C. R. Acad. Sci. Paris, t. 327, Série I, p. 719-724, 1998
Équations aux dérivées partielles/*Partial Differential Equations*

Quelques résultats sur la régularité en temps des équations de Maxwell instationnaires

Franck ASSOUS [a], **Patrick CIARLET, Jr** [b]

[a] CEA BIII DPTA, B.P. 12, 91680 Bruyères-le-Châtel, France
Courriel : assous@bruyeres.cea.fr

[b] ENSTA, UMA, 32, boulevard Victor, 75739 Paris cedex 15, France
Courriel : ciarlet@ensta.fr

(Reçu le 1er septembre 1998, accepté le 15 septembre 1998)

Résumé. Nous considérons la régularité par rapport au temps de la solution des équations de Maxwell instationnaires, dans le vide entouré d'un conducteur parfait et en l'absence de charges. Nous commençons par rappeler les résultats obtenus à partir de la théorie classique dans le cas d'un domaine de calcul à frontière lipschitzienne. Lorsque le domaine est polyédrique, nous étendons ces résultats aux parties régulière et singulière du champ électromagnétique. Enfin, dans le cas d'un domaine polygonal, nous montrons comment améliorer ceux concernant la partie singulière du champ. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Regularity in time of the time-dependent Maxwell equations

Abstract. *We study the regularity in time of the solution to the time-dependent Maxwell equations, in the vacuum bounded by a perfect conductor and without charges. First, we recall the results derived from the classical theory when the domain has a Lipschitz boundary. Then, when it is a polyhedron, we extend the results to both the regular and singular parts of the electromagnetic field. Last, when it is a polygon, we improve those results concerning the singular part of the field.* © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

Abridged English Version

In this Note, we study the regularity in time (between $t = 0$ and $t = T$) of the electromagnetic field $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$, solution to the time-dependent Maxwell equations. These equations are taken in the vacuum, without charges, in a bounded domain Ω with a perfectly conducting boundary Γ. They are written hereafter as (1)–(5), $\mathbf{rot}$ standing for the curl operator, $'$ denoting the partial time derivative and $\mathbf{n}$ being the unit outward normal. Then, we reformulate Maxwell's equations as an equivalent, second order in time, system of equations, i.e. (2)–(5) and (6)–(7). In the general case of a tridimensional domain with a Lipschitz boundary, with the help of the theory developed by Lions and Magenes [4], including a classical energy estimate (8), we readily prove the following well-known result. Define

Note présentée par Roland GLOWINSKI.

$V_E(\Omega) = \mathrm{H}_0(\mathbf{curl}\,;\Omega) \cap \mathrm{H}(\mathrm{div}\,0;\Omega)$, $V_B(\Omega) = \mathrm{H}(\mathbf{curl}\,;\Omega) \cap \mathrm{H}_0(\mathrm{div}\,0;\Omega)$, $\mathrm{H}_E(\Omega) = \mathrm{H}(\mathrm{div}\,0;\Omega)$ and $\mathrm{H}_B(\Omega) = \mathrm{H}_0(\mathrm{div}\,0;\Omega)$, then one has the

THEOREM. – *Suppose that* $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0) \in V_E(\Omega) \times V_B(\Omega)$ *and that* $\mathbf{J} \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}_E(\Omega))$, $\mathbf{J}(0) \in \mathrm{H}_E(\Omega)$, $\mathbf{J}' \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{L}^2(\Omega)^3)$. *There exists one and only one solution to the Maxwell equations* (1)–(5) *in* Ω *between times* $t = 0$ *and* $t = T$ *which satisfies to*

$$\mathbf{E} \in \mathrm{C}^0(0,T;V_E(\Omega)) \cap \mathrm{C}^1(0,T;\mathrm{H}_E(\Omega)) \text{ and } \mathbf{B} \in \mathrm{C}^0(0,T;V_B(\Omega)) \cap \mathrm{C}^1(0,T;\mathrm{H}_B(\Omega)).$$

If we assume further that Ω is a polyhedron with a Lipschitz boundary, we can split the electromagnetic field up into a regular part $(\mathbf{E}^{\mathrm{R}}, \mathbf{B}^{\mathrm{R}})$ in $\mathrm{H}^1(\Omega)^3 \times \mathrm{H}^1(\Omega)^3$ and a singular part $(\mathbf{E}^{\mathrm{S}}, \mathbf{B}^{\mathrm{S}})$ (*see* [1]). With respect to $(\mathbf{F}, \mathbf{G}) \mapsto (\mathbf{curl}\,\mathbf{F}, \mathbf{curl}\,\mathbf{G})_0$, which is a scalar product in $V_E(\Omega)$ thanks to [6], we can write the orthogonal decomposition $V_E(\Omega) = V_E^{\mathrm{R}}(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} V_E^{\mathrm{S}}(\Omega)$, where $V_E^{\mathrm{R}}(\Omega)$ is equal to $V_E(\Omega) \cap \mathrm{H}^1(\Omega)^3$. The same holds for $V_B(\Omega)$. Then we easily come to the

COROLLARY. – *Under the assumptions of the above Theorem, one has*

$$(\mathbf{E}^{\mathrm{R}}, \mathbf{B}^{\mathrm{R}}) \in \mathrm{C}^0(0,T;V_E^{\mathrm{R}}(\Omega) \times V_B^{\mathrm{R}}(\Omega)) \text{ and } (\mathbf{E}^{\mathrm{S}}, \mathbf{B}^{\mathrm{S}}) \in \mathrm{C}^0(0,T;V_E^{\mathrm{S}}(\Omega) \times V_B^{\mathrm{S}}(\Omega)).$$

In the last part, we consider the case when Maxwell's equations are posed in an infinite cylinder of axis Oz, with data and field independent of z. It is then possible to work in a plane section of the cylinder, called ω. Let us assume that ω is a polygon of boundary γ, and let ν denote its unit normal and τ the associated tangent vector. The first two components of $\mathbf{E}$ are denoted by $\mathbf{E}_{2d}$ (id. $\mathbf{B}_{2d}$ and $\mathbf{J}_{2d}$). As a consequence of the above assumption, (1)–(5) can be rewritten as two decoupled systems. The first one, of unknowns $(\mathbf{E}_{2d}, B_z)$ and divergence-free data $\mathbf{J}_{2d}$, is (9)–(12). The second one, with unknowns $(E_z, \mathbf{B}_{2d})$ and data J_z, is not given here.

Then, we have the same kind of results as in the three-dimensional case (see Theorem 3.1 which is self-explanatory). In addition to that, following [2], we know that $V_E^{\mathrm{S}}(\omega)$ is a finite-dimensional space, its dimension being equal to the number of reentrant corners, K, of the domain ω. Then it is possible to express $\mathbf{E}_{2d}(t)$ as in (13), where $(\mathbf{v}_{\mathrm{S}}^j)_{1 \le j \le K}$ is a basis of $V_E^{\mathrm{S}}(\omega)$. Furthermore, by taking scalar potentials g of $\mathbf{J}_{2d}$ and ϕ of $\mathbf{E}_{2d}$, that is $\mathbf{J}_{2d} = \mathbf{curl}\,g$ and $\mathbf{E}_{2d} = \mathbf{curl}\,\phi$, we can express the system (9)–(12) as a wave equation in ϕ, with data g. Then, with the help of existing results about the regularity of the singular coefficients for the wave equation (*cf.* [3] and [5]), we come to

THEOREM. – *Assume that* $\mathbf{J}_{2d} \in \mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{H}_E(\omega))$. *Then*

$$c_j \in \mathrm{C}^{0,\sigma_j - \epsilon}(0,T;\mathbb{R}) \cap \mathrm{H}^{1/2+\sigma_j}(0,T;\mathbb{R}),\ 1 \le j \le K,\ \forall \epsilon > 0,$$

where $\sigma_j = 1 - \pi/\omega_j \in]0, 1/2[$, ω_j *being the value of the angle at the* j^{th} *reentrant corner.*

Finally, it can be checked that the same holds for the singular coefficients of $\mathbf{B}_{2d}$, provided that $J_z \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}_0^1(\omega))$.

---

1. Introduction

Dans cette Note, nous étudions la régularité par rapport au temps du champ électromagnétique solution des équations de Maxwell instationnaires, dans le vide et en l'absence de charges, dans un domaine borné Ω, avec une condition au bord de type conducteur parfait. Dans le cas général tridimensionnel (domaine à bord lipschitzien), nous retrouvons à l'aide des techniques développées par Lions et Magenes [4], du type estimation d'énergie entre $t = 0$ et $t = T$, les résultats de continuité usuels dans $C^0(0,T)$ du champ, ainsi que ceux de sa dérivée partielle (première) en temps.

Ensuite, nous étudions plus précisément le cas d'un domaine polyédrique à frontière lipschitzienne non convexe. Rappelons que, dans ce cas, le champ électromagnétique n'appartient pas obligatoirement à $\mathrm{H}^1(\Omega)^3 \times \mathrm{H}^1(\Omega)^3$. À partir de la décomposition orthogonale du champ électromagnétique en une partie régulière (dans $\mathrm{H}^1(\Omega)^3 \times \mathrm{H}^1(\Omega)^3$) et une partie singulière (*voir* [1]), nous déduisons la continuité par rapport au temps de chacune de ces parties.

Lorsque le domaine est un cylindre infini d'axe Oz et lorsque les données et le champ sont indépendants de z, on peut travailler dans la section bidimensionnelle ω de ce cylindre. Si l'on suppose que cette section est un polygone, le cas échéant non convexe, la continuité de la partie régulière par rapport au temps est conservée. Qui plus est, on peut obtenir un résultat meilleur que la simple continuité de la partie singulière. Car, lorsque le domaine est bidimensionnel, l'espace des parties singulières est de dimension finie (*voir* [2]), et on peut par conséquent réécrire la partie singulière du champ $\mathbf{v}_S(t)$ sous la forme $\sum_{1\le j\le K} c_j(t)\mathbf{v}_S^j$. En introduisant des potentiels scalaires du champ électromagnétique, nous obtenons alors des résultats supplémentaires sur la régularité des coefficients singuliers c_j par rapport au temps dans des espaces de Hölder $C^{0,\sigma}(0,T)$ et des espaces de Sobolev $\mathrm{H}^s(0,T)$, ces potentiels étant solutions d'une équation des ondes pour laquelle Grisvard [3] et Moussaoui et Tran [5] ont déjà démontré ce type de régularité.

2. Équations de Maxwell en 3 dimensions d'espace

Soit Ω un domaine ouvert et borné de $\mathbf{R}^3$, dont la frontière Γ est lipschitzienne, et soit $T > 0$. Dans $\Omega \times [0,T]$, en l'absence de charges, les équations de Maxwell dans le vide ont pour forme :

$$c^2\,\mathbf{rot}\,\mathbf{B} - \mathbf{E}' = \mathbf{J}/\epsilon_0, \qquad \mathbf{B}' + \mathbf{rot}\,\mathbf{E} = 0, \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{2}$$

où $\mathbf{E}(\mathbf{x},t)$ est le champ électrique, $\mathbf{B}(\mathbf{x},t)$ l'induction magnétique et $\mathbf{J}(\mathbf{x},t)$ la densité de courant. Dans cette Note, $'$ représente la dérivation partielle par rapport à la variable t. L'équation de conservation de la charge se résume à

$$\operatorname{div}\mathbf{J} = 0. \tag{3}$$

Ici, $\mathbf{n}$ est le vecteur normal à la frontière. Lorsqu'un conducteur parfait entoure Ω, les conditions aux limites sur $\Gamma \times [0,T]$ s'écrivent :

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}_{|\Gamma\times[0,T]} = 0, \quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{n}_{|\Gamma\times[0,T]} = 0. \tag{4}$$

Dans Ω, on adjoint des conditions initiales du type :

$$\mathbf{E}(0) = \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{B}(0) = \mathbf{B}_0 \ \text{ dans } \Omega, \tag{5}$$

où le couple $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0)$ dépend uniquement de la variable $\mathbf{x}$.

Du système d'équations (1)–(5), on est amené à chercher le champ électromagnétique tel que : $\mathbf{E}(t) \in V_E(\Omega)$ avec $V_E(\Omega) = \mathrm{H}_0(\mathbf{rot}\,;\Omega) \cap \mathrm{H}(\operatorname{div}0;\Omega)$, $\mathbf{B}(t) \in V_B(\Omega)$ avec $V_B(\Omega) = \mathrm{H}(\mathbf{rot}\,;\Omega) \cap \mathrm{H}_0(\operatorname{div}0;\Omega)$.

Pour obtenir un résultat d'existence et d'unicité, il est donc naturel de considérer que le champ électromagnétique appartient à $V_E(\Omega)\times V_B(\Omega)$. Par conséquent, on prend $(\mathbf{E}_0,\mathbf{B}_0) \in V_E(\Omega)\times V_B(\Omega)$. Pour résoudre le problème ainsi posé, on va raisonner en utilisant la théorie variationnelle développée par Lions et Magenes [4], tome 1.

N.B. : On peut également obtenir un résultat d'existence et d'unicité à l'aide de la théorie des semi-groupes.

Pour cela, on exprime le problème (1)–(5) sous la forme d'un problème équivalent du second ordre en temps, soit, dans $\Omega \times [0, T]$,

$$\mathbf{E}'' + c^2 \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{E} = -\mathbf{J}'/\epsilon_0, \quad \mathbf{B}'' + c^2 \mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\mathbf{B} = \mathbf{rot}\,\mathbf{J}/\epsilon_0, \tag{6}$$

complétées des relations (2)–(5), ainsi que de la condition aux limites et des conditions initiales :

$$(\mathbf{rot}\,\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}) \times \mathbf{n}_{|\Gamma \times [0,T]} = 0, \ \mathbf{E}'(0) = \mathbf{E}_1 \text{ et } \mathbf{B}'(0) = \mathbf{B}_1 \text{ dans } \Omega, \tag{7}$$

avec $(\mathbf{E}_1, \mathbf{B}_1) \in \mathrm{H}_E(\Omega) \times \mathrm{H}_B(\Omega)$, où l'on a posé $\mathrm{H}_E(\Omega) = \mathrm{H}(\mathrm{div}\,0; \Omega)$ et $\mathrm{H}_B(\Omega) = \mathrm{H}_0(\mathrm{div}\,0; \Omega)$. On va raisonner pour le seul champ $\mathbf{E}$, puis on utilisera la formulation du premier ordre en temps, ici (1), pour conclure sur $\mathbf{B}$. Tout d'abord, les hypothèses énoncées dans [4] sont satisfaites: $V_E(\Omega)$ est évidemment inclus dans $\mathrm{H}_E(\Omega)$ et, par ailleurs, on peut montrer que $V_E(\Omega)$ est dense dans $\mathrm{H}_E(\Omega)$. Ensuite, la norme $\mathbf{F} \mapsto ||\mathbf{F}||_0$ est égale à la restriction de la norme de $H(\mathrm{div}\,; \Omega)$ sur $\mathrm{H}_E(\Omega)$ et la forme $\mathbf{F} \mapsto ||\mathbf{rot}\,\mathbf{F}||_0$ définit bien une norme équivalente à la norme canonique dans $V_E(\Omega)$, grâce au résultat de Weber [6]. Il ne reste plus qu'à obtenir l'estimation d'énergie pour pouvoir conclure. Tous calculs faits, on trouve qu'il existe une constante positive $C \equiv C(T)$ telle que

$$||\mathbf{E}'(T)||_0^2 + c^2 ||\mathbf{rot}\,\mathbf{E}(T)||_0^2 \leq C \left(||\mathbf{E}_1||_0^2 + c^2 ||\mathbf{rot}\,\mathbf{E}_0||_0^2 + \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^T ||\mathbf{J}'(s)||_0^2 \,\mathrm{d}s \right). \tag{8}$$

On a donc précisément besoin de la régularité suivante de $\mathbf{J}$: $\mathbf{J}' \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{L}^2(\Omega)^3)$. Notons que pour que (3) soit satisfaite, on prend de plus : $\mathbf{J} \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H}_E(\Omega))$. Sous réserve que $\mathbf{J}(0) \in \mathrm{H}_E(\Omega)$, on a bien $(\mathbf{E}_0, \mathbf{E}_1) \in V_E(\Omega) \times \mathrm{H}_E(\Omega)$, et (8) est vérifiée. Finalement (*cf.* [4]), on obtient le résultat de régularité : $\mathbf{E} \in \mathrm{C}^0(0, T; V_E(\Omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{H}_E(\Omega))$, après une éventuelle modification de $\mathbf{E}$ sur un ensemble de mesure nulle. En ce qui concerne l'induction magnétique, en s'aidant des résultats obtenus pour $\mathbf{E}$ et (1), on arrive aisément à $\mathbf{B} \in \mathrm{C}^0(0, T; V_B(\Omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{H}_B(\Omega))$. En conclusion, on a démontré le résultat suivant :

THÉORÈME 2.1. – *Supposons que* $(\mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0) \in V_E(\Omega) \times V_B(\Omega)$ *et que* $\mathbf{J} \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H}_E(\Omega))$, $\mathbf{J}(0) \in \mathrm{H}_E(\Omega)$, $\mathbf{J}' \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{L}^2(\Omega)^3)$. *Alors il existe une solution et une seule aux équations de Maxwell* (1)–(5) *dans le domaine* Ω *entre les instants* $t = 0$ *et* $t = T$*, qui satisfait à :*

$$\mathbf{E} \in \mathrm{C}^0(0, T; V_E(\Omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{H}_E(\Omega)) \ \textit{et}\ \mathbf{B} \in \mathrm{C}^0(0, T; V_B(\Omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{H}_B(\Omega)).$$

Plaçons nous maintenant dans le cas d'un domaine Ω polyédrique à frontière lipschitzienne. À partir de ce résultat obtenu pour le champ électromagnétique global, nous considérons maintenant sa décomposition en une partie régulière et une partie singulière. D'après [1], dans le produit scalaire associé à $\mathbf{F} \mapsto ||\mathbf{rot}\,\mathbf{F}||_0$, on a $V_E(\Omega) = V_E^{\mathrm{R}}(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} V_E^{\mathrm{S}}(\Omega)$, où $V_E^{\mathrm{R}}(\Omega)$ est l'espace des champs électriques réguliers, égal à $V_E(\Omega) \cap \mathrm{H}^1(\Omega)^3$. En suivant exactement le même raisonnement que dans [1], on pose $V_B^{\mathrm{R}}(\Omega) = V_B(\Omega) \cap \mathrm{H}^1(\Omega)^3$, et on peut alors écrire $V_B(\Omega) = V_B^{\mathrm{R}}(\Omega) \overset{\perp}{\oplus} V_B^{\mathrm{S}}(\Omega)$. Comme le champ électromagnétique (à valeurs dans $V_E(\Omega) \times V_B(\Omega)$) dépend continûment du temps, à tout instant t, on a la décomposition $(\mathbf{E}, \mathbf{B})(t) = (\mathbf{E}^{\mathrm{R}}, \mathbf{B}^{\mathrm{R}})(t) + (\mathbf{E}^{\mathrm{S}}, \mathbf{B}^{\mathrm{S}})(t)$, avec $(\mathbf{E}^{\mathrm{R}}, \mathbf{B}^{\mathrm{R}})(t) \in V_E^{\mathrm{R}}(\Omega) \times V_B^{\mathrm{R}}(\Omega)$ et $(\mathbf{E}^{\mathrm{S}}, \mathbf{B}^{\mathrm{S}})(t) \in V_E^{\mathrm{S}}(\Omega) \times V_B^{\mathrm{S}}(\Omega)$. Du théorème ci-dessus, grâce à la continuité de la projection orthogonale de $V(\Omega)$ dans $V^{\mathrm{R}}(\Omega)$ ou $V^{\mathrm{S}}(\Omega)$, on déduit :

COROLLAIRE 2.1. – *Supposons que les hypothèses du théorème* 2.1 *sont vérifiées. Alors,*

$$(\mathbf{E}^{\mathrm{R}}, \mathbf{B}^{\mathrm{R}}) \in \mathrm{C}^0(0, T; V_E^{\mathrm{R}}(\Omega) \times V_B^{\mathrm{R}}(\Omega)) \ \textit{et}\ (\mathbf{E}^{\mathrm{S}}, \mathbf{B}^{\mathrm{S}}) \in \mathrm{C}^0(0, T; V_E^{\mathrm{S}}(\Omega) \times V_B^{\mathrm{S}}(\Omega)).$$

3. Équations de Maxwell en 2 dimensions d'espace

Le résultat général de régularité en temps du théorème 2.1 va maintenant être affiné. On considère (*voir* [2]) un problème posé dans un cylindre infini pour lequel les données et le champ électromagnétique sont indépendants d'une des trois variables d'espace (x, y, z), que nous supposerons être z : dans ce cas, on travaille dans une coupe perpendiculaire à l'axe Oz. Notons $\Omega = \omega \times \mathbf{R}$ le cylindre retenu, et supposons que ω est un ouvert polygonal de frontière γ. Soient ν le vecteur normal (unitaire) à γ, et τ le vecteur tangent associé. On notera dans la suite $\mathbf{E}_{2d}$ le vecteur de composantes E_x et E_y (id. $\mathbf{B}_{2d}$ et $\mathbf{J}_{2d}$). Sous les hypothèses d'indépendance des champs par rapport à z, on vérifie aisément que le système du premier ordre en temps (1)–(5) s'écrit sous la forme de deux systèmes du premier ordre en temps découplés entre eux. Le premier, d'inconnue le couple $(\mathbf{E}_{2d}, B_z)$ a pour donnée le champ à divergence nulle $\mathbf{J}_{2d}$ et il s'écrit sous la forme suivante :

$$\text{a) } c^2 \,\mathbf{rot}\, B_z - \mathbf{E}'_{2d} = \mathbf{J}_{2d}/\epsilon_0, \quad \text{b) } B'_z + \operatorname{rot} \mathbf{E}_{2d} = 0 \quad \text{dans } \omega \times [0, T], \tag{9}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E}_{2d} = 0 \quad \text{dans } \omega \times [0, T], \tag{10}$$

$$(\mathbf{E}_{2d} \cdot \tau)_{|\gamma \times [0,T]} = 0, \tag{11}$$

$$\mathbf{E}_{2d}(0) = \mathbf{E}_{2d0}, \qquad B_z(0) = B_{z0} \quad \text{dans } \omega. \tag{12}$$

De même, on pourrait écrire, ce que nous ne ferons pas ici, le second système, d'inconnue le couple $(E_z, \mathbf{B}_{2d})$ et de donnée J_z. Chacun de ces deux systèmes, peut à son tour être formulé de manière équivalente sous la forme d'un système du second ordre en temps. À l'instar du cas tridimensionnel, on a le résultat suivant :

THÉORÈME 3.1. – *Supposons que* $(\mathbf{E}_{2d0}, B_{z0}) \in V_E(\omega) \times \{\mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega)\}$ *et que* $\mathbf{J}_{2d} \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{H}_E(\omega))$, $\mathbf{J}_{2d}(0) \in \mathrm{H}_E(\omega)$, $\mathbf{J}'_{2d} \in \mathrm{L}^2(0, T; \mathrm{L}^2(\omega)^2)$. *Alors il existe une solution et une seule aux équations de Maxwell* (9)–(12) *dans le domaine* ω *entre les instants* $t = 0$ *et* $t = T$, *qui satisfait à :*

$$\mathbf{E}_{2d} \in \mathrm{C}^0(0, T; V_E(\omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{H}_E(\omega)) \textit{ et } B_z \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathrm{H}^1(\omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{L}^2_0(\omega)).$$

Supposons que $(E_{z0}, \mathbf{B}_{2d0}) \in \mathrm{H}^1_0(\omega) \times V_B(\omega)$ *et que* $J_z \in \mathrm{H}^1(0, T; \mathrm{L}^2(\omega))$. *Alors il existe une solution et une seule aux équations de Maxwell en* $(E_z, \mathbf{B}_{2d})$ *dans le domaine* ω *entre les instants* $t = 0$ *et* $t = T$, *qui satisfait à :*

$$E_z \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathrm{H}^1_0(\omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{L}^2(\omega)) \textit{ et } \mathbf{B}_{2d} \in \mathrm{C}^0(0, T; V_B(\omega)) \cap \mathrm{C}^1(0, T; \mathrm{H}_B(\omega)).$$

Comme dans le cas tridimensionnel, nous considérons par la suite la décomposition du champ électromagnétique en une partie régulière et une partie singulière. On peut transposer dans un premier temps les résultats du corollaire 2.1 grâce aux décompositions orthogonales obtenues dans [2]. Dans ce cas bidimensionnel, lorsque le domaine possède K coins rentrants, on sait que l'on a $\dim(V_E^{\mathrm{S}}(\omega)) = K$. Soit $(\mathbf{v}_{\mathrm{S}}^j)_{1 \le j \le K}$ une base de $V_E^{\mathrm{S}}(\omega)$. On peut alors écrire

$$\mathbf{E}_{2d}(t) = \mathbf{E}^{\mathrm{R}}_{2d}(t) + \sum_{1 \le j \le K} c_j(t)\, \mathbf{v}_{\mathrm{S}}^j, \tag{13}$$

avec $\mathbf{E}^{\mathrm{R}}_{2d} \in \mathrm{C}^0(0, T; V_E^{\mathrm{R}}(\omega))$ et $c_j \in \mathrm{C}^0(0, T; \mathbb{R})$ pour $1 \le j \le K$.

Pour prouver des résultats de régularité en temps plus précis, il n'est pas nécessaire d'étudier les éléments propres du problème stationnaire associé. On s'aide plutôt de [3] et [5] pour obtenir ces résultats pour les coefficients singuliers $(c_j)_{1 \le j \le K}$, en supposant que la donnée $\mathbf{J}_{2d}$

appartient à $\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{H}_E(\omega))$, de telle sorte que le potentiel scalaire g de $\mathbf{J}_{2d}$ ($\mathbf{J}_{2d} = \mathbf{rot}\, g$) appartient à $\mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega))$. À cette fin, on définit l'espace des potentiels $\Phi = \{\phi \in \mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega),\ \Delta\phi \in \mathrm{L}^2(\omega),\ \partial\phi/\partial\nu_{|\gamma} = 0\}$: on déduit du théorème 3.1 qu'il existe une fonction unique ϕ appartenant à $C^0(0,T;\Phi) \cap C^1(0,T;\mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega))$ et telle que $\mathbf{E}_{2d} = \mathbf{rot}\,\phi$. D'après (9a), $\mathbf{rot}\,\{\phi' - c^2 B_z + g/\epsilon_0\} = 0$ et, par définition, la quantité entre accolades appartient à $\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega))$. Dans $\mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega)$, $v \mapsto \|\mathbf{rot}\, v\|_0$ définit une norme ; la quantité entre accolades est donc nulle, ce qui revient à écrire que $\phi' - c^2 B_z = -g/\epsilon_0$. En dérivant une fois par rapport au temps la relation précédente et en utilisant (9b), on trouve que ϕ vérifie l'équation des ondes : $\phi'' - c^2 \Delta\phi = f$, avec $f = -g'/\epsilon_0 \in \mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega))$. Par construction, ϕ est donc la solution unique de l'équation des ondes ci-dessus, avec $\phi(0) = \phi_0 \in \Phi$, $\phi'(0) = \phi_1 \in \mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega)$, appartenant à $C^0(0,T;\Phi) \cap C^1(0,T;\mathrm{H}^1(\omega) \cap \mathrm{L}^2_0(\omega))$. Appelons ω_j la valeur de l'angle au sommet au $j^{\text{ème}}$ coin rentrant, et $\sigma_j = 1 - \pi/\omega_j \in]0,1/2[$. D'après [3] et [5], en transposant leurs résultats au cas d'un problème avec une condition aux limites de Neumann homogène, si on écrit $\phi(t)$ sous la forme $\widetilde{\phi}_R(t) + \sum_{1\le j\le K} \widetilde{c}_j(t)\, \widetilde{\phi}^j_S$, avec $\widetilde{\phi}_R \in C^0(0,T;\Phi \cap \mathrm{H}^2(\omega))$ et $(\widetilde{\phi}^j_S)_{1\le j\le K}$ K fonctions singulières ad hoc, on a les résultats :

THÉORÈME 3.2. – *Supposons que* $\mathbf{J}_{2d} \in \mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{H}_E(\omega))$. *Alors,* $\widetilde{c}_j \in \mathcal{C}^{0,\sigma_j-\epsilon}(0,T;\mathbb{R}) \cap \mathrm{H}^{1/2+\sigma_j}(0,T;\mathbb{R})$, *pour* $1 \le j \le K$, $\forall\epsilon > 0$.

Comme la décomposition en parties régulière et singulière de [3] et [5] est différente de celle de la présente Note, nous finissons par un lemme très simple qui nous permet d'identifier les constantes.

LEMME 3.1. – *On a* $c_j(t) = \widetilde{c}_j(t)$ *pour* $1 \le j \le K$, $\forall t \in [0,T]$. *Ainsi, si* $\mathbf{J}_{2d} \in \mathrm{H}^1(0,T;\mathrm{H}_E(\omega))$,

$$c_j \in \mathcal{C}^{0,\sigma_j-\epsilon}(0,T;\mathbb{R}) \cap \mathrm{H}^{1/2+\sigma_j}(0,T;\mathbb{R}), \forall\epsilon > 0.$$

Démonstration. – De $\phi(t) = \widetilde{\phi}_R(t) + \sum_{1\le j\le K} \widetilde{c}_j(t)\, \widetilde{\phi}^j_S$, on déduit $\mathbf{E}_{2d}(t) = \widetilde{\mathbf{E}}^R_{2d}(t) + \sum_{1\le j\le K} \widetilde{c}_j(t)\, \widetilde{\mathbf{v}}^j_S$, avec $\widetilde{\mathbf{E}}^R_{2d} \in C^0(0,T;V^R_E(\omega))$. Par construction des fonctions singulières et de la base de $V^S_E(\Omega)$ (*cf.* [2]), on sait que $(\mathbf{v}^j_S - \widetilde{\mathbf{v}}^j_S)$ se trouve dans $\mathrm{H}^1(\omega)^2$ pour tout j. Alors, par différence avec (13), on en déduit que $\sum_{1\le j\le K} [\widetilde{c}_j(t) - c_j(t)] \widetilde{\mathbf{v}}^j_S$ appartient à $\mathrm{H}^1(\omega)^2$. Or, pour chaque j, au voisinage du coin rentrant considéré, $\widetilde{\mathbf{v}}^j_S$ n'appartient pas à $\mathrm{H}^1(\omega)^2$: $c_j(t) = \widetilde{c}_j(t)$. □

Notons que, sous réserve que J_z appartienne à $\mathrm{L}^2(0,T;\mathrm{H}^1_0(\omega))$, on obtient des résultats tout à fait semblables à ceux du lemme 3.1 pour les coefficients singuliers de $\mathbf{B}_{2d}$, puisque son potentiel vérifie une équation des ondes avec une condition aux limites de Dirichlet homogène.

Enfin, pour (E_z, B_z), on ne peut pas retrouver ce type d'« améliorations », puisque cette composante du champ électromagnétique appartient seulement à $\mathrm{H}^1(\omega)^2$, ce qui ne permet pas d'introduire les décompositions en parties régulière et singulière.

Références bibliographiques

[1] Assous F., Ciarlet P., Jr., Raviart P.-A. Sonnendrücker E., A characterization of the singular part of the solution to Maxwell's equations in a polyhedral domain, Math. Meth. Appl. Sci. (à paraître).

[2] Assous F., Ciarlet P., Jr., Sonnendrücker E., Résolution des équations de Maxwell dans un domaine avec un coin rentrant, C. R. Acad. Sci. Paris 323 Série I (1996) 203–208. Resolution of the Maxwell equations in a domain with reentrant corners, RAIRO Math. Model. Numer. Anal. 32 (2) (1998) 359–389.

[3] Grisvard P., Singularities in boundary value problems, RMA 22, Masson, Paris, 1992.

[4] Lions J.-L., Magenes E., Problèmes aux limites non homogènes et applications, Dunod, Paris, 1968.

[5] Moussaoui M., Tran V. H., Sur les coefficients des singularités des solutions de l'équation des ondes dans un polygone plan, C. R. Acad. Sci. Paris 316 Série I (1993) 257–260.

[6] Weber C., A local compactness theorem for Maxwell's equations, Math. Meth. Appl. Sci. 2 (1980) 12–25.