type Neumann homogène sur les boîtes noires. Dans [T2], nous avons remplacé cette condition aux limites par (6).

On appelle B_2 le préconditionnement ainsi construit. Les nœuds pour lesquels les lignes de A et celles de B_2 ne sont pas identiques sont toujours les nœuds de l'interface, qui sont cette fois classés en deux catégories distinctes : les séparateurs et les nœuds de croisement. La matrice de capacitance C_2 est de taille $p_2 \times p_2$, avec $p_2 = (2m - n_0 + 1)(n_0 - 1)$.

Pour résoudre (5) avec B_2, on procède en deux étapes, semblables à (a) et (b). Malheureusement, (a) devient

(a') une résolution sur l'ensemble boîtes noires + séparateurs + nœuds de croisement,

et n'est plus parallèle. Pour remédier à cette difficulté, on introduit un second niveau de préconditionnement, i. e. un préconditionnement de B_2, qui correspond à des sous-problèmes (sur les ensembles boîtes noires + séparateurs adjacents) découplés entre eux. Dans ce cas, la seconde matrice de capacitance, C_c, définie sur les nœuds de croisement, est de petite taille, i. e. $n_c \times n_c$ avec $n_c = (n_0-1)^2$. En conséquence, nous avons retenu une utilisation directe de (4) qui transforme donc (a') en

(a'$_1$) deux résolutions en parallèle sur les ensembles boîtes noires + séparateurs adjacents,

(a'$_2$) une résolution sur l'ensemble des nœuds de croisement.

Dans [T2], nous avons procédé à un certain nombre de tests numériques qui nous ont permis d'arriver aux conclusions suivantes :

> La valeur optimale de μ est 0, i. e. on retrouve la méthode préconisée par Proskurowski *et al.*
>
> La méthode la plus efficace pour résoudre le problème linéaire de matrice C_c est la méthode GCP avec pour préconditionnement la diagonale de C_c.

Dans le prochain paragraphe, nous présentons les conclusions numériques relatives aux tests effectués avec le préconditionnement B_2, pour $\mu = 0$.

1.3 Comparaison numérique des méthodes HYB

Nous reprenons des résultats de [T2] et [T3].

Nous avons implémenté les méthodes HYB des paragraphes précédents, appelées HYB$_1$ et HYB$_2$, ainsi que la méthode GCP avec préconditionnement diagonal, notée GCPD. Nous avons comparé

ces trois méthodes sur une machine parallèle à mémoire distribuée à vingt processeurs *Intel 80386*, le *Sequent Symmetry S81*, et sur une machine superscalaire, l'*IBM RS6000/560* munie d'un processeur *RisC6000*.

Nous avons sélectionné trois problèmes de type (1)-(2) avec des coefficients a et b discontinus.

Notons que nous étudions des préconditionnements "creux" : plus précisément, nous avons imposé un critère (pour les méthodes HYB) de dépendance linéaire du stockage mémoire en fonction du nombre total d'inconnues n. Dans le cas où la résolution sur chaque bande (ou boîte) est faite à l'aide d'une factorisation LU de la matrice locale, nous avons montré (voir [T1]) que ceci est équivalent à prendre une valeur de n_0 proportionnelle à $m+1$: $n_0 = (m+1)/4$ pour les bandes et $n_0 = (m+1)/8$ pour les boîtes.

Le critère d'arrêt pour les méthodes itératives a été fixé à une réduction de la norme du résidu d'un facteur 10^6. Pour un second membre "exact" ($\underline{f} = A\underline{u}$), nous avons vérifié que toutes les méthodes donnaient des résultats équivalents en terme de précision numérique de la solution calculée.

Nous avons retenu les quatre critères de comparaison énumérés ci-après :

(c_1) Nombre total d'opérations flottantes pour résoudre (3).

(c_2) Nombre d'opérations flottantes par seconde.

(c_3) Taux de parallélisation sur le Sequent.

(c_4) Temps total d'exécution.

De nos comparaisons, nous avons pu tirer les conclusions numériques suivantes :

- Les méthodes HYB sont toujours plus économiques selon (c_1).
- (c_2) est égal à 25 MFLOPs[1] pour GCPD, 24 pour HYB_1 et 20 pour HYB_2 sur RS6000.
- (c_3) est pratiquement égal à 100% pour GCPD, 99% pour HYB_1 et 97% pour HYB_2.
- Selon (c_4), HYB_1 est, dans tous les cas, au moins quatre fois plus rapide que GCPD.
- Selon (c_4), HYB_2 est, dans tous les cas, au moins deux fois plus rapide que GCPD.

Ainsi, bien que GCPD soit intrinsèquement la méthode la plus parallèle, nous avons constaté qu'une méthode HYB peut s'avérer beaucoup plus efficace.

1.4 Renumérotation Rouge/Noir

Dans ce paragraphe, nous examinons un autre type de préconditionnement matriciel, basé sur une numérotation rouge/noir des nœuds. Notons qu'Axelsson et Eijkhout [1] ont montré que ce préconditionnement peut être considéré comme étant issu d'une méthode multiniveaux, ce qui permet d'envisager une mise en œuvre sur machine parallèle. Dans ce qui suit (cf. [T4]), nous avons porté notre attention sur les aspects théoriques, et nous mentionnons très brièvement quelques résultats numériques obtenus sur une machine séquentielle.

Par construction, on sait que A est une matrice symétrique définie positive de taille $n \times n$. On peut donc construire sa factorisation $\tilde{L}\tilde{D}\tilde{L}^T$, où $\tilde{L}$ est une matrice triangulaire inférieure et $\tilde{D}$ est une matrice diagonale.

Ici, nous utilisons un mode de construction de $\tilde{L}$ colonne par colonne. Cette méthode est essentiellement liée au graphe de la matrice A. Rappelons que celui-ci est constitué de n sommets $\{1, \cdots, n\}$, et est tel qu'il existe une arête entre deux sommets i et j si et seulement si $a_{ij} \neq 0$ (ou, de manière équivalente, $a_{ji} \neq 0$). La factorisation colonne par colonne de A revient à enlever successivement tous les sommets. On construit ainsi une suite de graphes à $n-1$ sommets, puis $n-2$ sommets, etc. Au cours de ce processus, lorsqu'on enlève le sommet i, on ajoute une arête entre deux sommets k et l si et seulement si (i,k) et (i,l) sont des arêtes du graphe précédent. Comme il s'agit de factoriser une matrice, à chaque arête créée correspond un élément non nul

[1] 1 MFLOPs = 10^6 opérations flottantes par seconde.

dans la partie de la matrice encore à traiter. Enfin, à chaque arête éliminée (celles reliées à i), on adjoint un élément non nul dans $\tilde{L}$, et on calcule d_{ii}.

Dans la procédure de factorisation ci-dessus, la numérotation des sommets joue un rôle central. On constate en effet aisément que choisir une numérotation fixe le nombre d'arêtes créées au cours du processus. En termes matriciels, cela fixe la quantité d'information à stocker.

Dans le même ordre d'idée, on peut décider *a priori* de ne conserver que certaines arêtes (ou éléments non nuls), pour contrôler le stockage mémoire. On n'arrive plus alors à une factorisation exacte de A, mais à celle d'une matrice $M = LDL^T$ "plus ou moins" proche de A. Entre autres, ceci revient à s'intéresser à la construction de préconditionnements matriciels de A selon cette méthode [12]. On construit alors une décomposition de A sous la forme $LDL^T - R$, où L est toujours construite colonne par colonne. Quant à la matrice R, on lui assigne à chaque étape les éléments non nuls que l'on a choisi de ne pas conserver.

La conjugaison de ces deux idées a été exploitée par Duff et Meurant [11] qui ont étudié l'influence de la renumérotation pour la construction de préconditionnements matriciels à structure donnée.

Ci- après, notre travail ([T4]) a porté sur deux préconditionnements issus d'une renumérotation rouge/noir des nœuds. Si on considère l'ensemble des nœuds comme une grille m par m où chaque nœud est indexé par un couple $(i_1, i_2)_{1 \leq i_1, i_2 \leq m}$, on commence par numéroter les nœuds tels que $i_1 + i_2 \equiv 1\,(mod\ 2)$: on obtient l'ensemble $R^{(1)}$. Les nœuds restants appartiennent à $N^{(1)}$. Parmi les nœuds de $N^{(1)}$, on construit $R^{(2)}$ en numérotant ceux tels que $i_1 \equiv 1\,(mod\ 2)$. Parmi les nœuds non numérotés, $N^{(2)}$, on sélectionne ceux tels que $i_1 + i_2 \equiv 2\,(mod\ 4)$ pour $R^{(3)}$. Si on appelle $N^{(3)}$ le reliquat, on obtient $R^{(4)}$ en prenant ceux de $N^{(3)}$ tels que $i_1 \equiv 2\,(mod\ 4)$. Et ainsi de suite jusqu'à, soit qu'il ne reste qu'un nœud, soit qu'on arrête le processus après K étapes, en numérotant directement tous les nœuds de $N^{(K)}$. Voici un exemple de renumérotation pour deux étapes.

29	61	30	62	31	63	32	64
45	25	46	26	47	27	48	28
21	57	22	58	23	59	24	60
41	17	42	18	43	19	44	20
13	53	14	54	15	55	16	56
37	9	38	10	39	11	40	12
5	49	6	50	7	51	8	52
33	1	34	2	35	3	36	4

Figure 2: Renumérotation pour $m = 8$ et $K = 2$.

A partir de la renumérotation spécifiée, nous définissons la structure des arêtes à conserver. Pour $k < K$, si on part d'un schéma à cinq points dans $N^{(k)}$, il est aisé de voir que l'élimination des nœuds de $R^{(k+1)}$ conduit à un schéma à neuf points sur $N^{(k+1)}$.

Pour le premier préconditionnement, M_1, nous ne conservons que les arêtes correspondant à un schéma à cinq points dans $N^{(k+1)}$ (voir la figure 3).

Pour le second préconditionnement, M_2, nous retenons les arêtes correspondant à un schéma à cinq points dans $N^{(k+1)}$, $N^{(k+2)}$, $\cdots$, ou $N^{(K)}$ (voir la figure 4).

Enfin, on procède pour M_1 et pour M_2 a une factorisation exacte sur $N^{(K)}$.

Par ailleurs, pour améliorer la qualité des préconditionnements, nous en avons conçu de type modifié : la structure reste inchangée, mais on modifie M et R ($A = M - R$) de telle sorte que l'on ait $\sum_{1 \leq j \leq n} m_{ij} = \sum_{1 \leq j \leq n} a_{ij}$, pour $1 \leq i \leq n$. Gustafsson [18] et Meijerink et Van der Vorst [28] ont montré que cette modification permet en effet d'accroître la vitesse de convergence de la méthode GCP.

Le préconditionnement M_2 ainsi défini a été introduit par Brand et Heinemann [4], et analysé par Brand [3].

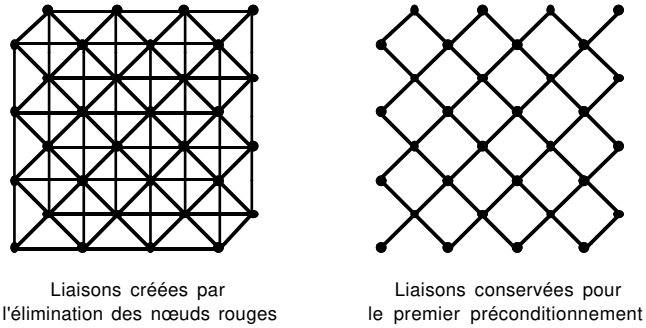

Figure 3: Structure pour M_1.

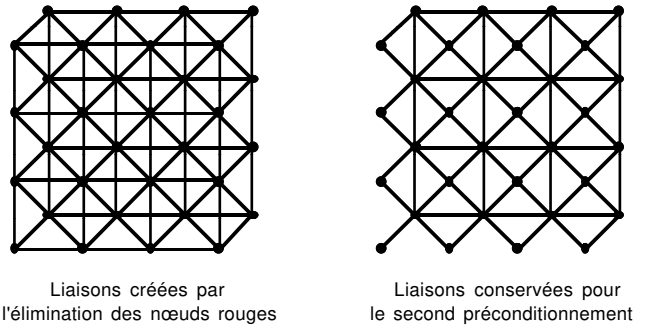

Figure 4: Structure pour M_2.

Nous avons établi quelques résultats théoriques (voir [T4]) sur les nombres de conditionnement $\kappa(M_i^{-1}A)_{1\leq i\leq 2}$, à l'aide une fois encore de la méthode d'analyse développée dans [6].

Tout d'abord, nous avons prouvé que lorsque le nombre d'étapes K est égal à $E(\frac{1}{3}\log_2(n)+\frac{4}{3})$, les préconditionnements restent "creux", au sens où le stockage mémoire reste alors proportionnel à n : plus précisément, nous avons montré qu'il est strictement inférieur à $6n$. Ceci relaxe la condition imposée par Brand [3], $E(\frac{1}{2}\log_2(n))$, déterminée en bornant par $O(n)$ le nombre d'opérations nécessaires à la construction du préconditionnement. Dans notre cas, il passe à $O(n^{4/3})$. Dans la suite, $K = E(\frac{1}{3}\log_2(n) + \frac{4}{3})$.

Pour le problème (1) avec $a = b = 1$, et une condition aux limites périodique, nous avons prouvé que

Théorème 1.4 $\kappa(M_1^{-1}A) \leq 2^{5/3}\, n^{1/3}$.

Pour le problème (1) avec $a = b = 1$, et la condition aux limites (2), nous avons prouvé que

Théorème 1.5 $\kappa(M_1^{-1}A) \leq 3\, n^{1/3}$, $\kappa(M_2^{-1}A) \leq 2\, n^{1/6}$.

Pour $\kappa(M_2^{-1}A)$, ce résultat est meilleur que celui obtenu dans [3], $\kappa(M_2^{-1}A) \leq 2\, n^{1/4}$. Ainsi, chaque approche trouve sa justification : on troque un coût de calcul initial de M_2 plus élevé pour une meilleure vitesse de convergence.

La supériorité du second préconditionnement sur le premier a été également mise en évidence numériquement dans [T4].

Notons qu'il est possible d'améliorer le majorant, pour le second problème, portant sur $\kappa(M_2^{-1}A)$, grâce aux résultats récents de Notay et Ould Amar [30]. En effet, ils ont prouvé que

$$\kappa(M_2^{-1}A) \leq 3\,(\sqrt{5}-1)^{K-1}.$$

En prenant pour K la valeur $E(\frac{1}{3}\log_2(n) + \frac{4}{3})$, nous trouvons alors

Corollaire 1.2 $\kappa(M_2^{-1}A) \leq 4\, n^{\frac{1}{3}\log_2(\sqrt{5}-1)}$, *avec* $\frac{1}{3}\log_2(\sqrt{5}-1) \sim 0.102$.

2 Partitionnement et contraction

Nous résumons les travaux suivants (en respectant l'ordre chronologique de leur réalisation) :

[T5] On the optimality of the median cut spectral bisection graph partitioning method. *SIAM J. Sci. Comput.*, 18:943–948, 1997.

[T6] Recursive partitioning methods and greedy partitioning methods: a comparison on finite element graphs. Rapport Technique CAM 94-09, UCLA, Dept of Mathematics, Los Angeles, CA 90024-1555, U.S.A., 1994.

[T7] On the influence of the partitioning schemes on the efficiency of overlapping domain decomposition methods. Dans *Fifth symposium on the frontiers of massively parallel computation*. IEEE, IEEE Computer Society Press, 1995.

[T8] On the validity of a front-oriented approach to partitioning large sparse graphs with a connectivity constraint. *Numerical Algorithms*, 12:193–214, 1996.

[T9] Does contraction preserve triangular meshes? *Numerical Algorithms*, 13:201–223, 1996.

[T5] a été réalisé en commun avec T. F. Chan et W. K. Szeto.
[T6], [T7] et [T9] ont été réalisés en commun avec F. Lamour.
[T8] a été réalisé en commun avec B. F. Smith et F. Lamour.

Dans cette deuxième partie, nous considérons deux problèmes "amonts", étroitement liés à la mise en œuvre de méthodes multiniveaux. Tout d'abord, celui du découpage du maillage, puis celui de la génération de maillages grossiers.

2.1 Partitionnement

Nous étudions ici le problème plus général de partitionnement d'un graphe. Comme nous l'avons expliqué dans l'introduction, cette approche permet de s'affranchir de la dimension géométrique du domaine. Cependant, il existe des approches au découpage de maillage essentiellement basées sur la représentation géométrique. Par exemple, celle proposée par Farhat et Lesoinne [14], qui repose sur un découpage selon les axes d'inertie principaux du maillage. Ou également celle développée par Teng [39], basée sur les familles de voisinages (disques ou sphères) autour des nœuds et sur la recherche de séparateurs de taille estimée *a priori*.

Il est possible de représenter un certain nombre de problèmes informatiques par des graphes : un sommet correspond à une tâche donnée et une arête entre deux sommets schématise les échanges d'information. Le graphe est ensuite partitionné s'il est nécessaire de décomposer le problème d'origine en un ensemble de petits sous-problèmes communiquant aussi peu que possible entre eux.

Dans le cas qui nous intéresse, on souhaite résoudre un problème numérique sur une machine multiprocesseurs à mémoire distribuée. Partitionner le graphe permet donc, si le problème d'origine est trop volumineux, de répartir les données sur les processeurs. Simultanément, le but est de pouvoir résoudre les sous-problèmes en parallèle : à cet effet, il s'agit de réduire le plus possible les communications entre processeurs.

Ainsi, les deux ingrédients du partitionnement de graphe sont :

- sous certaines **contraintes** (mémoire locale à remplir "au mieux")

- **minimisation** d'un critère (les communications).

Il existe diverses formulations mathématiques du problème de partitionnement de graphe, que nous supposerons non orienté dans la suite. Nous présentons ci-après la *p arête-partition*, c'est-à-dire une partition du point de vue des arêtes, qui servira de base aux résultats énoncés dans cette partie.

Soit $G = (V, E)$ un graphe, où V est l'ensemble des sommets et E celui des arêtes. On appelle N le nombre de sommets et M le nombre d'arêtes. Le *degré* d'un sommet v, noté $d(v)$, est égal au nombre de ses *voisins*, i. e. les sommets w tels que (v, w) appartient à E. Enfin, d est le *degré moyen* d'un sommet dans G, soit $d = 2M/N$. Dans la suite, on note $|X|$ le cardinal d'un ensemble X.

La p arête-partition, pour $p \geq 2$, est une partition de V en p sous-ensembles disjoints $V_1, V_2, \cdots, V_p$ tels que :

- $V = \bigcup_{k=1}^{k=p} V_k$,
- $|V_k| \approx |V_l|$ pour $k \neq l$,
- $|E_0|$ est aussi petit que possible, avec $E_0 = E \cap \bigcup_{k \neq l} V_k \times V_l$.

En d'autres termes, E_0 est l'ensemble des arêtes "coupées" par la partition de V. La résolution exacte d'un tel problème n'est pas envisageable, car on peut montrer qu'il est NP-complet. Il est donc nécessaire, une fois le problème posé, de définir une heuristique qui permettra de résoudre de manière approchée celui-ci.

Nous allons décrire deux types d'heuristiques, les unes reposant sur l'exploitation de la globalité de l'information disponible sur le graphe (méthodes "globales"), et les autres sur un algorithme de déplacement de proche en proche dans le graphe (méthodes "locales").

Notons que pour utiliser ces méthodes sur un graphe issu d'un maillage, on peut raisonner de deux façons distinctes. Soit on partitionne les nœuds du maillage : les sommets du graphe sont les nœuds et les arêtes sont celles du maillage. On parle alors de graphe *primal*. Soit on partitionne les éléments du maillage : les sommets du graphe sont dans ce cas les éléments et les arêtes correspondent à la connectivité entre éléments (nœud, ou arête, ou face, commun). Dans ce dernier cas, on parle de graphe *dual*.

2.1.1 Méthodes globales

Nous commençons par étudier la 2 arête-partition, puis nous généralisons la méthode au cas d'une p arête-partition, pour p quelconque.

Bissection spectrale L'outil de départ est la *matrice de Laplace* L du graphe de taille $N \times N$ qui est définie par :

$$l_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{si } (v_i, v_j) \in E \\ d(v_i) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{8}$$

En quelque sorte, c'est la notion "réciproque" de celle du graphe d'une matrice à structure symétrique (voir le paragraphe 1.4). De par sa définition, L est une matrice semi-définie positive. De plus on peut aisément prouver que le nombre de valeurs propres nulles est égal au nombre de composantes connexes du graphe G [29]. Dans ce paragraphe, nous réalisons une *bissection* du graphe, i. e. une 2 arête partition : $V = V_1 \cup V_2$. Pour cela, on définit le vecteur associé $q \in D$, avec $D = \{(d_i)_{1 \leq i \leq N}, d_i = \pm 1\}$, et tel que $v_i \in V_1$ si et seulement si $q_i = 1$. De manière simple, on peut voir que :

$$|E_0| = \frac{1}{4} \sum_{(v_i, v_j) \in E} (q_i - q_j)^2 = \frac{1}{4}(q, Lq)_2.$$

La contrainte d'équilibre (on suppose que N est pair) est satisfaite si de plus $q \in B$, avec $B = \{(b_i)_{1\leq i\leq N}, \sum_i b_i = 0\}$. Ceci posé, minimiser le nombre d'arêtes coupées $|E_0|$ sous la contrainte d'équilibre $|V_1| = |V_2|$ revient donc au problème de minimisation de

$$\frac{1}{4}(q, Lq)_2, \text{ pour } q \in D \cap B. \tag{9}$$

A notre connaissance, cette formulation a été proposée et étudiée par Hall [19]. La minimisation de (9) demeurant bien entendu un problème NP-complet, on choisit de relaxer la contrainte discrète $q \in D$ et de la remplacer par $||q||_2^2 = N$, où $||\cdot||_2$ est la norme l_2 associée au produit scalaire $(\cdot,\cdot)_2$. Supposons que G est connexe. On obtient alors :

$$\min_{q\in B\cap D} \frac{1}{4}(q, Lq)_2 \geq \min_{q\in B, ||q||_2^2=N} \frac{1}{4}(q, Lq)_2 = \frac{1}{4}(x^F, Lx^F)_2 = \frac{N}{4}\lambda^F, \tag{10}$$

où λ^F est la plus petite valeur propre non nulle et x^F le vecteur propre associé, de norme $||x^F||_2 = \sqrt{N}$. Cette solution réelle, encore appelée vecteur de Fiedler [16], permet de déterminer une solution approchée par la méthode de la *coupure médiane*. En effet, ayant déterminé la valeur médiane x_m^F des composantes de x^F, on pose :

$$q_i^m = \begin{cases} -1 & \text{si } x_i^F < x_m^F \\ +1 & \text{si } x_i^F > x_m^F \\ \pm 1 & \text{si } x_i^F = x_m^F \text{ (pour respecter l'équilibre).} \end{cases} \tag{11}$$

La bissection se résume donc à :

(a) calculer le vecteur x^F,

(b) déterminer la valeur médiane x_m^F, puis assigner les sommets selon (11).

Le vecteur de coupure médiane q^m possède les propriétés suivantes, mises en évidence par Fiedler [16] :

- Si G est connexe, un des deux sous-graphes $G_i = (V_i, (V_i \times V_i) \cap E)$ l'est aussi.
- Si de plus x^F possède exactement $N/2$ composantes positives et $N/2$ composantes négatives, les deux sous-graphes sont connexes.

Par définition, x^F minimise le critère relaxé (10). Ceci étant, on ne connaît pas la qualité de la partition induite par q^m. Dans [T5], nous avons prouvé que, si on appelle $||\cdot||_s$ la norme l_s pour $s \geq 1$, on a le

Théorème 2.1 *Pour tout vecteur z de $\mathbf{R}^N$, soit p^m le vecteur de coupure médiane induit par z. Alors*

$$||z - p^m||_s = \min_{p\in D\cap B} ||z - p||_s.$$

En particulier, q^m est le vecteur de $D\cap B$ le plus proche de x^F en norme l_s. Ainsi, il est raisonnable de penser que, x^F minimisant (10), la qualité de la bissection associée à q^m est bonne.

Par ailleurs, nous avons étendu ce résultat d'optimalité au cas de bissections non équilibrées, c'est-à-dire avec $|V_1| = N_1$, pour $0 < N_1 < N/2$. On note dans ce cas $B_1 = \{(b_i)_{1\leq i\leq N}, \sum_i b_i = N - 2N_1\}$. Dans [T5], nous avons montré le

Théorème 2.2 *Pour tout vecteur z de $\mathbf{R}^N$, soit p^1 le vecteur de coupure, avec $|V_1| = N_1$, induit par z. Alors*

$$||z - p^1||_s = \min_{p\in D\cap B_1} ||z - p||_s.$$

Récemment, Pothen [31] a montré qu'un résultat d'optimalité tout à fait similaire peut être prouvé (pour une bissection équilibrée ou non), à partir du formalisme développé par Rendl et Wolkowicz [34].

Maintenant que les outils de base (8)-(11) sont définis, passons à une heuristique de résolution du problème général de la p arête-partition.

Bissection spectrale recursive Comme la plupart des méthodes globales, l'approche développée par Simon [36] est récursive : il s'agit de la bissection spectrale récursive (RSB en langue anglaise). En fait, une fois le graphe original G découpé en deux sous-graphes G_1 et G_2, on applique de nouveau la même procédure à chacun d'entre eux, et ainsi de suite.

Comme on peut aisément le constater, le coût de cette méthode est dominé par les étapes (a), c'est-à-dire la détermination du vecteur propre associé à la plus petite valeur propre strictement positive de la matrice de Laplace du graphe considéré. Usuellement, on utilise une méthode itérative de type Lanczos [36].

Pour réduire le coût de la méthode par rapport à l'algorithme initialement proposé, Barnard et Simon [2] ont proposé un autre algorithme pour le calcul du vecteur propre x^F. Il repose sur la génération d'une suite de graphes "grossiers" $(G^l)_{l=0,\cdots,L}$ ayant de moins en moins de sommets, avec $G^0 = G$. Sur ces graphes, des approximations de x^F sont successivement calculées, en commençant par $x^{F,L}$, puis $x^{F,L-1}$ et ainsi de suite jusqu'à $x^{F,0} = x^F$: sur le graphe G^l, le vecteur calculé au niveau précédent, $x^{F,l+1}$, est utilisé comme choix initial pour déterminer $x^{F,l}$ par la méthode itérative. L'algorithme résultant est appelé SP_1 dans la suite.

Parallèlement, Hendrickson et Leland [21] ont développé une méthode optimisée à partir de RSB, notée SP_2. Elle s'appuie elle aussi sur une suite de graphes de plus en plus "grossiers" $(G^l)_{l=0,\cdots,L}$. Ici, on détermine directement le vecteur de partition q^m. Pour cela, on calcule toujours $x^{F,L}$ sur le graphe le plus grossier, mais on choisit de propager directement la bissection obtenue sur G^L, i. e. $q^{m,L}$, aux graphes G^{L-1}, G^{L-2}, etc., jusqu'à $G^0 = G$, par expansion.

Toutes les heuristiques de partitionnement, après que la partition a été construite, utilisent une méthode de post traitement qui permet d'améliorer la qualité de celle-ci. Généralement, ces post traitements procèdent par échanges d'ensembles de sommets entre les sous-ensembles $(V_i)_{1\leq i\leq p}$. La première de ces méthodes a été conçue par Kernighan et Lin [25]. Ce post traitement, qui procède par l'évaluation d'échanges successifs de couples de sommets entre deux sous-ensembles, est celui retenu par Barnard et Simon pour SP_1. D'autres méthodes ont été proposées, comme celle de Fiduccia et Mattheyses [15] qui permet de réduire la complexité de l'algorithme dû à Kernighan et Lin : pour ce faire, on évalue les échanges un sommet après l'autre. Enfin, Hendrickson et Leland [21] ont développé une version de [15] généralisée à un nombre arbitraire de sous-ensembles (et non plus uniquement deux), c'est-à-dire qu'un sommet peut *a priori* être réaffecté à plusieurs sous-ensembles. Ce post traitement est activé dans SP_2 uniquement au cours de la phase d'expansion, ce qui permet d'améliorer la qualité des partitions "grossières" sans qu'il soit trop couteux.

Au paragraphe 2.1.3, nous comparons les résultats obtenus à l'aide des deux heuristiques SP_1 et SP_2 suivies de leur post traitement, et notées SP_1^* et SP_2^*, grâce au code informatique fourni par leurs auteurs respectifs.

Pour conclure sur ce bref tour d'horizon des méthodes spectrales récursives, mentionnons qu'Hendrickson et Leland [20] ont également proposé un algorithme qui calcule les deux ou trois plus petites valeurs propres non nulles et les vecteurs propres associés de la matrice de Laplace, ce qui permet de réaliser directement un découpage des sommets du graphe en quatre ou en huit sous-ensembles. Ceci étant, voir [T6], le coût de ces algorithmes s'étant avéré prohibitif, nous ne mentionnons pas les résultats obtenus avec cette heuristique. Enfin, Karypis et Kumar [24] ont très récemment proposé un logiciel, METIS, basé sur la méthode multiniveaux de [21], dont le post traitement est une méthode de type Kernighan et Lin [25] qui prend uniquement en considération les échanges entre sommets à la frontière des sous-ensembles, comme dans [T8]. Cette heuristique ayant été proposée postérieurement à SP_1, SP_2, et à celle développée dans [T8], c'est la raison pour laquelle nous ne la considérons pas au paragraphe 2.1.3.

2.1.2 Méthodes locales

L'idée sous-jacente des méthodes de partitionnement locales est complètement différente de celle retenue pour les méthodes globales. En effet, selon cette deuxième approche, on construit les sous-ensembles itérativement. Chaque sous-ensemble est construit à partir d'un sommet initial donné, et les sommets sont ensuite accumulés en parcourant le graphe localement, i. e. arête par arête, en partant du sommet initial.

Farhat [13] a conçu une heuristique basée sur ce principe permettant de partitionner les maillages. Elle permet uniquement de partitionner le graphe dual. Pour construire le $k^{\text{ème}}$ sous-ensemble ($1 \leq k \leq p$), on utilise comme "sommet" de départ un nœud se trouvant à l'interface entre le dernier sous-ensemble construit et les sommets non encore assignés. Le processus se poursuit jusqu'à accumulation du nombre prescrit de sommets, i. e. $n = N/p$. Bien sûr, il peut se faire que tous les sommets d'une région du graphe soient assignés avant d'en avoir accumulé suffisamment pour construire le sous-ensemble V_k (on arrive au "bord" du graphe), auquel cas il est nécessaire de choisir un nouveau nœud de départ pour poursuivre et achever la construction de V_k. Concrètement, la connexité des sous-graphes construits n'est donc pas garantie.

Dans [T8], nous avons développé une heuristique locale, GP, qui permet au contraire de réaliser la partition d'un graphe connexe en p sous-graphes connexes, en essayant toujours de minimiser le nombre d'arêtes coupées. Pour parvenir à ce but, nous avons relaxé la contrainte stricte d'équilibre des sous-ensembles de sommets (dans un premier temps). Ensuite, nous avons défini un post traitement permettant à la fois d'équilibrer les sous-ensembles (si nécessaire) et d'améliorer la qualité de la partition en terme d'arêtes coupées.

Cette heuristique est essentiellement basée sur la notion de *front*. Pour ce faire, nous définissons une distance δ_G associée au graphe, où $\delta_G(v, w)$ est le nombre d'arêtes du plus court chemin qui relie v à w dans G. Si v et w n'appartiennent pas à la même composante connexe de G, on pose $\delta_G(v, w) = +\infty$. Pour un ensemble W de sommets, on peut en conséquence définir

$$F(W, k) = \{v \in V, \min_{w \in W} \delta_G(w, v) = k\},$$

qu'on appelle front à distance k de W dans G. Par définition, la notion de front est donc intrinsèquement liée à la connexité du graphe : en effet, on peut facilement montrer qu'un graphe G est connexe si et seulement si il existe un sous-ensemble connexe W_c de V tel que l'expansion par fronts, à partir de W_c, engendre V tout entier.

Ceci posé, on peut présenter GP brièvement (voir [T8]).

Tout d'abord, on commence par choisir un sommet au "bord" du graphe : pour un graphe issu d'un maillage, ceci correspond à la frontière. On construit ensuite le premier sous-ensemble à partir du sommet choisi grâce à une expansion par fronts. Pour les sous-ensembles suivants, on procède de manière concentrique, en s'appuyant sur le bord. Au cours du processus, une fois que tous les sommets du bord d'origine sont assignés, on peut définir un nouveau bord, comme étant l'ensemble des sommets non assignés qui sont voisins de sommets déjà assignés. De cette manière, on peut poursuivre la construction concentriquement. Par ailleurs, pour assurer la connexité des sous-ensembles, on choisit de réassigner au fur et à mesure les ensembles connexes de taille insuffisante : par principe, ils sont entourés de sous-ensembles (connexes) déjà construits, auxquels on réaffecte les sommets. En conséquence, on n'arrive donc pas nécessairement à une partition équilibrée.

Dans [T8], nous avons prouvé que GP permet toujours de construire p sous-graphes connexes (non nécessairement équilibrés) dès lors que le graphe initial est connexe. Si G est non connexe, on peut bien évidemment appliquer ce raisonnement sur chacune de ses composantes connexes. Une fois ce travail achevé, nous adjoignons un post traitement, baptisé *retrofitting* en langue anglaise, pour améliorer la qualité de la partition. Ce post traitement est composé de deux algorithmes simples. Le premier vise à éliminer les excroissances, i. e. les sommets rattachés à leur sous-ensemble

par une arête unique. Le second vise à équilibrer la partition en réaffectant des ensembles de sommets d'un sous-ensemble de taille trop importante vers un sous-ensemble voisin de taille insuffisante. Comme pour GP, on procède par fronts. Si on transfère des sommets de V_i vers V_j, on considère précisément ceux du premier front issu de V_j, i. e. $F(V_j, 1) \cap V_i$. Par principe, ce transfert a lieu uniquement si $V_i \setminus F(V_j, 1)$ reste connexe.

Dans le paragraphe suivant, nous comparons GP suivie de son post traitement, et nommée GP*, avec les méthodes globales récursives SP$_1^*$ et SP$_2^*$.

2.1.3 Comparaison des heuristiques de partitionnement

Tout d'abord, il est intéressant d'estimer la complexité de chaque heuristique. Comme précédemment mentionné, le coût des méthodes globales est dominé par le coût du calcul du vecteur de partition q^m (soit par l'intermédiaire de x^F pour SP$_1$, soit par expansion pour SP$_2$). Comme le calcul du vecteur propre est itératif ([2], [21]), il n'existe pas d'estimation précise de la complexité de cette étape. Par contre, les heuristiques étant récursives par définition, il est clair que le coût global de la partition en p sous-ensembles croît comme $\log_2 p$.

Concernant le coût des méthodes locales, notons à titre indicatif que Farhat l'a estimé à $O(p\,N)$ pour l'heuristique qu'il a proposé. Quant à GP, nous avons prouvé dans [T8] le résultat qui suit :

Théorème 2.3 *La complexité de GP est $O(M)$.*

En particulier, le coût est indépendant du nombre p de sous-ensembles.

Pour ce qui est du coût des différents post traitements, notons que, comme ils sont *a priori* itératifs, sans borne sur le nombre d'itérations, on ne peut estimer que le coût d'une étape.

Pour SP$_1^*$, qui repose sur [25], le coût d'une étape croît comme $O(N'^2 \log_2 N')$, où N' est le nombre de sommets des sous-ensembles considérés. Ce coût est très élevé, et c'est pourquoi il n'est utilisé que sur des sous-graphes pour lesquels N' est borné supérieurement. Pour SP$_2^*$, le post traitement est de complexité $O(p\,M)$.

Enfin, pour GP*, une étape du post traitement coûte $O(p + M_i + M_j)$, où M_i (respectivement M_j) est le nombre d'arêtes du sous-graphe $G_i = (V_i, (V_i \times V_i) \cap E)$ (resp. $G_j = (V_j, (V_j \times V_j) \cap E)$).

Avant de passer à une comparaison numérique, notons que Simon et Teng [37] ont prouvé quelques résultats concernant la qualité des méthodes de partitionnement récursives. Principalement, ils ont montré qu'un partitionnement, pour un graphe quelconque, obtenu après une suite de bissections optimales à chaque étape peut engendrer une partition finale de mauvaise qualité. Pour des graphes issus de maillage, ils ont par contre prouvé que le même mode de partitionnement donne un résultat éloigné au plus d'un facteur constant du nombre optimal d'arêtes coupées, sans pouvoir préciser, toutefois, ce facteur.

En ce qui concerne les expériences numériques réalisées, nous les avons scindées en deux parties.

Pour commencer, celles ayant trait à la partition obtenue ([T6], [T8]). Basiquement, la comparaison s'est faite selon trois critères :

(c_1) Déviation standard moyenne σ/n, avec $\sigma = \sqrt{1/p \sum_{i=1}^{i=p} (|V_i| - n)^2}$ et $n = N/p$.

(c_2) Pourcentage d'arêtes coupées, $|E_0|/M$.

(c_3) Temps de calcul de la partition sur processeur SuperSparc 50 MHz Viking TI.

Les graphes (de type primal) ont été générés à partir de maillages bi- ou tri-dimensionnels (triangles, tétraèdres ou hexaèdres), avec $8.10^3 \leq N \leq 259.10^3$ et $33.10^3 \leq M \leq 774.10^3$. Le nombre de sous-ensembles p est compris entre 4 et 1024, suivant la taille du graphe. Les conclusions sont les suivantes :

- (c_1) est bien sûr optimal pour SP_1^* et SP_2^*. Pour GP^*, on arrive à une valeur comprise entre 0% et 2%. Toutefois, lorsque le degré moyen d est élevé, i. e. pour les maillages tridimensionnels, σ/n est quasiment optimal avec GP^*. On peut expliquer ceci en notant que, si d est élevé, le graphe est "fortement connexe" et ainsi GP fournit directement des sous-ensembles quasi équilibrés.

- Concernant le pourcentage d'arêtes coupées (c_2), SP_1^* et SP_2^* sont plus performantes lorsque p est petit ($p \leq 64$), avec une meilleure qualité de partition pour SP_2^*. Pour des valeurs de p plus élevées ($p \geq 64$), les trois heuristiques produisent des résultats très similaires (écart relatif entre elles de 5%). De plus, le fait que le post traitement de GP ne prenne pas en compte la minimisation de $|E_0|/M$ (on assigne des fronts complets) n'a pas d'incidence sur la valeur de (c_2).

- Pour (c_3), les tests numériques rendent effectivement compte d'un accroissement du temps de calcul d'un facteur $\log_2 p$ pour les heuristiques récursives SP_1^* et SP_2^*. Pour GP, on obtient des temps indépendants de p. Pour GP^*, on arrive à des temps compris entre 1.25 et cinq fois le temps mis par GP seul. La vitesse de calcul de GP^* est de l'ordre de 100.10^3 arêtes par seconde pour les maillages bidimensionnels, et elle passe à environ 160.10^3 pour les maillages tridimensionnels. Si on compare les temps entre heuristiques globales et locales, on constate que SP_1^* et SP_2^* donnent des résultats équivalents, alors que GP^* est de 10 ($p \leq 16$) à 50 fois plus rapide que les deux autres heuristiques.

  Ce dernier point met clairement en évidence les avantages d'une méthode locale.

Dans un second temps [T7], nous avons utilisé ces heuristiques préliminairement à la résolution d'un problème elliptique (laplacien ou élasticité linéaire) dans un domaine bi- ou tri-dimensionnel, par une méthode itérative de décomposition de domaine de type Schwarz avec ou sans recouvrement (voir [7], [27]).

Nous avons étudié l'impact de l'étape préliminaire de partitionnement du maillage sur le nombre d'itérations de la méthode. La mise en œuvre informatique a été réalisée grâce à la bibliothèque PETSc développée par Gropp et Smith [17]. Fondamentalement, il ressort de ces expériences numériques que, si bien évidemment le nombre d'itérations diminue lorsque le recouvrement entre sous-domaines augmente, le choix de l'heuristique de partitionnement n'a que très peu d'influence sur le nombre d'itérations pour un recouvrement donné.

Par ailleurs, comme la résolution des sous-problèmes locaux est faite à partir d'une factorisation complète LU de la matrice locale, nous avons examiné le nombre d'éléments non nuls de ces matrices, ce qui détermine le coût d'une résolution du système linéaire local. En termes de remplissage moyen, nous avons constaté que GP^* donne de meilleurs résultats. En termes de remplissage maximal, ce qui correspond au coût réel du calcul sur une machine parallèle, les expériences numériques ont montré que SP_1^* donne de meilleurs résultats pour p petit ($p \leq 16$), alors que GP^* est l'heuristique la plus efficace lorsque p est grand.

2.2 Contraction d'un maillage triangulaire

Le but est ici, à partir d'un maillage triangulaire donné, de construire des maillages triangulaires plus grossiers approximant celui-ci pour, par exemple, mettre en œuvre une méthode multigrille. Avant d'aborder le sujet de la contraction, nous donnons quelques définitions.

On dit qu'un graphe G est *planaire* s'il a une représentation dans le plan, i. e. que l'on peut dessiner G de telle sorte que si deux arêtes se croisent, c'est à leurs extrémités. Les *faces* d'un graphe sont les portions du plan bornées pas les arêtes : il existe donc une face *extérieure* (non bornée) et des faces *intérieures*. On appelle *contour* du graphe l'ensemble des arêtes délimitant la face extérieure : on parle d'*arêtes et de sommets de contour*. Les autres sommets sont dits *intérieurs*. On dit qu'un graphe est *planaire maximal* s'il est impossible d'ajouter une arête sans perdre la planarité. Les faces d'un tel graphe, y compris la face extérieure, sont des triangles ; c'est pourquoi les graphes planaires maximaux sont également appelés des *triangulations*. Parmi

les sommets de contour (au nombre de N_c), on distingue les sommets ordinaires, extrémités de deux arêtes de contour, et les sommets d'*articulation*, extrémités de $2k$ arêtes de contour, avec $k \geq 2$. Ceci nous permet finalement de définir le *graphe triangulaire*, qui est un graphe planaire sans sommet d'articulation pour lequel chaque face intérieure est un triangle, ainsi que le *maillage triangulaire*, qui est la représentation d'un tel graphe.

On voit donc que l'outil de base n'est pas à proprement parler le maillage, mais plutôt le graphe. Il est en conséquence naturel d'étudier tout d'abord la notion de contraction d'arêtes dans un graphe, avant de considérer le problème de la représentation du graphe contracté, i. e. le maillage contracté.

2.2.1 Contraction d'arête dans un graphe

La contraction d'un graphe G le long d'une arête (u, v) est le graphe résultant de

(a) la suppression d'une des deux extrémités, par exemple v, ainsi que des arêtes incidentes à v,

(b) l'insertion d'arêtes (u, w) pour chaque sommet w tel que $(v, w) \in E$ et $(u, w) \notin E$.

Un résultat classique est que la contraction d'un graphe planaire est elle-même planaire. A partir de là, il est intéressant d'examiner si d'autres caractéristiques, telles la maximalité ou la triangularité, sont préservées.

Kampen [23] et Schnyder [35] ont étudié la contraction d'arête pour les triangulations, ou graphes maximaux. Kampen a défini la *T-contraction* d'une triangulation comme la contraction le long d'une arête qui appartient à deux faces distinctes dont le résultat est une triangulation. Il a montré que, de tout sommet d'une triangulation ($N \geq 4$), il existe au moins deux arêtes issues de celui-ci qui sont T-contractables, i. e. qui permettent une T-contraction.

Une façon précise d'étudier la préservation de la maximalité est la suivante [T9]. Tout d'abord, le graphe contracté G' possède $N' = N - 1$ sommets. De plus

Proposition 2.1 *Si G comprend M arêtes, G' est constitué de $M' = M - (1 + d_{vc})$ arêtes, où d_{vc} est le nombre de voisins communs dans G aux deux extrémités de l'arête contractée.*

Si de plus G est une triangulation, alors G' est également une triangulation si et seulement si les extrémités de l'arête contractée possèdent exactement deux voisins communs, soit $d_{vc} = 2$.

Si maintenant on considère les graphes triangulaires, il est nécessaire d'introduire une règle de *préservation du contour*, puisque la face extérieure n'est pas obligatoirement un triangle : soit (u, v) l'arête à contracter et $w \notin \{u, v\}$,

- si u ou v sont des sommets de contour de G, alors u est sur le contour de G'.
- si w est un sommet de contour (resp. intérieur), w est un sommet de contour (resp. intérieur) de G'.

Une fois cette règle définie, nous pouvons montrer (cf. [T9])

Lemme 2.1 *Soit G un graphe triangulaire ($N \geq 4$). G' est également un graphe triangulaire si et seulement si une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- $N'_c = N_c$ *et* $d_{vc} = 2$.
- $N'_c = N_c - 1$ *et* $d_{vc} = 1$.

Nous généralisons la notion de T-contractibilité en disant qu'une arête d'un graphe triangulaire est *t-contractable* si le graphe résultant de la contraction est triangulaire. Dans [T9], nous avons prouvé le

Théorème 2.4 *Soit G un graphe triangulaire ($N \geq 4$) et u un de ses sommets.*

- *Si u est un sommet intérieur, il existe au moins deux arêtes t-contractables partant de u.*
- *Si u est un sommet de contour, soient v et w ses deux voisins sur le contour :*
  - *Si $(v, w) \in E$, il existe au moins une arête t-contractable partant de u.*
  - *Si $(v, w) \notin E$, il existe au moins deux arêtes t-contractables partant de u.*

Bien sûr, ces résultats sont facilement généralisables aux graphes triangulaires à *contours multiples*, c'est-à-dire les graphes planaires sans sommet d'articulation pour lesquels chaque face est un triangle, à l'exception d'un nombre fixé d'entre elles (la face extérieure et des trous).

Il est donc toujours possible d'exhiber des arêtes t-contractables. Une fois cette étape réalisée sur le graphe, nous considérons la représentation du graphe contracté, i. e. le maillage contracté.

2.2.2 Représentation d'un graphe contracté

Dans la suite, on suppose que G est un graphe triangulaire.

Pour pouvoir parvenir au théorème de représentation du graphe contracté, il est nécessaire d'utiliser un certain nombre de résultats géométriques simples, basés sur les angles. Pour un étude plus exhaustive des propriétés angulaires de la représentation des graphes triangulaires, voir [8].

Au sommet u correspond un nœud, encore appelé u. On suppose qu'aux sommets de contour (resp. intérieurs) correspondent des nœuds de contour (resp. intérieurs), et qu'une arête (u, v) est représentée par le segment $[u, v]$. On dit qu'une représentation de G est *licite* s'il n'y a pas de croisement d'arêtes, ni d'angle nul. Comme mentionné précédemment, la représentation licite d'un graphe triangulaire est appelée un *maillage triangulaire*.

Soient u et v les deux extrémités d'une arête t-contractable. On note $(y_k)_{0\leq k\leq d(u)-1}$ les voisins de u et $(z_l)_{0\leq l\leq d(v)-1}$ ceux de v, les voisins étant ordonnés trigonométriquement. Par convention, si le sommet est sur le contour, ses voisins sur le contour sont le premier et le dernier de la liste. Enfin, on définit $\varepsilon(u) = 0$ ou $\varepsilon(u) = 1$ selon que u est intérieur ou de contour (de même pour v). Nous introduisons deux paramètres $\lambda_{\max}$ et $\lambda_{\min}$, comme suit :

$$\lambda_k(u) = ||\overrightarrow{uv}|| \frac{det(\overrightarrow{uy_{k-1}}, \overrightarrow{uy_k})}{det(\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{y_{k-1}y_k})}, \text{ pour } \varepsilon(u) \leq k \leq d(u) - 1,$$

et

$$\lambda_{\max} = \min_{\varepsilon(u)\leq k\leq d(u)-1} \lambda_k^+(u), \text{ où } \lambda_k^+(u) = \begin{cases} \lambda_k(u) & \text{si } 0 \leq \lambda_k(u) \leq ||\overrightarrow{uv}|| \\ ||\overrightarrow{uv}|| & \text{sinon.} \end{cases}.$$

$$\lambda_l(v) = ||\overrightarrow{uv}|| (1 + \frac{det(\overrightarrow{vz_{l-1}}, \overrightarrow{vz_l})}{det(\overrightarrow{uv}, \overrightarrow{z_{l-1}z_l})}), \text{ pour } \varepsilon(v) \leq l \leq d(v) - 1,$$

et

$$\lambda_{\min} = \max_{\varepsilon(v)\leq l\leq d(v)-1} \lambda_l^-(v), \text{ où } \lambda_l^-(v) = \begin{cases} \lambda_l(v) & \text{si } 0 \leq \lambda_l(v) \leq ||\overrightarrow{uv}|| \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}.$$

En vue de construire un maillage contracté "satisfaisant", il est naturel d'essayer de dessiner une représentation licite du graphe contracté G' en reprenant le dessin G avec aussi peu de modifications que possible. Pour pouvoir obtenir le maillage triangulaire contracté en déplaçant uniquement u en u_1 le long du segment $[u, v]$, nous avons le résultat de caractérisation suivant (cf. [T9])

Théorème 2.5 *On obtient une représentation licite du graphe contracté en déplaçant u en u_1 appartenant à $[u, v]$ si et seulement si*

$$\lambda_{\min} < ||\overrightarrow{uu_1}|| < \lambda_{\max}.$$

Malheureusement, la condition nécessaire et suffisante ($\lambda_{\min} < \lambda_{\max}$) n'est pas automatiquement satisfaite. En d'autres termes, il n'est pas toujours possible d'obtenir le maillage contracté en bougeant simplement le nœud u, extrémité d'une arête t-contractable. Si ce déplacement n'est pas suffisant, on peut envisager dans un second temps de déplacer également les voisins de u et de v. En conséquence, nous avons défini une heuristique itérative simple qui permet, dans un certain nombre de cas [T9], d'améliorer la valeur de $\lambda_{\min}$ et celle de $\lambda_{\max}$, en déplaçant les voisins de u et de v, jusqu'à obtenir $\lambda_{\min} < \lambda_{\max}$.

Si l'on part d'un nœud u et que l'on cherche à construire le maillage résultant de la contraction d'une arête t-contractable d'extrémité u, la complexité des opérations liées aux théorèmes 2.4 et 2.5 est :

$$O\Big(d(u) + \sum_{k=0}^{k=d(u)-1} d(y_k)\Big),$$

ceci dans le cas où la condition nécessaire et suffisante est vérifiée. Si on doit avoir recours à l'heuristique d'amélioration des valeurs de $\lambda_{\min}$ et de $\lambda_{\max}$, on ne peut plus estimer la complexité, puisque l'heuristique en question est itérative.

En conclusion, notons que l'on peut généraliser ces résultats aux maillages triangulaires à contours multiples inscrits sur des nappes régulières de $\mathbf{R}^3$, sous réserve que l'on peut localement se ramener au cas planaire par projection sur le plan tangent.

Bibliographie

[1] O. Axelsson et V. Eijkhout. The nested recursive two-level factorization method for nine-point difference matrices. Note Technique, University of Nijmegen, Faculty of Mathematics and Informatics, 6525 ED Nijmegen, Pays-Bas, 1992.

[2] S. T. Barnard et H. D. Simon. A fast multilevel implementation of recursive spectral bisection for partitioning unstructured problems. Rapport Technique RNR–92–033, NASA Ames Research Center, Mail Stop T045-1, Moffet Field, CA 94035, 1992.

[3] C. W. Brand. An incomplete-factorization preconditioning using repeated red-black ordering. *Numer. Math.*, 61:433–454, 1992.

[4] C. W. Brand et Z. E. Heinemann. A new iterative solution technique for reservoir simulation equations on locally refined grids. Dans *SPE 1989 Reservoir Simulation Symposium*, pages 27–36, 1989.

[5] B. L. Buzbee, F. W. Dorr, J. A. George et G. H. Golub. The direct solution of the discrete Poisson equation in irregular regions. *SIAM J. Numer. Anal.*, 8(4):722–736, 1971.

[6] T. F. Chan et H. C. Elman. Fourier analysis of iterative methods for elliptic problems. *SIAM REVIEW*, 31(1):20–49, 1989.

[7] T. F. Chan et T. P. Mathew. Domain decomposition algorithms. *Acta Numer.*, pages 61–143, 1994.

[8] G. Di Battista et L. Vismara. Angles of planar triangular graphs. *Siam J. Discrete Math.*, 9(3):349–359, 1996.

[9] M. Dryja et W. Proskurowski. Capacitance matrix method using strips with alternating Neumann and Dirichlet boundary conditions. *Applied Numer. Math.*, 1:285–298, 1985.

[10] M. Dryja, W. Proskurowski et O. Widlund. Method of domain decomposition with crosspoints for elliptic finite element problems. Dans *International Symposium on Optimal Algorithms*, April 1986.

[11] I. S. Duff et G. Meurant. The effect of ordering on preconditioned conjugate gradients. *BIT*, 29:635–657, 1989.

[12] T. Dupont, R. P. Kendall et H. H. Rachford, Jr. An approximate factorization procedure for solving self-adjoint elliptic difference equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, 5(3):559–573, 1968.

[13] C. Farhat. A simple and efficient automatic FEM domain decomposer. *Comp. Struct.*, 28(5):579–602, 1988.

[14] C. Farhat et M. Lesoinne. Automatic partitioning of unstructured meshes for the parallel solution of problems in computational mechanics. *Int. J. Num. Methods Eng.*, 36:745–764, 1993.

[15] C. M. Fiduccia et R. M. Mattheyses. A linear-time heuristic for improving network partitions. Dans *19th IEEE Design Automation Conference*, pages 175–181. IEEE, 1982.

[16] M. Fiedler. A property of eigenvectors of nonnegative symmetric matrices and its application to graph theory. *Czech. Math.*, 25(100):619–633, 1975.

[17] W.D. Gropp et B.F. Smith. Portable, Extensible Toolkit for Scientific Computation (PETSc). *Récupérable à* `info.mcs.anl.gov` *dans le répertoire* `pub/pdetools` *par ftp anonymous.*

[18] I. Gustafsson. A class of first order factorization methods. *BIT*, 18:142–156, 1978.

[19] K. M. Hall. An r-dimensional quadratic placement algorithm. *Management Sci.*, 17:219–229, 1970.

[20] B. Hendrickson et R. Leland. Multidimensional spectral load balancing. Rapport Technique SAND-93-0074, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM 87185, U.S.A., 1993.

[21] B. Hendrickson et R. Leland. A multilevel algorithm for partitioning graphs. Rapport Technique SAND-93-1301, Sandia National Laboratories, Albuquerque, NM 87185, U.S.A., 1993.

[22] M. R. Hestenes et E. Stiefel. Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(6):409–436, 1952.

[23] G. R. Kampen. Orienting planar graphs. *Discrete Mathematics*, 14:337–341, 1976.

[24] G. Karypis et V. Kumar. METIS - unstructured graph partitioning and sparse matrix ordering system. Rapport Technique, University of Minnesota, Dept of Computer Science, Minneapolis, MN 55455, U.S.A., Août 1995.

[25] B. W. Kernighan et S. Lin. An efficient heuristic procedure for partitioning graphs. *Bell System Tech. J.*, 49:291–307, 1970.

[26] S.-B. Kim, A. Hadjidimos, E. N. Houstis et J. R. Rice. Multi-parameterized Schwarz splittings. *Numer. Linear Alg. Appl.*, (à paraître).

[27] P. Le Tallec. Domain decomposition methods in computational mechanics. *Computational Mechanics Advances*, 1(2):121–220, 1994.

[28] J. A. Meijerink et H. A. Van der Vorst. An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix. *Math. Comp.*, 31(137):148–162, 1977.

[29] B. Mohar. The laplacian spectrum of graphs. Dans *6th Int. Conf. on theory and applications of graphs*, pages 871–895, 1988.

[30] Y. Notay et Z. Ould Amar. A nearly optimal preconditioning based on recursive red-black orderings. Note Technique GANMN 96-02, Université Libre de Bruxelles, Service de Métrologie Nucléaire, 50, av. F. D. Roosevelt, B-1050 Bruxelles, Belgique, 1996.

[31] A. Pothen. An analysis of spectral graph partitioning via quadratic assignment problems. Dans D. E. Keyes et J. Xu, editeurs, *Domain decomposition methods in science and engineering*, volume 180, pages 105–110. AMS, Contemporary Mathematics, 1995.

[32] W. Proskurowski et S. Sha. Performance analysis of the Neumann-Dirichlet preconditioner for substructures with intersecting interfaces. Dans T. F. Chan *et al*, editeurs, *Domain decomposition methods for partial differential equations*, pages 322–337. SIAM, 1990.

[33] W. Proskurowski et O. Widlund. A finite element-capacitance matrix method for the Neumann problem for Laplace's equation. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 1(4):410–425, 1980.

[34] F. Rendl et H. Wolkowicz. A projection technique for partitioning the nodes of a graph. Rapport Technique CORR 90–20, University of Waterloo, Faculty of Math., Waterloo, Ontario, N2L 3G1 Canada, 1990.

[35] W. Schnyder. Embedding planar graphs on the grid. Dans *1st annual ACM-SIAM symposium on discrete algorithms*, pages 138–148, 1990.

[36] H. D. Simon. Partitioning of unstructured problems for parallel processing. *Computing Systems in Engineering*, 2(2/3):135–148, 1991.

[37] H. D. Simon et S.-H. Teng. How good is recursive bisection? Rapport Technique NASA Ames Research Center, Mail Stop T045-1, Moffet Field, CA 94035, 1993.

[38] W. P. Tang. Generalized Schwarz splittings. *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 13(2):573–595, 1992.

[39] S.-H. Teng. *Points, spheres and separators: a unified geometric approach to graph partitioning.* PhD, Carnegie Mellon University, School of Computer Science, Pittsburgh, PA 15213-3890, U.S.A., 1991.

Résolution des équations de Maxwell et de modèles approchés

Nous résumons maintenant nos travaux portant sur la résolution des équations de Maxwell temporelles, du modèle de Darwin et du système en "div-**rot**" dans des domaines bornés bi- ou tri-dimensionnels. La plupart de ces travaux ont pour base la décomposition orthogonale d'espaces de Sobolev simples.

Il s'agit, par ordre chronologique de réalisation, de :Ê

[T10] A decomposition of $L^2(\Omega)^3$ and an application to magnetostatic equations. *Math. Models Meth. App. Sci.*, 3(3):289–301, 1993.

[T11] A decomposition of the electromagnetic field. Application to the Darwin model. *Math. Models Meth. App. Sci.*, 7(8):1085–1120, 1997.

[T12] Finite element convergence for the Darwin model to Maxwell's equations. *Modél. Math. Anal. Numér.*, 31(2):213–250, 1997.

[T13] Résolution des équations de Maxwell dans un domaine avec un coin rentrant. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I*:203–208, 1996.

[T14] Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners. *A paraître dans Modél. Math. Anal. Numér.*

[T15] Une caractérisation de l'orthogonal de $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(\Omega)$. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I*:605–610, 1997.

[T11] a été réalisé en commun avec E. Sonnendrücker.
[T12] a été réalisé en commun avec Z. Jun.
[T13] et [T14] ont été réalisés en commun avec F. Assous et E. Sonnendrücker.
[T15] a été réalisé en commun avec F. Assous.
Ê

1 Modélisation dans $\mathbf{R}^3$

Dans le vide, les équations de Maxwell peuvent s'écrire (cf. [7])

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}\,\mathbf{E} = \mathbf{0}, \tag{2}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{3}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \tag{4}$$

c, ϵ_0 et μ_0 sont respectivement la vitesse de la lumière, la permittivité électrique et la perméabilité magnétique dans le vide. Les données $\mathbf{J}$ et ρ sont la densité de courant et la densité de charge. Elles vérifient l'équation de conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\mathbf{J} = 0.$$

Enfin, $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ sont le champ électrique et l'induction magnétique : on appelle le couple $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ le champ électromagnétique. Parmi les modèles approchés de ce système

d'équations, nous en considérons plus particulièrement deux dans la suite.

Tout d'abord, le modèle de Darwin qui est obtenu à partir de (1)-(4) en notant que l'on peut décomposer le champ électrique en

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L, \quad \text{avec } \operatorname{div} \mathbf{E}_T = 0, \ \mathbf{rot}\, \mathbf{E}_L = \mathbf{0}. \tag{5}$$

$\mathbf{E}_T$ et $\mathbf{E}_L$ sont appelées respectivement partie transverse et partie longitudinale de $\mathbf{E}$. On construit le modèle de Darwin en négligeant le terme $\partial \mathbf{E}_T / \partial t$ dans (1), ce qui donne

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}_L}{\partial t} + \mathbf{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}\, \mathbf{E}_T = \mathbf{0}, \tag{7}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_L = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \tag{8}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{9}$$

Notons que Degond et Raviart [12] ont réalisé une étude asymptotique de ce modèle.

Nous considérons également les équations statiques, c'est-à-dire le modèle pour lequel on néglige la dépendance en temps pour trouver $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{x})$ solution de :

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{10}$$

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{E} = \mathbf{0}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \tag{11}$$

(10) (respectivement (11)) sont appelées équations de la magnétostatique (resp. équations de l'électrostatique) dans le vide. De fait, on peut exprimer chacun de ces deux systèmes comme un cas particulier du modèle "div-**rot**" :

$$\mathbf{rot}\, \mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{12}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = g, \tag{13}$$

où $\mathbf{f}$ et g sont deux fonctions données.

Nous étudions (1)-(4), ainsi que (6)-(9) et (12)-(13) dans des domaines bornés. Plus particulièrement, nous nous intéressons à la caractérisation de leur solution respective, mais aussi à la construction de méthodes numériques de résolution (basées sur les éléments finis). Le fait que les domaines d'étude sont bornés nécessite l'adjonction de conditions aux limites que nous précisons dans les paragraphes à venir. Généralement, nous supposerons que le bord du domaine est un conducteur parfait. Par ailleurs, lorsque la dépendance en temps n'est pas négligée, les conditions initiales usuelles sont supposées connues, i. e. $\mathbf{E}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x})$ et $\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x})$, avec les conditions de compatibilité habituelles sur $\mathbf{E}_0$ et $\mathbf{B}_0$.

2 Décomposition du champ électromagnétique dans un domaine avec coupures

Dans cette partie, nous donnons une caractérisation de la solution des équations de la magnétostatique, du modèle de Darwin et des équations de Maxwell, par l'intermédiaire de décompositions d'espaces de Sobolev, dans des domaines réguliers mais non simplement connexes. Pour cela, nous nous plaçons dans le cadre de la résolution des équations dans un domaine Ω de $\mathbf{R}^3$ qui possède les propriétés suivantes :

- Ω est un ouvert borné et connexe.
- Sa frontière Γ est de régularité $\mathcal{C}^r$, avec $r > 2$, et Ω se trouve localement d'un seul côté de Γ. On appelle $\mathbf{n}$ la normale unitaire extérieure.

- Il existe des coupures $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_{\tilde{N}}$ de régularité $\mathcal{C}^r$ telles que
  - $\Sigma_i \cap \Sigma_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ et les coupures Σ_i ne sont pas tangentes à Γ.
  - Si on définit $\Sigma = \bigcup_{i=1}^{i=\tilde{N}} \Sigma_i$ et $\dot{\Omega} = \Omega \backslash \Sigma$, $\dot{\Omega}$ est simplement connexe à frontière pseudo-lipschitzienne[1]. Sa frontière est notée $\dot{\Gamma}$.

Pour chaque Σ_i, on appelle Σ_i^- et Σ_i^+ ses faces et $\mathbf{n}_{\Sigma_i}$ la normale unitaire, orientée de Σ_i^- vers Σ_i^+. On peut alors introduire le saut d'une fonction définie sur $\dot{\Omega}$ par $[\phi]_{\Sigma_i} = \phi_{|\Sigma_i^+} - \phi_{|\Sigma_i^-}$.

Enfin, on décompose Γ en $\bigcup_{j=1}^{j=m} \Gamma_j$, où Γ_j sont les composantes connexes (maximales) de Γ.

Une fois ces définitions particulières posées, nous introduisons les espaces de Sobolev qui nous serviront pour toute la suite :

$$\begin{aligned} H(\mathrm{div}\,;\Omega) &= \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3,\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} \in L^2(\Omega)\}, \\ H(\mathrm{div}\,0;\Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega),\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0\}, \\ H_0(\mathrm{div}\,;\Omega) &= \{\mathbf{u} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega),\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\}, \text{ et} \\ H_0(\mathrm{div}\,0;\Omega) &= H(\mathrm{div}\,0;\Omega) \cap H_0(\mathrm{div}\,;\Omega). \end{aligned}$$

$H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ et $H_0(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ sont définis de manière équivalente. Dans [T11], nous avons prouvé deux formules d'intégration par parties qui nous ont permis d'établir les résultats techniques qui suivent. Ces deux formules sont :

Proposition 2.1

$$\int_{\dot{\Omega}} \mathbf{C}\cdot\mathbf{grad}\,\mu\,d\mathbf{x} + \int_{\dot{\Omega}} \mathrm{div}\,\mathbf{C}\,\mu\,d\mathbf{x} = \langle \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}, \mu\rangle_{\dot{\Gamma}} \quad \forall (\mathbf{C},\mu) \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)\times H^1(\dot{\Omega}).$$

$$\int_{\dot{\Omega}} \mathbf{C}\cdot\mathbf{grad}\,\mu\,d\mathbf{x} + \int_{\dot{\Omega}} \mathrm{div}\,\mathbf{C}\,\mu\,d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{i=\tilde{N}} \langle \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}, [\mu]_{\Sigma_i}\rangle_{\Sigma_i} \quad \forall (\mathbf{C},\mu) \in H_0(\mathrm{div}\,;\Omega)\times H^1(\dot{\Omega}).$$

Dans cette partie, $\langle\cdot,\cdot\rangle_\gamma$ désigne le crochet de dualité entre $H^{1/2}(\gamma)$ et son dual, $H^{-1/2}(\gamma)$.

Une fois ces définitions posées et cette proposition énoncée, et avant de passer à la résolution des équations de la magnétostatique proprement dites, nous énumérons trois résultats auxiliaires tirés de [T10]. Pour commencer, nous avons étudié la décomposition de Helmholtz d'un élément $\mathbf{u}$ de $L^2(\Omega)^3$, c'est-à-dire

$$\mathbf{u} = \mathbf{grad}\,p + \mathbf{rot}\,\mathbf{w}. \tag{14}$$

Nous avons prouvé que, si on appelle

$$\begin{aligned} H_c^1(\Omega) &= \{q \in H^1(\Omega),\ \mathbf{grad}\,q \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma,\ q = 0 \text{ sur } \Gamma_m\}, \\ H_\Sigma(\Omega) &= \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3 \cap H_0(\mathrm{div}\,0;\Omega),\ \int_{\Sigma_i} \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}_{\Sigma_i}\,d\sigma = 0 \text{ pour } 1 \le i \le \tilde{N}\}, \end{aligned}$$

on a le

Théorème 2.1

$$L^2(\Omega)^3 = \mathbf{grad}\,(H_c^1(\Omega)) \overset{\perp}{\oplus} \mathbf{rot}\,(H_\Sigma(\Omega)).$$

On peut de plus caractériser précisément l'élément p de $H_c^1(\Omega)$ ainsi que l'élément $\mathbf{w}$ de $H_\Sigma(\Omega)$ intervenant dans (14), par l'intermédiaire de la matrice de capacitance C de taille $m \times m$. D'après par exemple [11], cette matrice est définie par

$$c_{ij} = \langle \frac{\partial \chi_i}{\partial n}, 1\rangle_{\Gamma_j}, \tag{15}$$

où $(\chi_i)_{1\le i\le m}$ est la solution dans $H^1(\Omega)$ de $\Delta\chi_i = 0$ dans Ω et $\chi_i = \delta_{ij}$ sur Γ_j, pour $1 \le j \le m$. On a alors le

[1] En suivant [10], on dit qu'un ouvert ω de $\mathbf{R}^3$ est à frontière pseudo-lipschitzienne si, pour tout point $\mathbf{x}$ de sa frontière, il existe $k \in \{1,2\}$ et $\rho_0 > 0$ tels que, pour tout $\rho \in]0,\rho_0[$, l'intersection de ω avec la boule de centre $\mathbf{x}$ et de rayon ρ a k composantes connexes à frontière lipschitzienne.

Théorème 2.2 *Une caractérisation de $p \in H^1_c(\Omega)$ dans (14) est*

$$\begin{aligned}
&\Delta p = \operatorname{div} \mathbf{u} \text{ dans } \Omega,\\
&p = a_i \text{ sur } \Gamma_i, \text{ où}\\
&\mathbf{a} = (a_i)_{1\le i\le m} \text{ est solution de } C\mathbf{a} = \mathbf{f}, \hat{E}\text{avec } f_i = \int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\,\chi_i\, d\mathbf{x},
\end{aligned}$$

ainsi que le

Théorème 2.3 *Une caractérisation de $\mathbf{w} \in H_\Sigma(\Omega)$ dans (14) est*

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Delta}\mathbf{w} = -\mathbf{rot}\,\mathbf{u} \text{ dans } \Omega,\\
&(\mathbf{rot}\,\mathbf{w})\times\mathbf{n} = \mathbf{u}\times\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma.
\end{aligned}$$

Nous avons appliqué ce résultat à la résolution des équations (10) de la magnétostatique dans le vide. Dans ce cas, on suppose que la densité de courant $\mathbf{J}$ satisfait à $\mathbf{J} \in H(\operatorname{div} 0;\Omega)$ et $\langle \mathbf{J}\cdot\mathbf{n}, 1\rangle_{\Gamma_j} = 0$, pour $1 \le j \le m$. On "ferme" (10) par une condition aux limites de type conducteur parfait : pour un terme source $\mathbf{B}_S \in H(\mathbf{rot}\,;\Omega)\cap H(\operatorname{div} 0;\Omega)$, on ajoute

$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{B}_S\cdot\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma, \tag{16}$$

$$\langle \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}_{\Sigma_i}, 1\rangle_{\Sigma_i} = \langle \mathbf{B}_S\cdot\mathbf{n}_{\Sigma_i}, 1\rangle_{\Sigma_i}, \text{ pour } 1 \le i \le \tilde{N}. \tag{17}$$

On obtient finalement le

Théorème 2.4 *Il existe une et une seule induction magnétique $\mathbf{B}$ appartenant à $H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ solution de (10) et (16)-(17). De plus, $\mathbf{B}$ est, de manière équivalente, l'unique solution de :*
Trouver $\mathbf{B} \in H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Delta}\mathbf{B} = -\mu_0\,\mathbf{rot}\,\mathbf{J} \text{ dans } \Omega,\\
&\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \text{ dans } \Omega,\\
&\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{B}_S\cdot\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma,\\
&(\mathbf{rot}\,\mathbf{B})\times\mathbf{n} = \mu_0\,\mathbf{J}\times\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma,\\
&\langle \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}_{\Sigma_i}, 1\rangle_{\Sigma_i} = \langle \mathbf{B}_S\cdot\mathbf{n}_{\Sigma_i}, 1\rangle_{\Sigma_i}, \text{ pour } 1 \le i \le \tilde{N}.
\end{aligned}$$

Remarque 2.1 Nous avons procédé de manière similaire à celle adoptée par Bendali *et al* [5] qui ont étudié et caractérisé la solution des équations de Stokes à partir d'une décomposition de Helmholtz de la solution. Par ailleurs, Bossavit [6] a obtenu des résultats équivalents pour les équations de la magnétostatique dans un domaine de régularité $\mathcal{C}^\infty$, lorsqu'un supraconducteur ou un milieu ferromagnétique entoure le domaine ; pour cela, il s'est appuyé sur des isomorphismes entre espaces de Sobolev. ■

Dans [T11], nous avons cette fois considéré la résolution des équations de Maxwell (1)-(4), ainsi que celle des équations (6)-(9) du modèle de Darwin. Comme dans [T10], ce travail a consisté en la détermination de décompositions orthogonales d'espaces fonctionnels. Ici, nous avons supposé, en plus des hypothèses précédentes sur le domaine, que

- $\overline{\Gamma} = \overline{\Gamma}_A \cup \overline{\Gamma}_C$, avec une interface $\partial\Gamma = \overline{\Gamma}_A \cap \overline{\Gamma}_C$ régulière. On appelle $(\Gamma_{A_i})_{1\le i\le N_A}$ et $(\Gamma_{C_i})_{1\le i\le N_C}$ les composantes connexes de Γ_A et Γ_C.

Dans la suite, nous supposerons parfois que $\partial\Gamma$ est vide, i. e. que Γ_A et Γ_C sont à distance non nulle l'une de l'autre.

Pour définir les espaces fonctionnels indispensables, il est préférable de préciser le problème à résoudre : nous considérons les équations de Maxwell (1)-(4) fermées par

$$\mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_C, \tag{18}$$

$$(\mathbf{E} - c\mathbf{B}\times\mathbf{n})\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_A. \tag{19}$$

(18) est de type conducteur parfait, alors que (19) correspond à une condition absorbante de Silver-Muller du premier ordre (une onde plane d'incidence normale à Γ_A traverse la frontière sans

réflexion).

Pour résoudre (1)-(4) et (18)-(19), nous définissons en conséquence les espaces fonctionnels

$$V_B = \{\mathbf{B} \in H(\mathbf{rot}\,;\Omega) \cap H(\operatorname{div} 0;\Omega),\ \mathbf{B}\times\mathbf{n} \in L^2(\Gamma_A)^3\},$$
$$V_E = \{\mathbf{E} \in H(\mathbf{rot}\,;\Omega) \cap H(\operatorname{div} 0;\Omega),\ \mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_C,\ \mathbf{E}\times\mathbf{n} \in L^2(\Gamma_A)^3\},$$

munis de leur norme canonique. On peut montrer, cf. [23] et [4], que l'on obtient une formulation variationnelle de (1)-(4) et (18)-(19) complétées par des conditions initiales, avec

$$\mathbf{B}(\cdot,t) \in V_B,$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \mathbf{grad}\,\phi,\quad \mathbf{E}'(\cdot,t) \in V_E \text{ et } \phi(\cdot,t) \in H^1_0(\Omega).$$

Nous passons à la décomposition des espaces V_B et V_E. Tout d'abord, on a le

Théorème 2.5 *$V_B = U_B \overset{\perp}{\oplus} W_B$, la somme étant orthogonale dans $H(\operatorname{div}\,;\Omega)\cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$, où U_B et W_B sont respectivement définis par*

$$\begin{aligned} U_B &= \{\mathbf{C}\in H^1(\Omega)^3;\ \operatorname{div}\mathbf{C}=0,\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{n}=0 \text{ sur } \Gamma,\ \langle\mathbf{C}\cdot\mathbf{n},1\rangle_{\Sigma_i}=0,\ i=1,..,\tilde{N}\},\\ &= \{\mathbf{C}\in H^1(\Omega)^3;\ \mathbf{C}=\mathbf{rot}\,\mathbf{w},\ \mathbf{w}\in H^1(\Omega)^3,\ \mathbf{w}\times\mathbf{n}=\mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\}.\\ W_B &= \{\mathbf{C}\in L^2(\Omega)^3;\ \mathbf{C}=\mathbf{grad}\,p+\mathbf{rot}\,\mathbf{w},\ p\in H^1_C(\Omega),\ \Delta p=0,\\ &\quad \mathbf{w}\in H^1(\Omega)^3,\ \mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{w})=\mathbf{0},\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{w})\times\mathbf{n}\in L^2(\Gamma_A)^3\}. \end{aligned}$$

En particulier, la partie la moins régulière de $\mathbf{B}(t)$, i. e. celle qui ne se trouve pas dans $H^1(\Omega)^3$, appartient nécessairement à W_B. Dans un deuxième temps, on peut également décomposer W_B et obtenir le

Théorème 2.6 *$W_B = Z_B \overset{\perp}{\oplus} Y_B$, la somme étant orthogonale dans $H(\operatorname{div}\,;\Omega)\cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$. Dans le cas général, $Y_B = Z_B^{\perp}$ et*

$$\begin{aligned} Z_B &= \{\mathbf{C}\in H(\operatorname{div}0;\Omega)\cap H(\mathbf{rot}\,0;\Omega);\ \mathbf{C}\times\mathbf{n}=\mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_A\},\\ &= \{\mathbf{C}\in L^2(\Omega);\ \mathbf{C}=\mathbf{grad}\,p+\mathbf{rot}\,\mathbf{w},\ p\in H^1_C(\Omega),\ \Delta p=0,\\ &\quad \mathbf{w}\in H^1(\Omega)^3,\ \mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{w})=\mathbf{0},\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{w})\times\mathbf{n}=\mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_A\}. \end{aligned}$$

Si, de plus, $\partial\Gamma = \emptyset$, alors

$$\begin{aligned} Y_B &= \{\mathbf{C}\in L^2(\Omega)^3;\ \mathbf{C}=\mathbf{rot}\,\mathbf{w},\ \mathbf{w}\in H^1(\Omega)^3,\ \mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{w})=\mathbf{0},\\ &\quad \mathbf{w}\times\mathbf{n}=\mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_C,\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{w})\times\mathbf{n}\in L^2(\Gamma_A)^3\}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, concernant les espaces U_B et Y_B proprement dits, on peut montrer le

Lemme 2.1 *(i) L'application $\mathbf{C}\mapsto\|\mathbf{rot}\,\mathbf{C}\|_0$ est une norme sur U_B équivalente à la norme de V_B.*

(ii) Si $\partial\Gamma=\emptyset$, l'application $\mathbf{C}\mapsto\|\mathbf{C}\times\mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_A)^3}$ est une norme sur Y_B équivalente à la norme de V_B.

Ainsi, $\mathbf{C}\in U_B$ est caractérisé par son rotationnel et, si $\partial\Gamma=\emptyset$, $\mathbf{C}\in Y_B$ l'est par sa trace tangentielle sur Γ_A. A partir de ces résultats, il est possible de construire une décomposition de $\mathbf{B}\in V_B$, sous la forme d'une somme de trois projections orthogonales, où l'on peut définir chaque terme en fonction de $\mathbf{B}$ (cf. [T11]).

On peut procéder de façon similaire pour la partie $\mathbf{E}'$ du champ électrique qui appartient à V_E. On obtient en effet le

Théorème 2.7 *Si on suppose que $\partial\Gamma = \emptyset$, on peut écrire $V_E = U_E \overset{\perp}{\oplus} Y_E \overset{\perp}{\oplus} Z_E$, la somme étant orthogonale dans $H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$. De plus, on a les égalités*

$$\begin{aligned}
U_E &= \{\mathbf{F} \in H^1(\Omega)^3;\ \mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{w},\ \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3,\ \mathbf{w}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_A,\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{w})\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_C\},\\
Z_E &= \{\mathbf{F} \in H^1(\Omega)^3;\ \mathbf{F} = \mathbf{grad}\,\mu,\ \mu \in H^1_C(\Omega),\ \Delta\mu = 0\},\\
Y_E &= \{\mathbf{F} \in L^2(\Omega)^3;\ \mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{v},\ \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3,\ \mathbf{rot}\,(\mathbf{rot}\,\mathbf{v}) = \mathbf{0},\\
&\quad (\mathbf{rot}\,\mathbf{v})\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma_C,\ (\mathbf{rot}\,\mathbf{v})\times\mathbf{n} \in L^2(\Gamma_A)^3\}.
\end{aligned}$$

Si au contraire on ne suppose pas que $\partial\Gamma$ est vide, on peut cependant faire les deux observations générales suivantes. Lorsque Ω est simplement connexe, Z_E est réduit à $\{\mathbf{0}\}$. Par ailleurs, la partie la moins régulière de $\mathbf{E}'$ appartient à $U_E \oplus Y_E$ (si $\partial\Gamma = \emptyset$, alors elle se trouve nécessairement dans Y_E). Concernant les équivalences de normes, on a le

Lemme 2.2 *On suppose que $\partial\Gamma = \emptyset$. Dans ce cas,*

(i) l'application $\mathbf{F} \mapsto \|\mathbf{rot}\,\mathbf{F}\|_0$ est une norme sur U_E équivalente à la norme de V_E.

(ii) L'application $\mathbf{F} \mapsto \|\mathbf{F}\times\mathbf{n}\|_{L^2(\Gamma_A)^3}$ est une norme sur Y_E équivalente à la norme de V_E.

La décomposition de $\mathbf{E}'$ associée au théorème 2.7 est détaillée dans [T11].

Pour conclure, notons que l'on peut aussi utiliser ces décompositions pour calculer numériquement la solution des équations du modèle de Darwin (6)-(9). En effet, l'induction magnétique est telle que $\mathbf{B}(\cdot,t) \in V_B$. Concernant le champ électrique $\mathbf{E} = \mathbf{E}_T + \mathbf{E}_L$, on vérifie que $\mathbf{E}_L = \mathbf{grad}\,\phi$ où $\phi(\cdot,t) \in H^1_C(\Omega)$, et $\partial\phi/\partial t$ est solution du problème du théorème 2.2 (avec $\mathbf{u} = -\mathbf{J}/\epsilon_0$), et que $\mathbf{E}_T(\cdot,t) \in V_E$. A partir de là, pour calculer $\mathbf{B}$ et $\mathbf{E}_T$, on utilise les théorèmes 2.6 et 2.7, ce qui permet d'obtenir tout d'abord la projection sur U_B (resp. U_E), puis celle sur W_B (resp. $W_E = Y_E \oplus Z_E$).

3 Comparaison de méthodes d'élément fini

Dans cette partie, qui reprend les résultats de [T12], nous comparons la résolution numérique du modèle de Darwin à l'aide de deux méthodes d'élément fini. La première est conforme dans $H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ [20], [21], et l'autre est conforme dans $H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$, de type Taylor-Hood (voir par exemple [14]). On suppose ici que la résolution se fait dans un domaine Ω borné de $\mathbf{R}^3$ simplement connexe à frontière lipschitzienne. Lorsque la discrétisation par élément fini est introduite, on considère au surplus que le domaine est polyédrique.

A partir du modèle de Darwin (voir [12] ou la fin de la partie précédente), on constate aisément que l'on doit résoudre trois problèmes à chaque pas de temps. Le premier correspond à la partie à rotationnel nul du champ électrique $\mathbf{E}$, i. e. $\mathbf{E}_L = \mathbf{grad}\,\phi$ avec $\phi \in H^1_c(\Omega)$, pour laquelle on résout un problème de Poisson (voir la décomposition (5)). Les deux autres permettent de calculer la partie à divergence nulle du champ électrique, i. e. $\mathbf{E}_T$, et l'induction magnétique $\mathbf{B}$, respectivement. Ici, nous considérons le cas où ces deux problèmes sont exprimés comme suit

Un problème (D) de type Dirichlet
Trouver $\mathbf{E} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ *tel que*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{\Delta E} = -\mathbf{rot}\,\mathbf{g} \text{ dans } \Omega,\\
&\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega,\\
&\mathbf{E}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma,\\
&\langle \mathbf{E}\cdot\mathbf{n}, 1\rangle_{\Gamma_j} = 0 \text{ pour } 1 \le j \le m.
\end{aligned}$$

Un problème (N) de type Neumann
Trouver $\mathbf{B} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ *telle que*

$$\mathbf{\Delta B} = -\mathbf{rot}\,\mathbf{f} \text{ dans } \Omega,$$

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \text{ dans } \Omega,\\
&\mathbf{B}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{B}_S\cdot\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma,\\
&(\mathbf{rot}\,\mathbf{B})\times\mathbf{n} = \mathbf{f}\times\mathbf{n} \text{ sur } \Gamma.
\end{aligned}$$

Les données sont telles que $\mathbf{g}\in H_0(\operatorname{div}0;\Omega)$, $\mathbf{f}\in H(\operatorname{div}0;\Omega)$ et $\mathbf{B}_S\in H(\operatorname{div}0;\Omega)\cap H(\mathbf{rot};\Omega)$. D'après [12], on a le résultat

Théorème 3.1 *La solution* $\mathbf{E}$ *de (D) est unique, et il en est de même pour celle de (N),* $\mathbf{B}$.

Remarque 3.1 Si le domaine Ω est convexe, on en déduit (cf. [8]), que la solution $\mathbf{E}$ du problème (D) appartient à $H^1(\Omega)^3$. Pour le second problème, (N), si on suppose de plus que $\mathbf{B}_S\in H^1(\Omega)^3$, alors $\mathbf{B}$ appartient elle aussi à $H^1(\Omega)^3$ (voir [2]). ■

3.1 Formulation dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$

Dans [T12], nous prouvons qu'une formulation variationnelle de type point-selle équivalente à (D) est

Trouver $(\mathbf{E},p)\in H_0(\mathbf{rot};\Omega)\times H^1_c(\Omega)$ *tel que*

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathbf{rot}\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{x}+\int_\Omega \mathbf{v}\cdot\mathbf{grad}\,p\,d\mathbf{x} &= \int_\Omega \mathbf{g}\cdot\mathbf{rot}\,\mathbf{v}\,dx,\ \forall\,\mathbf{v}\in H_0(\mathbf{rot};\Omega), &(20)\\
\int_\Omega \mathbf{E}\cdot\mathbf{grad}\,q\,dx &= 0,\ \forall\,q\in H^1_c(\Omega). &(21)
\end{aligned}$$

Selon la théorie développée par Babuska et Brezzi (voir par exemple [14]) qui repose sur l'existence d'une condition inf-sup, nous avons prouvé le

Théorème 3.2 *Il existe une solution unique* $(\mathbf{E},p)\in H_0(\mathbf{rot};\Omega)\times H^1_c(\Omega)$ *à (20)-(21), avec* $p=0$. *Qui plus est,* $\mathbf{E}$ *est la solution du problème (D) et donc* $\mathbf{E}\in H(\operatorname{div};\Omega)\cap H(\mathbf{rot};\Omega)$.

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur le résultat de Weber [25] :

Proposition 3.1 *Soit* $(\mathbf{v}_k)_k$ *une suite de* $H(\operatorname{div};\Omega)\cap H(\mathbf{rot};\Omega)$ *avec* $\mathbf{v}_k\times\mathbf{n}=\mathbf{0}$ *au bord pour tout* k. *Si* $(\mathbf{v}_k)_k$ *est bornée dans* $H(\operatorname{div};\Omega)\cap H(\mathbf{rot};\Omega)$, *alors il existe une sous-suite de* $(\mathbf{v}_k)_k$ *convergente dans* $L^2(\Omega)^3$. *Le même résultat est valable si on remplace la condition de trace tangentielle nulle par* $\mathbf{v}_k\cdot\mathbf{n}=0$ *au bord pour tout* k.

Une formulation de type point-selle semblable peut être obtenue pour le problème (N), dans $H(\mathbf{rot};\Omega)\times H^1(\Omega)/\mathbf{R}$ (voir [T12]). Si on appelle $(\mathbf{B},p)$ la solution, on a alors le

Théorème 3.3 *Il existe une solution unique* $(\mathbf{B},p)\in H(\mathbf{rot};\Omega)\times H^1(\Omega)/\mathbf{R}$, *avec* $p=0$. *Par ailleurs,* $\mathbf{B}$ *est la solution du problème (N) et donc* $\mathbf{B}\in H(\operatorname{div};\Omega)\cap H(\mathbf{rot};\Omega)$.

Une fois ces résultats établis pour les problèmes continus, nous définissons un problème discrétisé, grâce à l'utilisation de l'élément fini de Nédélec [20]. Soit $\mathcal{T}^h$ une triangulation régulière de Ω composée de tétraèdres (h est le pas du maillage). Sur un tétraèdre K, on appelle $P_1(K)$ l'espace des fonctions linéaires sur K et $\mathcal{R}_1(K)$ l'espace défini par

$$\mathcal{R}_1(K)=\{\mathbf{u}(\mathbf{x})=\mathbf{a}+\mathbf{b}\times\mathbf{x},\ \mathbf{x}\in K;\mathbf{a}\in\mathbf{R}^3,\ \mathbf{b}\in\mathbf{R}^3\}.$$

Pour le problème de Dirichlet (D), les espaces discrets associés sont

$$\begin{aligned}
X_h &= \{\mathbf{v}_h\in H_0(\mathbf{rot};\Omega);\ \mathbf{v}_h|_K\in\mathcal{R}_1(K),\ \forall K\in\mathcal{T}^h\},\\
Q_h &= \{q_h\in H^1_c(\Omega);\ q_h|_K\in P_1(K),\ \forall K\in\mathcal{T}^h\}.
\end{aligned}$$

Bien évidemment, il existe une unique solution $(\mathbf{E}_h,p_h)\in X_h\times Q_h$ de l'analogue discret de (20)-(21), avec $p_h=0$. Pour prouver la convergence de la méthode lorsque le pas du maillage h tend vers 0, i. e. que $\mathbf{E}_h$ tend vers $\mathbf{E}$, il est nécessaire de démontrer un analogue discret de la proposition 3.1, adapté à notre formulation variationnelle. Nous utilisons pour cela le résultat récent de Amrouche *et al* [2] :

Proposition 3.2 *Il existe une constante C indépendante de h telle que, pour tout élément $\mathbf{v}_h$ de $\{\mathbf{w}_h \in X_h,\ \int_\Omega \mathbf{w}_h \cdot \mathbf{grad}\, q_h\, d\mathbf{x} = 0,\ \forall q_h \in Q_h\}$, on a*

$$||\mathbf{rot}\, \mathbf{v}_h||_0 \geq C\, ||\mathbf{v}_h||_0.$$

Ce résultat est une généralisation de celui démontré par Girault et Raviart [14] dans le cas d'un domaine Ω convexe. On peut alors prouver le

Théorème 3.4 *On a les estimations d'erreur suivantes :*

$$\begin{aligned} ||\mathbf{E} - \mathbf{E}_h||_{0,\mathbf{rot}} &\leq C\, h\, |\mathbf{E}|_2, \qquad si\ \ \mathbf{E} \in H_0(\mathbf{rot}\,;\Omega) \cap H^2(\Omega)^3, \\ \lim_{h \to 0} ||\mathbf{E} - \mathbf{E}_h||_{0,\mathbf{rot}} &= 0, \qquad si\ \ \mathbf{E} \in H_0(\mathbf{rot}\,;\Omega). \end{aligned}$$

Pour le problème de Neumann (N), on obtient des résultats équivalents à ceux du problème (D), en utilisant encore une fois un résultat de Amrouche *et al* [2], identique dans la forme à la proposition 3.2 (seuls les espaces X_h et Q_h sont modifiés). Ceci correspond à la généralisation du résultat prouvé par Nédélec [21] lorsque Ω est convexe.

3.2 Formulation dans $H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$

Nous introduisons, pour le problème de Dirichlet, l'espace

$$H_{0c}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega),\ \mathbf{v} \times \mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma\},$$

ainsi que la forme bilinéaire sur $H_{0c}(\Omega) \times H_{0c}(\Omega)$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{rot}\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{v}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathrm{div}\, \mathbf{u}\, \mathrm{div}\, \mathbf{v}\, d\mathbf{x} + \sum_{j=1}^{j=m} \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, 1\rangle_{\Gamma_j} \langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}, 1\rangle_{\Gamma_j}.$$

Dans [T12], nous donnons une preuve élémentaire du lemme qui suit

Lemme 3.1 *Dans $H_{0c}(\Omega)$, l'application $\mathbf{v} \mapsto a(\mathbf{v}, \mathbf{v})^{1/2}$ est une norme équivalente à la norme canonique.*

Remarque 3.2 Si l'on définit la forme bilinéaire a sans la somme des termes de bord, on constate aisément que $a(\mathbf{grad}\, \chi_i, \mathbf{grad}\, \chi_i) = 0$, où $(\chi_i)_{1 \leq i \leq m}$ sont les fonctions utilisées pour définir la matrice de capacitance (15). ■

Une fois ceci démontré, la formulation variationnelle
Trouver $(\mathbf{E}, p) \in H_{0c}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ *tel que*

$$\begin{aligned} a(\mathbf{E}, \mathbf{v}) + \int_\Omega \mathrm{div}\, \mathbf{v}\ p\, d\mathbf{x} &= \int_\Omega \mathbf{g} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{v}\, dx,\ \forall\, \mathbf{v} \in H_{0c}(\Omega), & (22) \\ \int_\Omega \mathrm{div}\, \mathbf{E}\ q\, dx &= 0,\ \forall\, q \in L^2(\Omega), & (23) \end{aligned}$$

est telle que l'on a le

Théorème 3.5 *Il existe une solution unique $(\mathbf{E}, p) \in H_{0c}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ à (22)-(23), pour laquelle $p = 0$ et $\mathbf{E}$ est la solution du problème (D).*

Pour le problème de Neumann (N), nous définissons cette fois

$$H_{0d}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega),\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

ainsi que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{rot}\, \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot}\, \mathbf{v}\, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathrm{div}\, \mathbf{u}\, \mathrm{div}\, \mathbf{v}\, d\mathbf{x}$$

définie sur sur $H_{0d}(\Omega) \times H_{0d}(\Omega)$. Dans [T12], nous prouvons le

Lemme 3.2 *Dans $H_{0d}(\Omega)$, l'application $\mathbf{v} \mapsto a(\mathbf{v},\mathbf{v})^{1/2}$ est une norme équivalente à la norme canonique.*

Maintenant, si on pose $\overline{\mathbf{f}} = \mathbf{f} - \mathbf{rot}\,\mathbf{B}_S \in L^2(\Omega)^3$, on peut introduire une formulation variationnelle dans $H_{0d}(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ semblable à (22)-(23) (où $\mathbf{g}$ est remplacé par $\overline{\mathbf{f}}$), et on a le

Théorème 3.6 *Il existe une solution unique $(\overline{\mathbf{B}}, p)$ à la formulation variationnelle dans $H_{0d}(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$, avec $p = 0$. De plus, $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}_S$ est la solution du problème de Neumann (N).*

Nous considérons maintenant le problème discrétisé à l'aide de l'élément fini de Taylor-Hood. Pour cela, il est nécessaire d'introduire une triangulation fine, par raffinement de chaque tétraèdre de $\mathcal{T}^h$ en huit tétraèdres. La triangulation résultante est appelée $\mathcal{T}^{h/2}$.

La résolution du problème de Dirichlet discrétisé n'est pas aisée, comme nous allons le voir plus loin. Aussi, nous débutons par le problème de Neumann discrétisé. Pour cela, nous définissons un sous-espace de $H_{0d}(\Omega)$:

$$X_h = \{\mathbf{v}_h \in (\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}))^3 \cap H_{0d}(\Omega);\ \mathbf{v}_h|_K \in (P_1(K))^3,\ \forall K \in \mathcal{T}^{h/2}\},$$

ainsi que le sous-espace de $L^2_0(\Omega)$ associé :

$$Q_h = \{q_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap L^2_0(\Omega);\ q_h|_K \in P_1(K),\ \forall K \in \mathcal{T}^h\}.$$

Pour prouver la condition inf-sup du problème discrétisé sur $X_h \times Q_h$, on reprend le résultat démontré par Verfürth [24], où $X_{h,0}$ est égal à $X_h \cap H^1_0(\Omega)^3$:

Proposition 3.3 *Il existe une constante C indépendante de h telle que*

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in X_{h,0}} \frac{\int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{v}_h\ q_h\, d\mathbf{x}}{||\mathbf{v}_h||_1} \geq C\,||q_h||_0.$$

Bien sûr, ceci permet de prouver immédiatement que la condition inf-sup est satisfaite dans $X_h \times Q_h$. On peut alors montrer le

Théorème 3.7 *Dans $X_h \times Q_h$, la solution $(\overline{\mathbf{B}}_h, p_h)$ de l'analogue discret du problème (N) est unique. De plus, on peut démontrer l'estimation d'erreur :*

$$||\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B}}_h||_{0,div,\mathbf{rot}} \leq C\,h\,|\overline{\mathbf{B}}|_2, \quad si\ \ \overline{\mathbf{B}} \in H_{0d}(\Omega) \cap H^2(\Omega)^3.$$

Contrairement à ce qui est écrit dans [T12], on ne peut pas en déduire que

$$\lim_{h \to 0} ||\overline{\mathbf{B}} - \overline{\mathbf{B}}_h||_{0,div,\mathbf{rot}} = 0, \quad \text{si}\ \ \overline{\mathbf{B}} \in H_{0d}(\Omega).$$

En effet, $H_{0d}(\Omega) \cap H^2(\Omega)^3$ n'est pas dense dans $H_{0d}(\Omega)$ lorsque Ω n'est pas convexe. Pour remédier à ce problème, on doit scinder le champ en une partie régulière (dans $H^1(\Omega)^3$) et une partie singulière (voir le paragraphe 4).

Corollaire 3.1 *Lorsque le domaine Ω est convexe, on peut remplacer la norme canonique de $H(\operatorname{div};\Omega) \cap H(\mathbf{rot};\Omega)$ par $||\cdot||_1$ dans l'estimation d'erreur ci-dessus.*

Remarque 3.3 On n'a plus nécessairement $p_h = 0$. ■

On peut donc arriver, pour le problème de Neumann, à une estimation d'erreur plus précise, i. e. en norme $||\cdot||_{0,div,\mathbf{rot}}$, voire $||\cdot||_1$, que celle obtenue pour l'élément fini conforme dans $H(\mathbf{rot};\Omega)$. Bien sûr, ceci semble naturel puisque la solution du problème (N) se trouve appartenir à $H(\operatorname{div};\Omega) \cap H(\mathbf{rot};\Omega)$.

Pour le problème de Dirichlet, il en va autrement. En effet, une discrétisation similaire à celle ci-dessus se heurte à un problème : comment rester conforme, c'est-à-dire comment discrétiser la condition aux limites $\mathbf{v}_h \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$? En effet, on constate qu'écrire directement que $\mathbf{v}_h \times \mathbf{n}$ est une quantité nulle au bord (pour l'élément fini de Taylor-Hood) entraîne la nullité de $\mathbf{v}_h$ en tous les points de la frontière autour desquels celle-ci n'est pas localement plane. Raviart [22] a proposé

d'imposer cette condition en un sens "faible". Ceci étant, il n'existe pas, dans le cadre développé dans [22], de résultat qui permette d'établir la condition inf-sup discrète, même si des expériences numériques ont permis de vérifier la convergence de cette méthode lorsque le domaine est convexe (cf. [3]).

Pour essayer de contourner cette difficulté, nous avons proposé dans [T12] une transformation qui permet de passer d'un problème de Dirichlet à un problème de Neumann.

Théorème 3.8 *La solution* $\mathbf{E} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ *de (D) peut-être exprimée sous la forme* $\mathbf{E} = \mathbf{rot}\,\overline{\mathbf{E}}$, *où* $\overline{\mathbf{E}}$ *est l'unique solution du problème* $(\overline{\mathrm{N}})$ *ci-dessous :*
Trouver $\overline{\mathbf{E}} \in H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Delta}\overline{\mathbf{E}} = -\mathbf{g} \ \textit{dans}\ \Omega,\\
&\mathrm{div}\,\overline{\mathbf{E}} = 0 \ \textit{dans}\ \Omega,\\
&\overline{\mathbf{E}}\cdot\mathbf{n} = 0 \ \textit{sur}\ \Gamma,\\
&(\mathbf{rot}\,\overline{\mathbf{E}})\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \ \textit{sur}\ \Gamma.
\end{aligned}$$

Pour discrétiser ce problème relativement à $\mathbf{E}$ et construire une approximation linéaire par morceaux, il est alors nécessaire d'utiliser une approximation quadratique par morceaux pour $\overline{\mathbf{E}}$. On définit en conséquence :

$$\mathcal{X}_h = \{\mathbf{v}_h \in (\mathcal{C}^0(\overline{\Omega}))^3 \cap H_{0d}(\Omega);\ \mathbf{v}_h|_K \in (P_2(K))^3,\ \forall K \in \mathcal{T}^{h/2}\}.$$

La proposition 3.3 induit alors la condition inf-sup discrète dans $\mathcal{X}_h \times Q_h$, ce qui permet de conclure par le

Théorème 3.9 *Dans* $\mathcal{X}_h \times Q_h$, *la solution* $(\overline{\mathbf{E}}_h, p_h)$ *de l'analogue discret de la formulation variationnelle du problème* $(\overline{\mathrm{N}})$ *est unique. De plus :*

$$||\overline{\mathbf{E}} - \overline{\mathbf{E}}_h||_{0,div,\mathbf{rot}} \leq C\, h^{r-1}\, ||\overline{\mathbf{E}}||_r, \quad si\ \ \overline{\mathbf{E}} \in H_{0d}(\Omega) \cap H^r(\Omega)^3.$$

Une fois encore, lorsque le domaine Ω est convexe, on peut remplacer la norme canonique de $H(\mathrm{div}\,;\Omega) \cap H(\mathbf{rot}\,;\Omega)$ par $||\cdot||_1$.

4 Résolution des équations de Maxwell dans un domaine non convexe

Dans cette partie, reprenant [T13] et [T14], nous considérons la résolution du problème en div-**rot** (12)-(13) ainsi que la résolution des équations de Maxwell (1)-(4) dans un domaine Ω polygonal simplement connexe et non convexe de $\mathbf{R}^2$. Ensuite, nous énonçons et démontrons (cf. [T15]) un résultat préliminaire à l'application de cette méthode de résolution dans un domaine tridimensionnel.

On appelle $(\Gamma_j)_{1\leq j\leq N_c}$ les côtés du bord Γ de Ω. Suivant [T13], on suppose pour commencer que le polygone possède un unique coin rentrant. Nous abordons le cas d'un polygone quelconque (cf. [T14]) au paragraphe 4.6.

On appelle π/α avec $\frac{1}{2} < \alpha < 1$ l'angle au coin rentrant et on définit un secteur angulaire ouvert Ω^c au voisinage du coin rentrant, de rayon R. On note Ω^e l'ouvert tel que $\Omega^c \cap \Omega^e = \emptyset$ et $\overline{\Omega}^c \cup \overline{\Omega}^e = \overline{\Omega}$. Enfin, on note Γ^c (resp. Γ^e) la frontière de Ω^c (resp. Ω^e), que l'on décompose en $\mathcal{B} \cup \tilde{\Gamma}^c$ (resp. $\mathcal{B} \cup \tilde{\Gamma}^e$), où $\mathcal{B} = \Gamma^c \cap \Gamma^e$. La normale unitaire sortante est notée $\nu = (\nu_x, \nu_y)$ (elle existe partout sauf aux coins), et on définit le vecteur unitaire tangent associé $\tau = (\nu_y, -\nu_x)$.

Dans le cas d'un domaine bidimensionnel, il existe deux opérateurs "rotationnels". L'un, scalaire, est noté rot dans la suite : $\mathrm{rot}\,\mathbf{u} = \partial u_y/\partial x - \partial u_x/\partial y$. Le second, vectoriel, est noté **rot** et à f associe $(\partial f/\partial y, -\partial f/\partial x)^T$. Dans la suite, on utilise les espaces bien connus $L^2_0(\Omega)$, $H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$, $H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ et $H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ (N. B. Dans un domaine bidimensionnel, $H(\mathbf{rot}\,;\Omega) = H^1(\Omega)^2$). Par ailleurs, nous définissons :

$$V = H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega) \cap H(\mathrm{div}\,0;\Omega) \text{ et } \Phi = \{\varphi \in H^1(\Omega),\ \Delta\varphi \in L^2(\Omega),\ \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = 0 \text{ sur } \Gamma\}.$$

On peut montrer le

Lemme 4.1 *1. L'opérateur* rot *définit un isomorphisme de V sur $L^2_0(\Omega)$.*

2. L'opérateur **rot** *définit un isomorphisme de $\Phi/\mathbf{R}$ sur V.*

3. L'opérateur Δ définit un isomorphisme de $\Phi/\mathbf{R}$ sur $L^2_0(\Omega)$.

Dans le cas que nous considérons, c'est-à-dire le cas d'un domaine non convexe, on sait d'une part que $V \not\subset H^1(\Omega)^2$ [14] et, d'autre part, que $\Phi \not\subset H^2(\Omega)$ [16]. Nous introduisons donc les espaces régularisés

$$V_R = V \cap H^1(\Omega)^2 \text{ et } \Phi_R = \Phi \cap H^2(\Omega).$$

4.1 Enoncé des problèmes à résoudre

Les problèmes que nous étudions ci-après sont le problème en div-**rot** et les équations de Maxwell (champ électrique noté $\mathbf{u}$), avec une condition aux limites de type conducteur parfait. Dans un domaine bidimensionnel, le premier problème peut être écrit avec $f \in L^2_0(\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$ données, sous la forme :
Trouver $\mathbf{u} \in H(\mathrm{rot}\,;\Omega)$ telle que :

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\mathbf{u} &= f \ \text{ dans } \Omega && (24)\\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} &= g \ \text{ dans } \Omega && (25)\\ \mathbf{u}\cdot\tau &= 0 \ \text{ sur } \Gamma. && (26) \end{aligned}$$

Quant au second, soient $T > 0$, $\mathbf{f}(t) \in L^2([0,T];L^2(\Omega)^2)$ et $g(t) \in C^2([0,T];L^2(\Omega))$ telles que $\partial^2 g/\partial t^2 - \mathrm{div}\,\mathbf{f} = 0$, ainsi que les données initiales $\mathbf{u}_0 \in H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega) \cap H(\mathrm{div}\,;\Omega)$ et $\mathbf{u}_1 \in H(\mathrm{div}\,;\Omega)$:
Trouver $\mathbf{u}(t) \in L^2([0,T];H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega))$, $\partial\mathbf{u}/\partial t(t) \in L^2([0,T];H(\mathrm{div}\,;\Omega))$ telles que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \mathbf{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u} &= \mathbf{f} \text{ dans } \Omega\times[0,T] && (27)\\ \mathrm{div}\,\mathbf{u} &= g \text{ dans } \Omega\times[0,T] && (28)\\ \mathbf{u}\cdot\tau &= 0 \text{ sur } \Gamma\times[0,T], && (29) \end{aligned}$$

avec les conditions initiales $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ et $\partial\mathbf{u}/\partial t(0) = \mathbf{u}_1$.

Chaque problème admet une solution unique. Qui plus est, on peut traiter le cas de l'induction magnétique de manière similaire en remplaçant simplement la condition aux limites (26) ou (29) par $\mathbf{u}\cdot\nu = 0$ au bord (voir [T14]). Par ailleurs, notons qu'en prenant $\psi(t) \in C^2([0,T];H^1_0(\Omega))$ telle que $\Delta\psi = g$ dans Ω et en considérant $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{grad}\,\psi$, on arrive à

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\mathbf{w}}{\partial t^2} + \mathbf{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{w} &= \mathbf{f} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{grad}\,\psi \text{ dans } \Omega\times[0,T]\\ \mathrm{div}\,\mathbf{w} &= 0 \text{ dans } \Omega\times[0,T]\\ \mathbf{w}\cdot\tau &= 0 \text{ sur } \Gamma\times[0,T]. \end{aligned}$$

En d'autres termes, sous réserve de résoudre un problème de Poisson avec une condition aux limites de Dirichlet homogène dont l'étude a été réalisée par Grisvard [16], [17], on arrive à une solution $\mathbf{w}(t) \in V$. C'est l'hypothèse que nous faisons dans la suite, c'est-à-dire que nous supposons que $g = 0$ dans (28). Le même raisonnement s'appliquant au problème statique, nous prenons de même $g = 0$ dans (25).

4.2 Décompositions orthogonales d'espaces

Classiquement, d'après Weber [25] (voir [T14] pour une preuve élémentaire), on a le

Lemme 4.2 *L'application* $\mathbf{u} \mapsto \|\mathbf{rot}\,\mathbf{u}\|_0$ *est une norme sur* V *équivalente à la norme canonique.*

D'après [17], on a également le

Lemme 4.3 *L'application* $\varphi \mapsto \|\Delta\varphi\|_0$ *est une norme sur* $\Phi/\mathbf{R}$ *équivalente à la norme canonique* $\varphi \mapsto \{||\varphi||_1^2 + ||\Delta\varphi||_0^2\}^{1/2}$.

Par ailleurs, Costabel [9] (voir également Moussaoui [18]) a prouvé que pour toute fonction $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^2$ telle que $\mathbf{u}\cdot\tau$ s'annule au bord, on a l'identité

$$||\mathrm{div}\,\mathbf{u}||_0^2 + ||\mathrm{rot}\,\mathbf{u}||_0^2 = ||\mathbf{grad}\,\mathbf{u}||_0^2.$$

On en déduit alors immédiatement le

Corollaire 4.1 V_R *et* $\mathrm{rot}\,V_R$ *sont fermés dans* V *et* $L_0^2(\Omega)$ *respectivement. De plus,* $\Delta\Phi_R = \mathrm{rot}\,V_R$.

Soit N l'orthogonal de $\Delta\Phi_R$ dans $L_0^2(\Omega)$. En utilisant la théorie développée par Grisvard [17], on peut vérifier le

Théorème 4.1 N *est un espace vectoriel de dimension 1. De plus,* $p \in N$ *équivaut à*

$$p \in L_0^2(\Omega),\ \Delta p = 0,\ \frac{\partial p}{\partial \nu}|_{\Gamma_j} = 0 \ \textit{dans}\ \widetilde{H}^{-3/2}(\Gamma_j),\ \textit{pour}\ 1 \le j \le N_C\,.^2 \tag{30}$$

Remarque 4.1 Il existe une condition de compatibilité que p doit vérifier (voir [17]). Nous ne la mentionnons pas, puisque l'expression analytique de p voir (32) la satisfait automatiquement. ■

Si maintenant on appelle V_S (resp. Φ_S) l'image réciproque de N par l'opérateur rot (resp. Δ), on a le

Théorème 4.2 *Pour les produits scalaires* $(\mathbf{u},\mathbf{v})_V = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{x}$ *et* $(\varphi,\psi)_\Phi = \int_\Omega \Delta\varphi\,\Delta\psi\,d\mathbf{x}$ *respectivement, on peut écrire les décompositions orthogonales :*

$$V = V_R \overset{\perp}{\oplus} V_S\,,\quad \Phi = \Phi_R \overset{\perp}{\oplus} \Phi_S\,.$$

Dans la suite, nous décomposons la solution de (24)-(26) (ou de (27)-(29)) en une partie régulière et une partie singulière :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_R + \mathbf{u}_S,\ \text{avec}\ \mathbf{u}_R \in V_R\ \text{et}\ \mathbf{u}_S \in V_S\,. \tag{31}$$

4.3 Régularité des fonctions singulières

On appelle $\mathbf{v}_S$ une base de V_S. Costabel [8] a prouvé le résultat général suivant (valable aussi bien dans des domaines bi- ou tri-dimensionnels à frontière lipschitzienne) :

Théorème 4.3 *La solution* $\mathbf{u}$ *de (24)-(26) appartient à* $H^{1/2}(\Omega)^2$.

Nous avons précisé ce résultat lorsque Ω est un polygone du plan avec un coin rentrant d'angle π/α (cf. [T13]).

Théorème 4.4 $\mathbf{v}_S$ *est telle que* $\mathbf{v}_S \in H^{\alpha-\varepsilon}(\Omega)^2$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *et* $\mathbf{v}_S \notin H^{\alpha}(\Omega)^2$.

Si on note $\varphi_S \in \Phi$ l'antécédent (défini à une constante près) de $\mathbf{v}_S$ par l'isomorphisme **rot**, on en déduit le

Corollaire 4.2 $\varphi_S \in H^{1+\alpha-\varepsilon}(\Omega)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$, *et* $\varphi_S \notin H^{1+\alpha}(\Omega)$.

A son tour, ceci nous permet de préciser également le résulat obtenu par Dauge [10] pour un domaine polygonal ou polyédrique à frontière lipschitzienne.

Théorème 4.5 *Il existe une constante* $\delta_N > 0$ *dépendant uniquement de* Ω *telle que* $\Phi \subset H^{3/2+\delta_N}(\Omega)$.

[2] $\widetilde{H}^{3/2}(\Gamma_j)$ est l'espace des fonctions μ de $H^{3/2}(\Gamma_j)$ telles que $(\mathbf{grad}\,\mu/\sqrt{\rho_j}) \in L^2(\Gamma_j)^2$, où $\rho_j(\mathbf{x})$ désigne la distance de $\mathbf{x}$ aux extrémités de Γ_j; on note $\widetilde{H}^{-3/2}(\Gamma_j)$ son dual.

4.4 Calcul de la solution de (24)-(26)

4.4.1 Détermination d'une base de N

Pour calculer une base de N, notée p_S, nous avons retenu une méthode de décomposition de domaine (cf. [T14]) basée sur la théorie des opérateurs de Stekhlov-Poincaré (voir Agoshkov [1]), également appelée Dirichlet-to-Neumann (en abrégé, DtN) par Givoli *et al* [15].

Basiquement, on part de la partition de Ω en Ω^c et Ω^e pour déterminer une expression analytique de p_S dans Ω^c. Ensuite, on calcule l'opérateur de transfert DtN pour obtenir, grâce aux conditions de transmission sur $\mathcal{B}$, la condition aux limites pour le problème "extérieur", i. e. dont la solution est la restriction de p_S à Ω^e. A partir de là, on calcule explicitement p_S en commençant par le problème extérieur, puis on finit par la détermination (numérique) des coefficients de l'expression analytique de p_S dans Ω^c, à l'aide encore une fois des conditions de transmission sur $\mathcal{B}$.

Cette méthodologie présente deux avantages. Tout d'abord, d'après [17] la solution du problème extérieur est régulière (elle appartient à $H^1(\Omega^e)$), ce qui permet d'utiliser une formulation variationnelle usuelle, par exemple avec l'élément fini P_1, et, au voisinage du coin, l'expression est explicite. Par ailleurs, ceci permet de préserver l'orthogonalité dans V et dans Φ (selon $(\cdot,\cdot)_V$ et $(\cdot,\cdot)_\Phi$) entre les parties régulière et singulière, ce qui n'aurait pas été le cas si nous avions utilisé l'approche proposée dans [17], qui consiste à régulariser "localement", i. e. à considérer que la partie singulière à un support "proche" du coin rentrant.

Plus précisément (voir [T13]), on peut écrire p_S^c, la restriction de p_S à Ω^c, sous la forme

$$p_S^c(r,\theta) = \sum_{n\geq -1} A_n r^{n\alpha}\cos(n\alpha\theta), \text{ avec } A_{-1}\neq 0, \tag{32}$$

où $\overline{\Omega}^c = \{(r,\theta)\in[0,R]\times[0,\pi/\alpha]\}$. Ici, c'est la présence du terme $A_{-1}r^{-\alpha}\cos(\alpha\theta)$ qui correspond à $p_S \in L^2(\Omega^c)\setminus H^1(\Omega^c)$. Classiquement, on peut exprimer les $(A_n)_{n\geq -1}$ sous forme intégrale, en intégrant sur $\mathcal{B}$. Nous introduisons alors l'opérateur DtN T de $H^{1/2}(\mathcal{B})$ dans $\widetilde{H}^{-1/2}(\mathcal{B})$,[3] qui à $p_{S|\mathcal{B}}^c$ associe $\partial p_S^c/\partial\nu^c{}_{|\mathcal{B}}$. On obtient

$$T(p_{S|\mathcal{B}}^c) = \frac{2\alpha^2}{\pi R}\sum_{n\geq 1} n\left\{\int_0^{\pi/\alpha} p_S^c(R,\theta')\cos(n\alpha\theta')\,d\theta'\right\}\cos(n\alpha\theta) - 2\alpha\frac{A_{-1}}{R^{\alpha+1}}\cos(\alpha\theta). \tag{33}$$

Remarque 4.2 T n'est pas univoque si l'on s'en tient à la définition ci-dessus et la donnée de $p_{S|\mathcal{B}}^c$ uniquement, car on vérifie aisément que l'on ne peut pas exprimer A_{-1} et A_1 indépendamment l'un de l'autre en intégrant $p_{S|\mathcal{B}}^c$ sur $\mathcal{B}$. Pour obtenir un opérateur univoque, on remarque que

$$\int_0^{\pi/\alpha}\frac{\partial p_S^c}{\partial\nu}(R,\theta)\cos(\alpha\theta)\,d\theta = \frac{\pi}{2R}(-R^{-\alpha}A_{-1}+R^{\alpha}A_1),$$

ce qui lève l'indétermination. ■

A l'aide des conditions de transmission :

$$p_{S|_{\mathcal{B}}}^e = p_{S|_{\mathcal{B}}}^c \text{ et} \hat{\text{E}} \frac{\partial p_S^e}{\partial\nu^c{}_{|_{\mathcal{B}}}} = \frac{\partial p_S^c}{\partial\nu^c{}_{|_{\mathcal{B}}}}, \tag{34}$$

où p_S^e est la restriction de p_S à Ω^e, on obtient la formulation :
Trouver $p_S^e \in H^1(\Omega^e)/\mathbf{R}$ *telle que*

$$\begin{aligned}
&\Delta p_S^e = 0 \text{ dans } \Omega^e,\\
&\frac{\partial p_S^e}{\partial\nu^e} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}^e,\\
&\frac{\partial p_S^e}{\partial\nu^e} + T(p_S^e) = 0 \text{ sur } \mathcal{B}.
\end{aligned}$$

[3] $\widetilde{H}^{1/2}(\mathcal{B})$ est l'espace des fonctions μ de $H^{1/2}(\mathcal{B})$ telles que $(\mu/\sqrt{\rho_{\mathcal{B}}})\in L^2(\mathcal{B})$, où $\rho_{\mathcal{B}}(\mathbf{x})$ désigne la distance de $\mathbf{x}$ aux extrémités de $\mathcal{B}$; on note $\widetilde{H}^{-1/2}(\mathcal{B})$ son dual.

Ceci est équivalent à la formulation variationnelle

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^e} \mathbf{grad}\, p_S^e \cdot \mathbf{grad}\, q \, d\mathbf{x} \quad &+ \quad R \int_0^{\pi/\alpha} T_1(p_S^e) q \, d\theta \\ &= \quad 2\alpha \frac{A_{-1}}{R^\alpha} \int_0^{\pi/\alpha} \cos(\alpha\theta) q \, d\theta \quad \forall q \in H^1(\Omega^e)/\mathbf{R}\,,\end{aligned}$$

où $T_1(\cdot)$ est le premier terme du membre de droite de (33). En retour, en utilisant (34), on peut déterminer les coefficients $(A_n)_{n\geq -1}$. Bien évidemment, on peut vérifier que, comme p_S appartient à un espace vectoriel de dimension un, la donnée de A_{-1} caractérise p_S.

4.4.2 Détermination d'une base de V_S

Brièvement, on peut construire une base de V_S (ainsi qu'une base de Φ_S) par l'application des mêmes techniques. Sans détailler plus avant, notons simplement que dans Ω^c, on peut écrire $\mathbf{v}_S^c$ et φ_S^c sous la forme

$$\mathbf{v}_S^c(r,\theta) = \sum_{n\geq 1} B_n r^{n\alpha-1} \begin{pmatrix} \sin(n\alpha\theta) \\ \cos(n\alpha\theta) \end{pmatrix} + \sum_{n\geq -1} A_n r^{n\alpha+1} \begin{pmatrix} \frac{n\alpha}{4n\alpha+4}\sin(n\alpha\theta) \\ \frac{n\alpha+2}{4n\alpha+4}\cos(n\alpha\theta) \end{pmatrix},$$

$$\varphi_S^c(r,\theta) = -\sum_{n\geq 1} \frac{B_n}{n\alpha} r^{n\alpha}\cos(n\alpha\theta) - \sum_{n\geq -1} \frac{A_n}{4n\alpha+4} r^{n\alpha+2}\cos(n\alpha\theta), \text{ avec } B_1 \neq 0.$$

Les coefficients $(A_n)_{n\geq -1}$ sont ceux de (32). On peut définir les $(B_n)_{n\geq 1}$ sous forme intégrale sur $\mathcal{B}$, à l'aide cette fois de $\mathbf{v}_{S|\mathcal{B}}^c$ ou de $\varphi_{S|\mathcal{B}}^c$. Ensuite, on résout le problème extérieur sur $\mathbf{v}_S^e$ soit par une formulation en $\mathbf{rot}\,\mathrm{rot}$ dans $\{\mathbf{w} \in H(\mathbf{rot}\,;\Omega^e),\ \mathbf{w}\cdot\tau^e = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}^e\}$, soit par une formulation dans $H^1(\Omega^e)/\mathbf{R}$ pour φ_S^e et une application directe de l'égalité $\mathbf{v}_S = \mathbf{rot}\,\varphi_S$ (voir [T14] pour les détails).

4.4.3 Une méthode de calcul numérique

Une fois p_S et $\mathbf{v}_S$ déterminées, on peut simplement calculer la solution de (24)-(26), grâce à (31). En effet, V_S étant de dimension un, on a $\mathbf{u}_S = c\,\mathbf{v}_S$. Et, par orthogonalité, on obtient

$$\int_\Omega f\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_S\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_S\,d\mathbf{x} = c\int_\Omega (\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_S)^2\,d\mathbf{x} = c\,||p_S||_0^2.$$

La partie régulière $\mathbf{u}_R$ est ensuite déterminée par une méthode classique (voir [20], [3] ou [T12]).

4.5 Application au problème en temps (27)-(29)

Le problème en temps peut être résolu de la manière suivante. On discrétise en espace la formulation variationnelle équivalente à (27)-(29), i. e.
Trouver $\mathbf{u}(t) \in L^2([0,T]; H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega))$ *telle que*

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega \mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}\,d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0(\mathrm{rot}\,;\Omega) \tag{35}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega, \tag{36}$$

avec les conditions initiales déjà mentionnées. Aux fonctions-test classiques (choix de l'élément fini qui détermine un espace V_R^h), on ajoute $\mathbf{v}_S$: la solution discrète est écrite sous la forme $\mathbf{u}^h(t) = \mathbf{u}_R^h(t) + c(t)\,\mathbf{v}_S$. On suppose que $V_R^h \subset V_R$, ce qui permet de vérifier automatiquement (36). Si on appelle P_h la projection orthogonale sur V_R^h dans $L^2(\Omega)^2$, la fonction-test $\mathbf{v}^h = \mathbf{v}_S - P_h\mathbf{v}_S$ donne

$$c''(t)\,||\mathbf{v}_S - P_h\mathbf{v}_S||_0^2 + c(t)\,||p_S||_0^2 = \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{u}_R^h\,\mathrm{rot}\,P_h\mathbf{v}_S\,d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathbf{f}^h\cdot(\mathbf{v}_S - P_h\mathbf{v}_S)\,d\mathbf{x}. \tag{37}$$

On calcule la valeur de $c(t)$ en remarquant que le coefficient de $c''(t)$ satisfait à

$$\|\mathbf{v}_S - P_h \mathbf{v}_S\|_0^2 \leq C_\varepsilon h^{2\alpha-2\varepsilon}, \qquad \forall \varepsilon > 0\,,$$

ce qui signifie que cette équation différentielle ordinaire n'est pas raide.

Enfin, pour calculer numériquement $\mathbf{u}_R^h$, on écrit la formulation variationnelle discrète classique, c'est-à-dire :
Trouver $\mathbf{u}_R^h \in V_R^h$ *telle que*

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}\int_\Omega \mathbf{u}_R^h \cdot \mathbf{v}_R^h \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{u}_R^h \,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_R^h \, d\mathbf{x} &= \int_\Omega \mathbf{f}^h \cdot \mathbf{v}_R^h \, d\mathbf{x} \\ &- c''(t)\int_\Omega \mathbf{v}_S \cdot \mathbf{v}_R^h \, d\mathbf{x}, \quad \forall \mathbf{v}_R^h \in V_R^h. \end{aligned} \tag{38}$$

4.6 Cas de plusieurs coins rentrants

Dans ce paragraphe, on suppose que Ω est un polygone simplement connexe de $\mathbf{R}^2$ quelconque, dont la frontière présente K coins rentrants, d'angle au sommet π/α_i, avec $\frac{1}{2} < \alpha_i < 1$, pour $1 \leq i \leq K$. Pour chaque coin rentrant, on note Ω_i^c un secteur angulaire ouvert au voisinage de celui-ci et Γ_i^c sa frontière. On note Ω^e l'ouvert tel que $(\cup_{i=1}^{i=K}\Omega_i^c) \cap \Omega^e = \emptyset$ et $(\cup_{i=1}^{i=K}\overline{\Omega}_i^c) \cup \overline{\Omega}^e = \overline{\Omega}$, de frontière Γ^e. Pour $1 \leq i \leq K$, on appelle $\mathcal{B}_i$ le bord $\Gamma_i^c \cap \Gamma^e$, et on décompose Γ_i^c en $\Gamma_i^c = \mathcal{B}_i \cup \tilde{\Gamma}_i^c$. Enfin, on décompose Γ^e en $\Gamma^e = \cup_{i=1}^{i=K}\mathcal{B}_i \cup \tilde{\Gamma}^e$.

Si maintenant on considère de nouveau $\Delta\Phi_R$ et son orthogonal N dans $L_0^2(\Omega)$, toujours d'après [17], on a le

Théorème 4.6 *N est un espace vectoriel de dimension K. De plus, $p \in N$ si et seulement si p vérifie (30).*

En conséquence, l'espace $V_S = (\mathbf{rot})^{-1}N$ est également de dimension K et on en déduit que la solution de (24)-(26) (ou de (27)-(29)) peut s'écrire sous la forme (31), avec

$$\mathbf{u}_S = \sum_{j=1}^{j=K} c_j \mathbf{v}_S^j, \text{ avec } (\mathbf{v}_S^i)_{1\leq i\leq K} \text{ une base de } V_S. \tag{39}$$

Le but est, dans ce cas général, de déterminer ces K fonctions de base, ce qui peut se faire comme dans le cas d'un unique coin rentrant, par l'intermédiaire des fonctions $(p_S^i)_{1\leq i\leq K}$ et $(\varphi_S^i)_{1\leq i\leq K}$ associées. Dans [T14], nous avons prouvé que l'on peut choisir, pour i donné, une restriction de p_S^i à Ω_j^c nulle pour $j \neq i$, celle sur Ω_i^c étant caractérisée par une formule du type (32), et construire de cette façon une base de N. A l'aide des conditions de transmission sur $(\mathcal{B}_j)_{1\leq j\leq K}$, on détermine le problème extérieur satisfait par la restriction de p_S^i à Ω^e :
Trouver $p_S^{i,e} \in H^1(\Omega^e)/\mathbf{R}$ *telle que*

$$\begin{aligned} &\Delta p_S^{i,e} = 0 \text{ dans } \Omega^e, \\ &\frac{\partial p_S^{i,e}}{\partial \nu^e} = 0 \text{ sur } \tilde{\Gamma}^e \cup (\cup_{j\neq i}\mathcal{B}_j), \\ &\frac{\partial p_S^{i,e}}{\partial \nu^e} + T^i(p_S^{i,e}) = 0 \text{ sur } \mathcal{B}_i. \end{aligned}$$

Ici, T^i, $1 \leq i \leq K$, sont les opérateurs DtN définis similairement à (33). Ceci permet de calculer p_S^i. En ce qui concerne $(\mathbf{v}_S^i)_{1\leq i\leq K}$ et $(\varphi_S^i)_{1\leq i\leq K}$, on procède comme pour un unique coin rentrant (voir le paragraphe 4.4.2).

Une fois cette base de V_S construite, on peut calculer les coefficients $(c_i)_{1\le i\le K}$ de (39) de la solution du problème stationnaire (24)-(26). En effet, pour $1 \le i \le K$, par orthogonalité,

$$\begin{aligned}\int_\Omega f \,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_S^i \,d\mathbf{x} &= \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{u}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_S^i \,d\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{j=K} c_j \int_\Omega \mathrm{rot}\,\mathbf{v}_S^j \,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}_S^i \,d\mathbf{x} \\ &= \sum_{j=1}^{j=K} b_{ij}\, c_j, \text{ avec } b_{ij} = \int_\Omega p_S^j \, p_S^i \,d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Et, par construction, la matrice $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le K}$ est symétrique définie positive. On peut ensuite calculer la partie régulière de la solution de (24)-(26) par une méthode de type élément fini.

Concernant le problème dépendant du temps (27)-(29), on note que l'on peut toujours définir un espace de fonctions-test $V_R^h \oplus V_S$, avec $V_R^h \subset V_R$. On a alors

$$\mathbf{u}^h(t) = \mathbf{u}_R^h(t) + \sum_{j=1}^{j=K} c_j(t)\mathbf{v}_S^j.$$

A l'aide des fonctions-test $\mathbf{v}_i^h = \mathbf{v}_S^i - P_h\mathbf{v}_S^i$, on trouve

$$A\mathbf{c}''(t) + B\mathbf{c}(t) = \mathbf{f}(t),$$

avec $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le K}$, $a_{ij} = \int_\Omega (\mathbf{v}_S^i - P_h\mathbf{v}_S^i)\cdot(\mathbf{v}_S^j - P_h\mathbf{v}_S^j)\,d\mathbf{x}$, $\mathbf{c}(t) = (c_j(t))_{1\le j\le K}$ et $\mathbf{f}(t) = (f_i(t))_{1\le i\le K}$ où $f_i(t)$ est le second membre de (37) (pour $\mathbf{v}_S = \mathbf{v}_S^i$).

Proposition 4.1 *A est une matrice symétrique définie positive, et on a l'estimation :*

$$|a_{ij}| \le C_\varepsilon h^{\alpha_i+\alpha_j-2\varepsilon}, \qquad \forall \varepsilon > 0.$$

Enfin, pour conclure, la partie régulière est calculée à l'aide d'une formulation variationnelle du type (38).

4.7 Un résultat préliminaire dans $\mathbf{R}^3$

On résume ici [T15]. Dans cette note, nous prouvons un résultat qui doit permettre, ensuite, de résoudre le problème en div-**rot** (12)-(13) dans un domaine Ω ouvert, polyédrique connexe et simplement connexe de $\mathbf{R}^3$ de frontière Γ connexe et lipschitzienne. On appelle $(\Gamma_i)_{1\le i\le N_F}$ les faces de Γ. Le but final sera de résoudre, pour $\mathbf{f} \in H_0(\mathrm{div}\,0;\Omega)$ et $g \in L^2(\Omega)$:
Trouver $\mathbf{u} \in H(\mathbf{rot};\Omega)$ *telle que*

$$\begin{aligned}&\mathbf{rot}\,\mathbf{u} = \mathbf{f} \text{ dans } \Omega,\\ &\mathrm{div}\,\mathbf{u} = g \text{ dans } \Omega,\\ &\mathbf{u}\times\mathbf{n} = \mathbf{0} \text{ sur } \Gamma.\end{aligned}$$

Pour y parvenir, nous avons développé dans [T15] une approche comparable à celle du paragraphe 4.2. Tout d'abord, d'après Grisvard [16] ou Dauge [10], on a le

Théorème 4.7 *L'image par le laplacien de l'espace $H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)$, que l'on note $\Delta(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$, est un fermé de $L^2(\Omega)$, et on a la décomposition orthogonale suivante :*

$$L^2(\Omega) = \Delta(H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega)) \overset{\perp}{\oplus} N.$$

Le résultat central de [T15] est la caractérisation, à l'instar du théorème 4.1 pour un domaine bidimensionnel, des éléments de N. Pour cela, on introduit $D(\Delta;\Omega)$ l'espace $\{q \in L^2(\Omega);\, \Delta q \in L^2(\Omega)\}$, ainsi que, pour une face Γ_j donnée, l'espace $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$ (voir la note de bas de page [3]) dont la norme canonique est notée $||\cdot||_{\sim,1/2,\Gamma_j}$. On a alors le

Théorème 4.8 *$p \in N$ équivaut à*

$$p \in D(\Delta;\Omega), \quad \Delta p = 0, \quad p_{|\Gamma_i} = 0 \text{ dans } \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_i), \text{ pour } 1 \leq i \leq N_F.$$

Pour parvenir à démontrer ce résultat, nous avons établi quelques résultats intermédiaires. Le premier d'entre eux repose principalement sur la définition suivante (cf. [19]) de l'appartenance d'une fonction $\mu \in H^{1/2}(\Gamma)$, si et seulement si :

$$\mu \in L^2(\Gamma), \text{ et } \int_\Gamma \int_\Gamma \frac{|\mu(\mathbf{x}) - \mu(\mathbf{y})|^2}{||\mathbf{x}-\mathbf{y}||^3} d\sigma(\mathbf{x}) d\sigma(\mathbf{y}) < \infty,$$

où $d\sigma$ représente une mesure sur Γ, ainsi que sur un cas particulier élémentaire de la technique des cartes locales développée par Gagliardo [13]. On fixe une face Γ_j.

Proposition 4.2 *(i) L'application trace normale sur Γ_j, $\mathbf{g} \mapsto \mathbf{g} \cdot \mathbf{n}_{|\Gamma_j}$, est linéaire et continue de $\{\mathbf{g} \in H^1(\Omega)^3, \ \mathbf{g} \times \mathbf{n}_{|\Gamma} = 0\}$ dans $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.*

(ii) L'application trace de la dérivée normale sur Γ_j, $u \mapsto (\partial u/\partial n)_{|\Gamma_j}$, est linéaire et continue de $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ dans $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$.

Dans un deuxième temps, on suit les techniques introduites par Necas [19] : partition de l'unité et relèvement de fonctions définies sur la frontière. Notons que, pour conclure en toute généralité, nous considérons des relèvements obliques, ce qui nous permet de traiter des polyèdres avec des angles diédriques (entre deux faces) quelconques. On définit alors, pour une face Γ_j donnée, l'espace

$$H_j(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \ (\partial v/\partial n)_{|\Gamma_k} = 0 \text{ pour } k \neq j\}.$$

On peut montrer la

Proposition 4.3 *Soit μ un élément de $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)$, il existe un relèvement u appartenant à $H_j(\Omega)$ tel que*

$$\frac{\partial u}{\partial n}_{|\Gamma_j} = \mu.$$

Ensuite, par application du théorème de Banach-Steinhaus, on a la

Proposition 4.4 *Pour une face Γ_j donnée, il existe une constante $C(\Gamma_j)$ telle que*

$$\forall \mu \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j), \ \exists u \in H_j(\Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n}_{|\Gamma_j} = \mu \text{ et } ||u||_2 \leq C\, ||\mu||_{\sim,1/2,\Gamma_j}.$$

A partir de l'observation suivante : $H^2(\mathbf{R}^3) = D(\Delta;\mathbf{R}^3)$, on peut prouver ensuite la

Proposition 4.5 *L'espace $H^2(\Omega)$ est dense dans $D(\Delta;\Omega)$ muni de la norme du graphe $||q||_D = \{||q||_0^2 + ||\Delta q||_0^2\}^{1/2}$.*

Enfin, on aboutit à la formule d'intégration par parties de la

Proposition 4.6 *Si p appartient à $D(\Delta;\Omega)$, on a $p_{|\Gamma_j} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j)$ pour tout j. De plus,*

$$\forall (p,v) \in D(\Delta;\Omega) \times (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)),$$
$$\int_\Omega p \Delta v \, d\mathbf{x} - \int_\Omega v \Delta p \, d\mathbf{x} = \sum_j \langle p_{|\Gamma_j}, (\frac{\partial v}{\partial n})_{|\Gamma_j} \rangle_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_j), \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_j)}.$$

Pour conclure, on déduit une démonstration élémentaire du théorème 4.8 à l'aide des propositions ci-dessus.

Bibliographie

[1] V. I. Agoshkov. Poincaré-Steklov's operators and domain decomposition methods in finite dimensional spaces. Dans R. Glowinski *et al*, éditeurs, *Domain decomposition methods for partial differential equations*, pages 73–112. SIAM, 1988.

[2] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge et V. Girault. Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains. Rapport Technique 96-04, Université de Rennes 1, IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France, 1996.

[3] F. Assous, P. Degond, E. Heintzé, P.-A. Raviart et J. Segré. On a finite-element method for solving the three-dimensional Maxwell equations. *J. Comput. Phys.*, 109:222–237, 1993.

[4] F. Ben Belgacem, C. Bernardi, M. Costabel et M. Dauge. Un résultat de densité pour les équations de Maxwell. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I*:731–736, 1997.

[5] A. Bendali, J. M. Dominguez et S. Gallic. A variational approach for the vector potential formulation of the Stokes and Navier-Stokes problems in three dimensional domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 107:537–560, 1985.

[6] A. Bossavit. Les deux isomorphismes du rotationnel et les deux formes du problème de la magnétostatique dans un domaine borné. Première partie. *Bull. DER-EDF, Série C*, No. 1:29–44, 1986.

[7] M. Cessenat. *Méthodes mathématiques en électromagnétisme. Théorie linéaire et applications, fascicule de résultats.* CEA/DAM, 1994.

[8] M. Costabel. A remark on the regularity of solutions of Maxwell's equations on Lipschitz domains. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 12:365–368, 1990.

[9] M. Costabel. A coercive bilinear form for Maxwell's equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 157(2):527–541, 1991.

[10] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains*, volume 1341 de *Lecture notes in mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Allemagne, 1988.

[11] R. Dautray et J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique.* Masson, Paris, France, 1985.

[12] P. Degond et P.-A. Raviart. An analysis of the Darwin model of approximation to Maxwell's equations. *Forum Math.*, 4:13–44, 1992.

[13] E. Gagliardo. Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in n variabili. *Rend. Sem. Padova* 27:284-305, 1957.

[14] V. Girault et P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 de *Springer Series in Computational Mathematics.* Springer-Verlag, Berlin, Allemagne, 1986.

[15] D. Givoli, L. Rivkin et J. B. Keller. A finite element method for domains with corners. *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 35:1329–1345, 1992.

[16] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains.* Pitman, Boston, U.S.A., 1985.

[17] P. Grisvard. *Singularities in boundary value problems*, volume 22 de *RMA.* Masson, Paris, France, 1992.

[18] M. Moussaoui. Espaces $H(\mathrm{div}\,,\mathrm{rot}\,;\Omega)$ dans un polygone plan. *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Série I*:225–229, 1996.

[19] J. Necas. *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques.* Masson, Paris, France, 1967.

[20] J.–C. Nédélec. Mixed finite elements in $\mathbf{R}^3$. *Numer. Math.*, 35:315–341, 1980.

[21] J.-C. Nédélec. Eléments finis mixtes incompressibles pour l'équation de Stokes dans $\mathbf{R}^3$. *Numer. Math.*, 39:97–112, 1982.

[22] P.–A. Raviart. Finite element approximation of the time-dependent Maxwell equation. Rapport Technique GdR SPARCH #6, Ecole Polytechnique, France, 1993.

[23] P.-A. Raviart et E. Sonnendrücker. A hierarchy of approximate models for the Maxwell equations. *Numer. Math.*, 73:329–372, 1996.

[24] R. Verfürth. Error estimates for a mixed finite element approximation of the Stokes equations. *RAIRO Anal. Numér.*, 18:175-182, 1984.

[25] C. Weber. A local compactness theorem for Maxwell's equations. *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2:12–25, 1980.

Liste de publications

Articles

[1] A decomposition of $L^2(\Omega)^3$ and an application to magnetostatic equations. *Math. Models Meth. App. Sci.*, 3(3):289–301, 1993.

[2] Implementation of a domain decomposition method well-suited for (massively) parallel architectures. *High Speed Comp.*, 6(1):157–182, 1994.

[3] Repeated red-black ordering: a new approach. *Numerical Algorithms*, 7:295–324, 1994.Ê

[4] On the validity of a front-oriented approach to partitioning large sparse graphs with a connectivity constraint. (en collaboration avec Françoise Lamour) *Numerical Algorithms*, 12:193–214, 1996.

[5] Résolution des équations de Maxwell dans un domaine avec un coin rentrant. (en collaboration avec Franck Assous et Eric Sonnendrücker) *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 323, Série I*:203–208, 1996.

[6] Does contraction preserve triangular meshes? (en collaboration avec Françoise Lamour) *Numerical Algorithms*, 13:201–223, 1996.

[7] Finite element convergence for the Darwin model to Maxwell's equations. (en collaboration avec Jun Zou) *Modél. Math. Anal. Numér.*, 31(2):213–250, 1997.

[8] On the optimality of the median cut spectral bisection graph partitioning method. (en collaboration avec Tony F. Chan et W. K. Szeto) *SIAM J. Sci. Comput.*, 18:943–948, 1997.

[9] Une caractérisation de l'orthogonal de $\Delta(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ dans $L^2(\Omega)$. (en collaboration avec Franck Assous) *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 325, Série I*:605–610, 1997.

[10] A decomposition of the electromagnetic field. Application to the Darwin model. (en collaboration avec Eric Sonnendrücker) *Math. Models Meth. App. Sci.*, 7(8):1085–1120, 1997.

[11] Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners. (en collaboration avec Franck Assous et Eric Sonnendrücker) *A paraître dans Modél. Math. Anal. Numér.*

Ê

Conférences avec comité de lecture

Ê

[12] A comparison of three iterative algorithms based on domain decomposition methods. Dans D. E. Keyes et J. Xu, editeurs, *Domain decomposition methods in scientific and engineering computing*, volume 180, pages 387–393. AMS, Contemporary Mathematics, 1994.

[13] On the influence of the partitioning schemes on the efficiency of overlapping domain decomposition methods. (en collaboration avec Françoise Lamour et Barry F. Smith) Dans *Fifth symposium on the frontiers of massively parallel computation.* IEEE, IEEE Computer Society Press, 1995.Ê

Note technique

Recursive partitioning methods and greedy partitioning methods: a comparison on finite element graphs. (en collaboration avec Françoise Lamour) Rapport Technique CAM 94-09, UCLA, Dept of Mathematics, Los Angeles, CA 90024-1555, U.S.A., 1994.

Articles en préparation

Fully discrete finite element approaches for time-dependent Maxwell's equations. (en collaboration avec Jun Zou) *soumis à Numerische Mathematik.*

A characterization of the singular part of the solution to Maxwell's equations in a polyhedral domain. (en collaboration avec Franck Assous, Pierre-Arnaud Raviart et Eric Sonnendrücker) *soumis à Mathematical Methods in the Applied Sciences.*

Densité des fonctions régulières dans les sous-espaces de $H(\mathrm{div}\,, \mathbf{rot}\,; \Omega)$ tels que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \in L^2(\partial\Omega)$ ou $\mathbf{v} \times \mathbf{n} \in L^2(\partial\Omega)^3$. (en collaboration avec Christophe Hazard et Stephanie Lohrengel) *en préparation.*

Tools for solving the div-**curl** problem with mixed boundary conditions in a polygonal domain. *en préparation.*