

APM_42031_EP_2025 – Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles.

Contrôle classant. Durée : 3 heures.

Mardi 24 février 2026, 14h-17h.

Sujet proposé par Lucas Chesnel.

Informations.

Ce sujet comprend six pages. Dans la correction, il sera notamment tenu compte de la qualité de la rédaction et de l'honnêteté des raisonnements. Il n'est pas nécessaire de répondre à toutes les questions pour obtenir la note maximale. Les différentes parties sont très largement indépendantes, vous pouvez les aborder dans l'ordre que vous souhaitez. Le photocopié ainsi que les notes de cours et de petites classes sont autorisés. Les autres documents et les appareils électroniques sont proscrits.

Propagation d'ondes de surface dans un canal

– Corrigé –

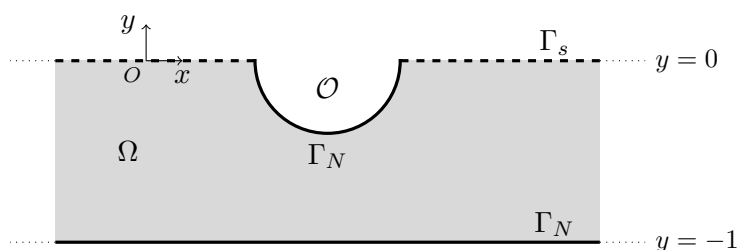


FIGURE 1 – Canal Ω en présence d'un obstacle.

Dans ce sujet, on s'intéresse à la propagation d'ondes de surface en régime harmonique en temps dans un canal de profondeur finie en présence d'un obstacle. Définissons le canal de référence

$$\Omega_0 := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times]-1; 0[\},$$

ainsi que le canal perturbé

$$\Omega := \Omega_0 \setminus \overline{\mathcal{O}},$$

où $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$ désigne l'obstacle borné. Supposons Ω connexe à bord régulier (Lipschitzien) et notons

$$\Gamma_s := \{(x, y) \in \partial\Omega \mid y = 0\} \text{ (} s \text{ comme surface)}, \quad \Gamma_N := \partial\Omega \setminus \Gamma_s,$$

voir la Figure 1. Nous sommes conduits à étudier le système d'équations

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} -\Delta u + k^2 u &= f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u &= \lambda u & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_n u &= 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases}$$

Ici u représente le potentiel de vitesses, f désigne un terme source appartenant à $L^2(\Omega)$, $k \geq 0$ est le nombre d'ondes, λ est proportionnel à la fréquence des oscillations harmoniques. De plus, n désigne le vecteur unitaire normal à $\partial\Omega$ dirigé vers l'extérieur de Ω . La condition de Neumann sur Γ_N correspond à une condition de non pénétration.

Bien que Ω ne soit pas borné, en utilisant la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\overline{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$, on peut établir la formule de Green

$$\int_{\Omega} \Delta u v + \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\partial\Omega} \partial_n u v \, d\Gamma = \int_{\Gamma_s \cup \Gamma_N} \partial_n u v \, d\Gamma, \quad \forall u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega).$$

Par ailleurs, les résultats concernant les théorèmes de trace énoncés dans le cours sont valides dans les ouverts Ω non bornés considérés ici.

Question 1. Montrer que si $u \in H^2(\Omega)$ vérifie le problème $(\mathcal{P})$ alors u est solution du problème variationnel

$$\left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ a(u, v) = \ell(v), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{array} \right. \quad (1)$$

où l'on donnera les expressions de $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$. Réciproquement, établir que si $u \in H^2(\Omega)$ vérifie (1) alors u est solution de $(\mathcal{P})$.

Correction. Si $u \in H^2(\Omega)$ vérifie $(\mathcal{P})$, en multipliant par une fonction test $v \in H^1(\Omega)$ et en intégrant sur Ω , grâce à la formule de Green ci-dessus, on trouve

$$a(u, v) = \ell(v)$$

$$\text{avec } a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + k^2 uv \, d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_s} uv \, d\Gamma \quad \text{et} \quad \ell(v) = \int_{\Omega} f v \, d\Omega.$$

Réciproquement, si $u \in H^2(\Omega)$ vérifie (1), en utilisant de nouveau la fonction de Green ci-dessus, on obtient

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + k^2 u) v \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\partial_n u - \lambda u \mathbb{1}_{\Gamma_s}) v \, d\Gamma = \int_{\Omega} f v \, d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

où $\mathbb{1}_{\Gamma_s}$ désigne la fonction indicatrice de Γ_s . En prenant d'abord des fonctions v dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, on trouve

$$\int_{\Omega} (-\Delta u + k^2 u - f) v \, d\Omega = 0, \quad \forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

La densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ garantit alors qu'on a $-\Delta u + k^2 u = f$ p.p. dans Ω . De cela, on déduit

$$\int_{\partial\Omega} (\partial_n u - \lambda u \mathbb{1}_{\Gamma_s}) v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Or comme $u \in H^2(\Omega)$, l'on sait que $\partial_n u - \lambda u \mathbb{1}_{\Gamma_s}$ appartient à $L^2(\Gamma_s)$. Puisque l'application trace $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$ est à image dense, on obtient $\partial_n u = \lambda u \mathbb{1}_{\Gamma_s}$ p.p. sur $\partial\Omega$. Ceci fournit les conditions dans $(\mathcal{P})$ sur Γ_s et sur Γ_N .

1 Étude à basse fréquence : un premier résultat

Dans cette partie, fixons $k = 1$ et étudions le problème $(\mathcal{P})$ à basse fréquence, autrement dit pour des $\lambda > 0$ petits. Notons $I :=]-1; 0[$.

Question 2. Par un calcul direct, établir l'estimation

$$\varphi(0)^2 \leq C_0 \|\varphi\|_{H^1(I)}^2, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}^\infty(\overline{I}), \quad (2)$$

avec une constante $C_o > 0$ dont on donnera la valeur.

Correction. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\bar{I})$, nous pouvons écrire, pour $y \in]-1; 0[$,

$$\varphi(0)^2 = \varphi(y)^2 + \int_y^0 \partial_t(\varphi^2)(t) dt = \varphi(y)^2 + \int_y^0 2\varphi(t)\partial_t\varphi(t) dt.$$

L'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ permet alors d'obtenir

$$\varphi(0)^2 \leq \varphi(y)^2 + \int_y^0 \varphi^2(t) + (\partial_t\varphi)^2(t) dt \leq \varphi(y)^2 + \int_{-1}^0 \varphi^2(t) + (\partial_t\varphi)^2(t) dt.$$

En intégrant ceci sur I , qui est un intervalle de longueur un, nous déduisons

$$\varphi(0)^2 \leq \int_I 2\varphi^2 + (\partial_y\varphi)^2 dy \leq 2\|\varphi\|_{H^1(I)}^2.$$

Cela fournit (2) avec $C_o = 2$.

Définissons la propriété caractérisant la géométrie

$$(GEO) \quad \left| \text{ Pour tout } (x, 0) \in \Gamma_s, \text{ on a } \{x\} \times I \subset \Omega. \right.$$

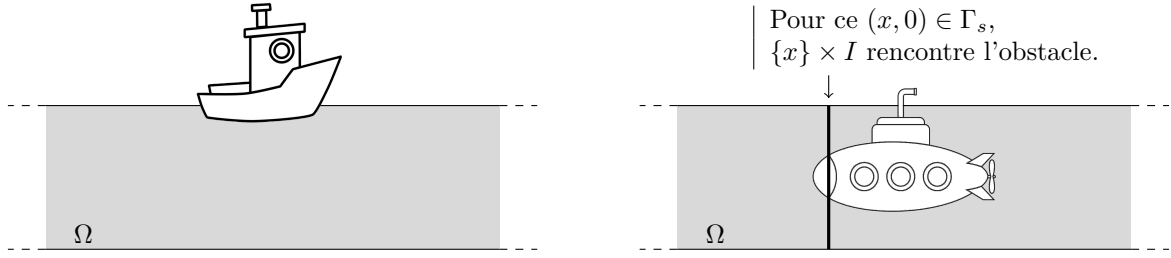


FIGURE 2 – Dans le domaine Ω de gauche, la propriété (GEO) est vérifiée. Ce n'est pas le cas dans la géométrie de droite.

Question 3. Montrer que si la propriété (GEO) est vérifiée alors on a l'estimation

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_s)}^2 \leq C_o \|u\|_{H^1(\Omega)}^2, \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Ici et comme dans tout le sujet, pour simplifier, nous écrivons u sur Γ_s ce qui désigne en réalité la trace de u sur Γ_s .

Correction. Soit u une fonction de $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$. Notons $I_s \subset \mathbb{R}$ l'ensemble tel que $\Gamma_s = I_s \times \{0\}$. Pour tout $x \in I_s$, nous pouvons écrire

$$u(x, 0)^2 \leq C_o \int_{\{x\} \times I} u^2(x, y) + (\partial_y u(x, y))^2 dy.$$

En intégrant ceci par rapport à $x \in I_s$, nous déduisons, d'après le théorème de Tonelli,

$$\|u\|_{L^2(\Gamma_s)}^2 \leq C_o \int_{I_s \times I} u^2 + (\partial_y u)^2 d\Omega \leq C_o \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Enfin, la densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\bar{\Omega})$ dans $H^1(\Omega)$ permet d'obtenir le résultat demandé.

Question 4. Supposons (GEO) vérifiée et $\lambda \in]0; \lambda_o[$ avec $\lambda_o := 1/C_o$. Prouver que le problème

$$(FV) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + uv d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_s} uv d\Gamma = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega), \end{array} \right.$$

admet une unique solution. Dans ce cas, la résolution de (FV) est-elle associée à la minimisation d'une énergie ? Si oui, donner la fonctionnelle correspondante.

Correction. Appliquons le théorème de Lax-Milgram pour montrer que (FV) admet une unique solution. Travaillons dans $H^1(\Omega)$ muni de son produit scalaire usuel qui est un espace de Hilbert. On retrouve ici les formes $a(\cdot, \cdot)$ et $\ell(\cdot)$ rencontrées à la Question 1. La forme $\ell(\cdot)$ est linéaire et continue sur $H^1(\Omega)$. En effet, on a, pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$|\ell(v)| \leq \left| \int_{\Omega} f v \, d\Omega \right| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

La forme $a(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire et continue sur $H^1(\Omega)$. En effet, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $H^1(\Omega)$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(\Gamma_s)$, nous pouvons écrire

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \lambda \|u\|_{L^2(\Gamma_s)} \|v\|_{L^2(\Gamma_s)}, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Mais nous avons montré qu'on a $\|u\|_{L^2(\Gamma_s)} \leq \sqrt{C_o} \|u\|_{H^1(\Omega)}$ pour tout $u \in H^1(\Omega)$. On déduit

$$|a(u, v)| \leq (1 + \lambda C_o) \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Enfin, pour tout $u \in H^1(\Omega)$, nous pouvons écrire

$$a(u, u) = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 - \lambda \|u\|_{L^2(\Gamma_s)}^2 \geq (1 - (\lambda/\lambda_o)) \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ainsi, si $0 < \lambda < \lambda_o$, ceci montre que $a(\cdot, \cdot)$ est coercive sur $H^1(\Omega)$. Le théorème de Lax-Milgram assure alors que (FV) admet une unique solution. Comme $a(\cdot, \cdot)$ est symétrique et coercive, nous savons que la résolution de (FV) est associée à la minimisation de la fonctionnelle énergie $\mathcal{E} : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\mathcal{E}(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - \ell(u).$$

2 Étude à basse fréquence : un résultat plus fin

La borne supérieure λ_o obtenue ci-dessus n'est *a priori* pas optimale. Nous allons l'améliorer. Définissons la fonctionnelle $J : H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $J(\varphi) = \|\varphi\|_{H^1(I)}^2$ et notons

$$\lambda_{\star} = \inf_{\varphi \in \mathcal{S}} J(\varphi) \quad \text{avec } \mathcal{S} := \{\varphi \in H^1(I) \mid \varphi^2(0) = 1\}. \quad (3)$$

Question 5. Après avoir expliqué pourquoi l'ensemble $\mathcal{S}$ est bien défini, prouver que l'on a

$$\lambda_{\star} \varphi^2(0) \leq \|\varphi\|_{H^1(I)}^2, \quad \forall \varphi \in H^1(I). \quad (4)$$

Correction. Puisque $I \subset \mathbb{R}$, on sait que les fonctions de $H^1(I)$ sont continues sur $\bar{I}$. Par conséquent, $\varphi(0)$ a un sens pour $\varphi \in H^1(I)$ et l'ensemble $\mathcal{S}$ est bien défini.

Si $\varphi \in H^1(I)$ est tel que $\varphi(0) \neq 0$ alors $\tilde{\varphi} = \varphi/\varphi(0)$ appartient à $\mathcal{S}$, ce qui assure que

$$\lambda_{\star} \leq J(\tilde{\varphi}) = \|\tilde{\varphi}\|_{H^1(I)}^2.$$

Ceci conduit alors à

$$\lambda_{\star} \varphi^2(0) \leq J(\varphi) = \|\varphi\|_{H^1(I)}^2.$$

Cette dernière inégalité est également vérifiée lorsque $\varphi(0) = 0$, ce qui fournit (4).

Montrons maintenant que l'infimum dans (3) est atteint.

Question 6. *i)* Soit (φ_p) une suite minimisante de J sur $\mathcal{S}$, *i.e.* une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} J(\varphi_p) = \lambda_\star.$$

Montrer qu'on peut extraire de (φ_p) une sous-suite, toujours notée (φ_p) pour simplifier, telle que (φ_p) converge faiblement vers un $\varphi_\star$ dans $H^1(I)$.

ii) Justifier qu'il existe $\tau \in H^1(I)$ tel que

$$\varphi(0) = (\tau, \varphi)_{H^1(I)}, \quad \forall \varphi \in H^1(I).$$

iii) Prouver que $\varphi_\star$ appartient à $\mathcal{S}$ et qu'on a $J(\varphi_\star) = \lambda_\star$, autrement dit que $\varphi_\star$ réalise l'infimum de J sur $\mathcal{S}$.

Correction. *i)* La suite (φ_p) est bornée dans $H^1(I)$. Puisque $H^1(I)$ muni de son produit scalaire usuel est un espace de Hilbert, on peut donc en extraire une sous-suite, toujours notée (φ_p) , qui converge faiblement dans $H^1(I)$ vers un $\varphi_\star$.

ii) L'application

$$\begin{array}{ccc} H^1(I) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \varphi & \mapsto & \varphi(0) \end{array}$$

est linéaire et continue sur $H^1(I)$ qui est un espace de Hilbert. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe donc $\tau \in H^1(I)$ tel que

$$\varphi(0) = (\tau, \varphi)_{H^1(I)}, \quad \forall \varphi \in H^1(I).$$

iii) On déduit

$$\varphi_\star^2(0) = (\tau, \varphi_\star)_{H^1(I)}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\tau, \varphi_n)_{H^1(I)}^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi_n^2(0) = 1,$$

ce qui montre que $\varphi_\star$ appartient à $\mathcal{S}$. D'autre part, d'après le cours, on sait que

$$\|\varphi_\star\|_{H^1(I)} \leq \liminf_n \|\varphi_n\|_{H^1(I)}.$$

Ceci assure que $J(\varphi_\star) = \lambda_\star$.

Question 7. En travaillant sur le problème sans contrainte

$$\inf_{\varphi \in H^1(I)} \left\{ G(\varphi) = \|\varphi\|_{H^1(I)}^2 - \lambda_\star \varphi^2(0) \right\},$$

montrer que $\varphi_\star$ vérifie

$$(\varphi_\star, \psi)_{H^1(I)} = \lambda_\star \varphi_\star(0) \psi(0), \quad \forall \psi \in H^1(I).$$

Correction. D'après (4), on a $G(\varphi) \geq 0$ pour tout $\varphi \in H^1(I)$. D'autre part, la question précédente assure que $G(\varphi_\star) = 0$. Donc $\varphi_\star$ est un minimiseur de G sur $H^1(I)$. Or G est de la forme $G(\varphi) = \mathfrak{a}(\varphi, \varphi)$ avec $\mathfrak{a}(\varphi, \psi) = (\varphi, \psi)_{H^1(I)} - \lambda_\star \varphi(0) \psi(0)$. Puisque $\mathfrak{a}(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire symétrique positive, nous savons que les minimiseurs de G sont les fonctions $\varphi_\star$ telles que

$$\mathfrak{a}(\varphi_\star, \psi) = 0, \quad \forall \psi \in H^1(I),$$

ce que fournit la caractérisation recherchée.

Question 8. Prouver que $\varphi_\star$ appartient à $H^2(I)$ et que l'on a

$$\left| \begin{array}{lcl} -\varphi_\star'' + \varphi_\star & = & 0 \quad \text{dans } I \\ \varphi_\star'(0) & = & \lambda_\star \varphi_\star(0) \\ \varphi_\star'(-1) & = & 0. \end{array} \right.$$

Correction. Observons qu'on a, pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(I) \subset H^1(I)$,

$$(\varphi_\star, \psi)_{H^1(I)} = (\varphi'_\star, \psi')_{L^2(I)} + (\varphi_\star, \psi)_{L^2(I)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\varphi'_\star, \psi')_{L^2(I)} = -(\varphi_\star, \psi)_{L^2(I)}.$$

Ceci montre que $\varphi'_\star$ admet une dérivée faible dans $L^2(I)$ égale à $\varphi_\star$. Ainsi $\varphi_\star$ appartient bien à $H^2(I)$ et l'on a la première ligne du problème ci-dessus. La formule de Green conduit alors à

$$(\varphi'_\star(0) - \lambda_\star \varphi_\star(0)) \psi(0) - \varphi'_\star(-1) \psi(-1) = 0, \quad \forall \psi \in H^1(I).$$

En prenant successivement ψ tel que $\psi(y) = y$ puis ψ tel que $\psi(y) = 1 + y$, on obtient les deux conditions aux limites du problème.

Question 9. Déterminer $\lambda_\star$. Expliquer en quoi ce dernier résultat permet d'améliorer celui de la Question 4 lorsque la propriété (GEO) est vérifiée.

Correction. En utilisant les équations 1 et 3 du problème satisfait par $\varphi_\star$, on trouve que $\varphi_\star$ doit être de la forme, à une constante multiplicative près,

$$\varphi_\star(y) = \cosh((y+1)).$$

La deuxième équation du problème conduit alors à $\cosh(1) = \lambda_\star \sinh(1)$, soit

$$\lambda_\star = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1}.$$

En appliquant le théorème de Lax-Milgram comme dans la question 4, on déduit que (FV) admet une unique solution pour tout λ non pas seulement dans $]0; \lambda_\circ[$, mais dans $]0; \lambda_\star[$. Ceci est une amélioration du résultat de la question 4 car $\lambda_\star > \lambda_\circ = 1/2$.

3 Étude à basse fréquence sans la propriété (GEO)

On souhaite à présent étudier le problème (FV) avec $\lambda \in]0; \lambda_\star[$ lorsque la propriété (GEO) n'est pas vérifiée. Définissons

$$\tilde{\Gamma}_s := \{(x, 0) \in \Gamma_s \mid \{x\} \times I \subset \Omega\},$$

ainsi que la forme $b(\cdot, \cdot)$ telle que

$$b(u, v) = \int_{\Omega} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v + uv \, d\Omega - \lambda \int_{\tilde{\Gamma}_s} uv \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega).$$

Avec le théorème de représentation de Riesz, définissons les opérateurs $B, K : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ tels que

$$\begin{aligned} (Bu, v)_{H^1(\Omega)} &= b(u, v), \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \\ (Ku, v)_{H^1(\Omega)} &= a(u, v) - b(u, v) = -\lambda \int_{\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s} uv \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

Question 10. Montrer que B est continu et bijectif quand $\lambda \in]0; \lambda_\star[$. On pourra exploiter (4).

Correction. Puisque $b(\cdot, \cdot)$ est bilinéaire continue, l'opérateur B est bien défini et linéaire. Pour tout $u \in H^1(\Omega)$, on a

$$(Bu, Bu)_{H^1(\Omega)} = b(u, Bu) \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)} \|Bu\|_{H^1(\Omega)},$$

ce qui assure que $\|Bu\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$. Ceci prouve que $B : H^1(\Omega) \rightarrow H^1(\Omega)$ est continu. D'autre part, pour $F \in H^1(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} Bu = F &\Leftrightarrow (Bu, v)_{H^1(\Omega)} = (F, v)_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega) \\ &\Leftrightarrow b(u, v) = (F, v)_{H^1(\Omega)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

En travaillant comme dans la question 4, on montre que $b(\cdot, \cdot)$ est linéaire continue sur $H^1(\Omega)$ muni de son produit scalaire usuel. Notons $\tilde{I}_s \subset \mathbb{R}$ l'ensemble tel que $\tilde{\Gamma}_s = \tilde{I}_s \times \{0\}$. En intégrant (4) pour $x \in \tilde{\Gamma}_s$, comme à la question 3, on obtient

$$\|u\|_{L^2(\tilde{\Gamma}_s)}^2 \leq \lambda_\star^{-1} \|u\|_{H^1(\tilde{I}_s \times I)}^2 \leq \lambda_\star^{-1} \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ceci permet de prouver que $b(\cdot, \cdot)$ est coercive pour $\lambda \in]0; \lambda_\star[$. Enfin, la forme $v \mapsto (F, v)_{H^1(\Omega)}$ est linéaire continue sur $H^1(\Omega)$. On peut donc appliquer le théorème de Lax-Milgram dans le Hilbert $H^1(\Omega)$ pour affirmer qu'il existe un unique u tel que $Bu = F$. Nous déduisons que B est bien bijectif.

Question 11. Prouver que K est un opérateur compact, autrement dit que de toute suite bornée (u_p) dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite (u_p) telle que (Ku_p) converge dans $H^1(\Omega)$.

Pour cela, on utilisera la

Proposition 1. *De toute suite bornée dans $H^1(\Omega)$, on peut extraire une sous-suite de fonctions dont les traces sur $\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s$ convergent dans $L^2(\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s)$.*

Correction. Soit (u_p) une suite bornée dans $H^1(\Omega)$. D'après la Proposition 1, on peut en extraire une sous-suite, toujours notée (u_p) , telle que $(u_p|_{\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s})$ converge dans $L^2(\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s)$. Mais l'on a

$$\|K(u_p - u_m)\|_{H^1(\Omega)}^2 = (K(u_p - u_m), K(u_p - u_m))_{H^1(\Omega)} = -\lambda \int_{\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s} (u_p - u_m) K(u_p - u_m) d\Gamma.$$

En exploitant la continuité de la trace de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s)$, on déduit

$$\|K(u_p - u_m)\|_{H^1(\Omega)} \leq C \|u_p - u_m\|_{L^2(\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s)}.$$

Comme $(u_p|_{\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s})$ converge dans $L^2(\Gamma_s \setminus \tilde{\Gamma}_s)$, cette suite est en particulier de Cauchy dans cet espace. L'estimation ci-dessus assure alors que (Ku_p) est de Cauchy dans $H^1(\Omega)$. Or cet espace est complet. Donc (Ku_p) converge dans $H^1(\Omega)$.

La combinaison des résultats des Questions 10 et 11 permet d'assurer que pour $\lambda \in]0; \lambda_\star[$, (FV) admet une solution lorsqu'on a unicité (comme en dimension finie), énoncé que l'on ne démontrera pas ici.

4 Approximation numérique

Pour $\lambda \in]0; \lambda_\star[$, nous souhaitons calculer une approximation de la solution du problème (FV) lorsque celui-ci admet une unique solution. Introduisons $L > 0$ telle que $\Omega = \Omega_0$ pour $|x| \geq L$ (l'obstacle est situé dans la zone $-L < x < L$) et supposons f à support dans

$$\Omega^L := \{(x, y) \in \Omega \mid |x| < L\}.$$

On peut montrer que la solution de (FV) est exponentiellement décroissante à l'infini. En première approximation, ceci amène à s'intéresser au problème

$$(FV^L) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H^1(\Omega^L) \text{ tel que} \\ \int_{\Omega^L} \nabla u \cdot \nabla v + uv d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_s^L} uv d\Gamma = \int_{\Omega^L} f v d\Omega, \quad \forall v \in H^1(\Omega^L), \end{array} \right.$$

avec $\Gamma_s^L := \{(x, 0) \in \Gamma_s \mid |x| < L\}$.

Question 12. Quelle condition vérifie u solution de (FV^L) sur les bords verticaux $\Sigma^{\pm L} := \{\pm L\} \times I$ de $\partial\Omega^L$?

Correction. En travaillant d'abord avec des fonctions $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega^L)$, on établit que ∇u admet une divergence faible égale à $u - f \in L^2(\Omega^L)$. Ainsi l'on déduit $-\Delta u + u = f$ p.p. dans Ω^L . Ceci implique

$$\int_{\partial\Omega^L} (\partial_n u - \lambda u \mathbb{1}_{\Gamma_s^L}) v \, d\Gamma = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega^L).$$

En réalité l'intégrale ci-dessus est un crochet de dualité $H^{-1/2}(\partial\Omega^L) \times H^{1/2}(\partial\Omega^L)$. Or l'application trace $\gamma_0 : H^1(\Omega^L) \rightarrow H^{1/2}(\partial\Omega^L)$ est surjective. On déduit $\partial_n u = \lambda u \mathbb{1}_{\Gamma_s^L}$ dans $H^{-1/2}(\partial\Omega^L)$. Comme $\lambda u \mathbb{1}_{\Gamma_s^L}$ appartient à $L^2(\partial\Omega^L)$, on a également $\partial_n u = \lambda u \mathbb{1}_{\Gamma_s^L}$ p.p. sur $\partial\Omega$. Ainsi u vérifie $\partial_n u = 0$ sur $\Sigma^{\pm L}$. Un raisonnement où l'on suppose de plus $u \in H^2(\Omega^L)$ était également accepté.

Comme ci-dessus, on peut montrer que (FV^L) admet une unique solution si la seule solution de (FV^L) avec $f \equiv 0$ est la solution nulle, ce que nous supposons dans la suite. Pour approcher u satisfaisant (FV^L) , utilisons une méthode d'éléments finis. Supposons Ω^L à bord polygonal. Introduisons $\mathcal{T}_h$ une partition (un maillage) de $\overline{\Omega^L}$ par des triangles. On supposera que $(\mathcal{T}_h)$ constitue une suite de maillages réguliers de Ω^L . De manière classique, ici h fait référence au pas du maillage. Définissons l'espace

$$V_h := \{u_h \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega^L}) \mid u_h|_{T_h} \in \mathbb{P}_1(T_h), \forall T_h \in \mathcal{T}_h\}.$$

Ci-dessus, $\mathbb{P}_1(T_h)$ désigne l'espace des fonctions affines sur le triangle T_h . Considérons le problème

$$(FV_h^L) \quad \left| \begin{array}{l} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a^L(u_h, v_h) = \ell^L(v_h), \quad \forall v_h \in V_h \end{array} \right.$$

avec

$$a^L(u_h, v_h) = \int_{\Omega^L} \nabla u_h \cdot \nabla v_h + u_h v_h \, d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_s^L} u_h v_h \, d\Gamma, \quad \ell^L(v_h) = \int_{\Omega^L} f v_h \, d\Omega. \quad (5)$$

Prouvons d'abord que (FV_h^L) admet une unique solution pour $h > 0$ suffisamment petit. Pour cela, il suffit d'établir le résultat suivant.

Proposition 2. *Zéro est la seule solution de (FV_h^L) avec $f \equiv 0$ pour $h > 0$ suffisamment petit.*

Démontrons cet énoncé.

Question 13. Raisonnons par l'absurde et supposons la Proposition 2 fausse. Il existe alors une suite (h_p) telle que $\lim_{p \rightarrow +\infty} h_p = 0$ et pour tout $p \in \mathbb{N}$, $u_p \in V_{h_p} \setminus \{0\}$ vérifiant $(FV_{h_p}^L)$ avec $f \equiv 0$.

i) Expliquer pourquoi sans perte de généralité on peut supposer $\|u_p\|_{H^1(\Omega^L)} = 1$.

Correction. Puisque u_p est non-nulle, on peut la normaliser. Comme $f \equiv 0$, la fonction u_p normalisée vérifie également $(FV_{h_p}^L)$.

ii) Justifier qu'on peut extraire de (u_p) une sous-suite qui converge faiblement vers un u dans $H^1(\Omega^L)$.

Correction. La suite (u_p) est bornée dans $H^1(\Omega^L)$. D'après le cours, puisque l'espace $H^1(\Omega^L)$ muni de son produit scalaire usuel est un espace de Hilbert, on peut extraire de (u_p) une sous-suite qui converge faiblement dans $H^1(\Omega^L)$.

iii) Montrer que pour tout $v \in H^1(\Omega^L)$, il existe une suite (v_p) d'éléments de V_{h_p} qui converge vers v dans $H^1(\Omega^L)$.

Correction. Considérons $v \in H^1(\Omega^L)$. Par densité de $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega^L})$ dans $H^1(\Omega^L)$, nous savons que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\tilde{v} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega^L})$ tel que

$$\|v - \tilde{v}\|_{H^1(\Omega^L)} \leq \varepsilon/2.$$

D'autre part, d'après le théorème de Bramble-Hilbert, nous savons que pour p suffisamment grand, il existe $v_p \in V_{h_p}$ tel que $\|\tilde{v} - v_p\|_{H^1(\Omega^L)} \leq \varepsilon/2$. Cela implique

$$\|v - v_p\|_{H^1(\Omega^L)} \leq \varepsilon.$$

On construit ainsi une suite (v_p) d'éléments de V_{h_p} qui converge vers v dans $H^1(\Omega^L)$.

iv) Établir que l'on a

$$a^L(u, v) = 0, \quad \forall v \in H^1(\Omega^L).$$

Correction. Pour tout $v \in H^1(\Omega^L)$, nous pouvons écrire

$$a^L(u, v) = a^L(u - u_p, v) + a^L(u_p, v_p) + a^L(u_p, v - v_p),$$

où v_p est tel que (v_p) converge vers v dans $H^1(\Omega^L)$. En utilisant que (u_p) converge faiblement vers u dans $H^1(\Omega^L)$, que $a^L(u_p, v_p) = 0$ et que (u_p) est bornée, on déduit que $a^L(u, v)$ est plus petit que ε pour tout $\varepsilon > 0$. Cela montre que $a^L(u, v) = 0$.

v) Montrer que pour tout $g \in L^2(\Gamma_s^L)$, il existe $r_g \in H^1(\Omega^L)$ tel que

$$(r_g, v)_{H^1(\Omega^L)} = (g, v|_{\Gamma_s^L})_{L^2(\Gamma_s^L)}, \quad \forall v \in H^1(\Omega^L).$$

Correction. L'application $v \mapsto (g, v|_{\Gamma_s^L})_{L^2(\Gamma_s^L)}$ est linéaire continue sur $H^1(\Omega^L)$ par continuité de la trace de $H^1(\Omega^L)$ dans $L^2(\Gamma_s^L)$. Puisque $H^1(\Omega^L)$ muni de son produit scalaire usuel est un Hilbert, le résultat recherché découle du théorème de représentation de Riesz.

vi) En utilisant que de toute suite bornée dans $H^1(\Omega^L)$, on peut extraire une sous-suite dont la trace sur Γ_s^L converge dans $L^2(\Gamma_s^L)$, prouver qu'on peut extraire de (u_p) une sous-suite qui converge fortement vers zéro dans $H^1(\Omega^L)$. Conclure.

Correction. D'après ce qui précède, comme nous avons fait l'hypothèse que la seule solution de (FV^L) pour $f \equiv 0$ est la fonction nulle, nous déduisons $u = 0$. Maintenant, extrayons de (u_p) une sous-suite, toujours notée (u_p) , dont la trace sur Γ_s^L converge vers un t dans $L^2(\Gamma_s^L)$. On a alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$(r_t, u_p)_{H^1(\Omega^L)} = (t, u_p|_{\Gamma_s^L})_{L^2(\Gamma_s^L)}.$$

En passant à la limite $p \rightarrow +\infty$, on déduit

$$0 = \|t\|_{L^2(\Gamma_s^L)}^2.$$

Ainsi la trace de (u_p) sur Γ_s^L converge vers 0 dans $L^2(\Gamma_s^L)$. Mais l'on a

$$\|u_p\|_{H^1(\Omega^L)}^2 = \lambda \|u_p\|_{L^2(\Gamma_s^L)}^2.$$

Ceci prouve que (u_p) converge fortement vers zéro dans $H^1(\Omega^L)$. Or cette suite a été normalisée dans $H^1(\Omega^L)$. On aboutit ainsi à une contradiction, ce qui achève de montrer la Proposition 2.

Question 14. Pour $f \in L^2(\Omega^L)$, notons u la solution de (FV^L) et u_h celle de (FV_h^L) pour h suffisamment petit.

i) Prouver que l'on a

$$a^L(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h.$$

Correction. Il s'agit d'une partie de la preuve du lemme de Céa. On a $a^L(u, v) = \ell^L(v)$ pour tout $v \in H^1(\Omega^L)$ et donc $a^L(u, v_h) = \ell^L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$ car $V_h \subset H^1(\Omega^L)$. Comme en outre, on a $a^L(u_h, v_h) = \ell^L(v_h)$ pour tout $v_h \in V_h$, on déduit l'identité ci-dessus en effectuant la différence.

Introduisons $\kappa^L(\cdot, \cdot)$ telle que

$$\kappa^L(u, v) = \lambda \int_{\Gamma_s^L} uv \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega^L).$$

ii) Définissons w_h (qui n'appartient pas à V_h en général) tel que

$$w_h = \frac{u - u_h}{\|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)}} \text{ si } u \neq u_h, \quad w_h = 0 \text{ sinon.}$$

Établir que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \kappa^L(w_h, w_h) = 0.$$

Correction. La suite (w_h) est bornée dans $H^1(\Omega^L)$. Donc on peut en extraire une sous-suite, toujours notée (w_h) , qui converge faiblement vers un w dans $H^1(\Omega^L)$. Soit $v \in H^1(\Omega^L)$. Comme nous l'avons vu plus haut en question 13 *iii*), il existe une suite (v_h) , telle que $v_h \in V_h$ pour tout $h > 0$, qui converge vers v dans $H^1(\Omega^L)$. On a alors

$$a^L(w, v) = a^L(w - w_h, v) + a^L(w_h, v_h) + a^L(w_h, v - v_h).$$

En utilisant que (w_h) converge faiblement vers w dans $H^1(\Omega^L)$, que $a^L(w_h, v_h) = 0$ et que (w_h) est bornée, on déduit que $a^L(w, v)$ est plus petit que ε pour tout $\varepsilon > 0$. Cela montre que $a^L(w, v) = 0$ et donc $w = 0$. Maintenant, extrayons de (w_h) une sous-suite, toujours notée (w_h) , dont la trace sur Γ_s^L converge vers un t dans $L^2(\Gamma_s^L)$. On a alors, pour tout h ,

$$(r_t, w_h)_{H^1(\Omega^L)} = (t, w_h|_{\Gamma_s^L})_{L^2(\Gamma_s^L)}.$$

En passant à la limite $h \rightarrow 0$, on déduit

$$0 = \|t\|_{L^2(\Gamma_s^L)}^2.$$

Ainsi la trace de w_h sur Γ_s^L converge vers 0 dans $L^2(\Gamma_s^L)$. Ceci montre que

$$\kappa^L(w_h, w_h) = \lambda(w_h, w_h)_{L^2(\Gamma_s^L)}$$

converge vers 0 quand h tend vers 0. Ceci garantit en outre que zéro est la seule valeur d'adhérence possible pour la suite $(\kappa^L(w_h, w_h))$. Enfin, en raisonnant par l'absurde, on établit que pour toute la suite (w_h) , on a

$$\lim_{h \rightarrow 0} \kappa^L(w_h, w_h) = 0.$$

iii) En déduire l'estimation d'erreur

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega^L)},$$

où C est une constante indépendante de h .

Correction. Pour tout $v_h \in V_h$, nous pouvons écrire

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)}^2 - \kappa^L(u - u_h, u - u_h) = a^L(u - u_h, u - u_h) = a^L(u - u_h, u - v_h).$$

Or la question précédente assure que pour h suffisamment petit, l'on a

$$|\kappa^L(u - u_h, u - u_h)| \leq \frac{1}{2} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)}^2.$$

Ceci conduit donc à

$$\frac{1}{2} \|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)}^2 \leq C \|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)} \|u - v_h\|_{H^1(\Omega^L)}$$

avec $C > 0$ indépendante de $h > 0$. Ainsi l'on déduit bien le résultat escompté.

iv) Quelle estimation en h obtient-on pour $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)}$ si $u \in H^2(\Omega^L)$?

Correction. D'après le cours, nous savons qu'on a alors l'estimation $\|u - u_h\|_{H^1(\Omega^L)} \leq Ch$, pour h suffisamment petit, où $C > 0$ est une constante indépendante de h .

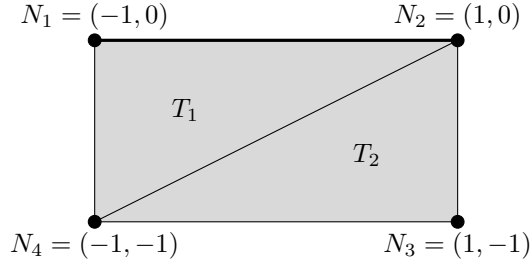


FIGURE 3 – Maillage très simple du domaine $\Omega^L =]-1; 1[\times]-1; 0[$.

5 Mise en œuvre pratique

Considérons le domaine $\Omega^L =]-1; 1[\times]-1; 0[$ que l'on maille comme sur la Figure 3 en deux triangles T_1 , T_2 et quatre nœuds situés respectivement en $N_1 = (-1, 0)$, $N_2 = (1, 0)$, $N_3 = (1, -1)$ et $N_4 = (-1, -1)$. Pour $i = 1, \dots, 4$, notons φ_i la fonction “chapeau” de V_h telle que $\varphi_i(N_j) = \delta_{ij}$ où δ_{ij} désigne le symbole de Kronecker.

Question 15. Réécrire le problème (FV_h^L) sous la forme

$$(\mathbb{K} + \mathbb{M} + \mathbb{B})U = F,$$

où les matrices $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{B}$ correspondent à la discrétisation des trois intégrales définissant $a^L(\cdot, \cdot)$ en (5). On donnera les expressions de $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{B}$ en fonction des φ_i ainsi que celles de U et F .

Correction. Décomposons u_h sur la base des φ_i . On obtient

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^4 u_h(N_i) \varphi_i(x, y).$$

Insérons cette expression dans (FV_h^L) et prenons successivement $v_h = \varphi_j$, $j = 1, \dots, 4$. On trouve alors

$$\sum_{i=1}^4 u_h(N_i) a^L(\varphi_i, \varphi_j) = \ell^L(\varphi_j).$$

Cela se réécrit

$$(\mathbb{K} + \mathbb{M} + \mathbb{B})U = F$$

avec

$$\mathbb{K} = \left(\int_{\Omega^L} \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j d\Omega \right)_{1 \leq i, j \leq 4} \quad \mathbb{M} = \left(\int_{\Omega^L} \varphi_i \varphi_j d\Omega \right)_{1 \leq i, j \leq 4} \quad \mathbb{B} = \left(-\lambda \int_{\Gamma_s^L} \varphi_i \varphi_j d\Gamma \right)_{1 \leq i, j \leq 4}$$

et

$$U = (u_h(N_i))_{1 \leq i \leq 4} \quad F = \left(\int_{\Omega^L} f \varphi_j d\Omega \right)_{1 \leq j \leq 4}.$$

Question 16. Dessiner en 3D l'allure de la fonction φ_1 et donner les expressions de φ_1 , φ_2 sur Ω^L .

Correction. Commençons par représenter la fonction φ_1 qui vaut 1 en N_1 , 0 sur les autres sommets.

Les fonctions φ_i sont de la forme

$$\varphi_i(x, y) = a_i^m x + b_i^m y + c^m$$

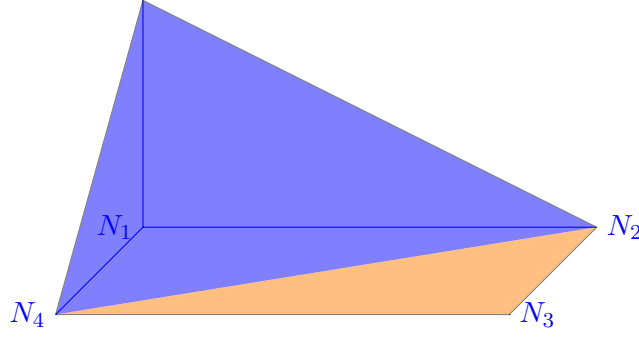


FIGURE 4 – Graphe de φ_1 .

sur chaque triangle T_m , $m = 1, 2$. Pour φ_1 sur T_1 , en évaluant en N_1 , N_2 , N_4 , on trouve les contraintes

$$-a_1^1 + c_1^1 = 1, \quad a_1^1 + c_1^1 = 0, \quad -a_1^1 - b_1^1 + c_1^1 = 0.$$

Comme d'autre part, φ_1 est nulle en N_2 , N_3 , N_4 , on déduit que $\varphi_1 \equiv 0$ sur T_2 . Cela conduit donc à

$$\varphi_1(x, y) = \begin{cases} \frac{1-x}{2} + y & \text{sur } T_1 \\ 0 & \text{sur } T_2. \end{cases}$$

En travaillant de façon similaire, on trouve

$$\varphi_2(x, y) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & \text{sur } T_1 \\ \frac{y+1}{2} & \text{sur } T_2. \end{cases}$$

Question 17. Calculer explicitement $\mathbb{B}$ ainsi que les termes $\mathbb{K}_{11}$, $\mathbb{K}_{12}$, $\mathbb{K}_{21}$, $\mathbb{K}_{22}$ de $\mathbb{K}$ (on ne se préoccupera pas de $\mathbb{M}$). Quelles propriétés possèdent les matrices $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{B}$ pour des maillages génériques ?

Correction. On trouve

$$\begin{aligned} \underline{\nabla} \varphi_1(x, y) &= \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ sur } T_1, & \underline{\nabla} \varphi_1(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } T_2, \\ \underline{\nabla} \varphi_2(x, y) &= \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ sur } T_1, & \underline{\nabla} \varphi_2(x, y) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ sur } T_2, \end{aligned}$$

ainsi que $\text{aire}(T_1) = \text{aire}(T_2) = 1$. De cela, on déduit

$$K_{11} = 1 + 1/4 = 5/4, \quad K_{12} = K_{21} = -1/4, \quad K_{22} = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Pour le calcul de $\mathbb{B}$, commençons par observer que seules φ_1 et φ_2 sont non-nulles sur Γ_s^L . On a donc

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} \mathbb{B}_{11} & \mathbb{B}_{12} & 0 & 0 \\ \mathbb{B}_{21} & \mathbb{B}_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sur Γ_s^L , on a

$$\varphi_1(x, y) = \varphi_1(x, 0) = \frac{1-x}{2}, \quad \varphi_2(x, y) = \varphi_2(x, 0) = \frac{1+x}{2}.$$

Cela entraîne

$$\mathbb{B}_{11} = -\lambda \int_{-1}^1 \frac{(1-x)^2}{4} dx = -\lambda \frac{2}{3}.$$

Par symétrie, on trouve $\mathbb{B}_{22} = -\lambda 2/3$. Enfin, l'on a

$$\mathbb{B}_{12} = \mathbb{B}_{21} = -\lambda \int_{-1}^1 \frac{1-x^2}{4} dx = -\lambda \frac{1}{3}.$$

Les matrices $\mathbb{K}$, $\mathbb{M}$, $\mathbb{B}$ sont symétriques et creuses. De plus, $\mathbb{K}$ est positive (mais pas définie-positive à cause des vecteurs dont toutes les composantes sont égales), $\mathbb{M}$ est définie-positive et $\mathbb{B}$ est négative (mais pas définie-négative).

6 Étude à plus haute fréquence

Dans cette partie, nous souhaitons étudier les propriétés du problème $(\mathcal{P})$ pour $\lambda > \lambda_*$. Pour simplifier les calculs, fixons $k = 0$ de sorte que $(\mathcal{P})$ devient

$$\begin{cases} -\Delta u &= f & \text{dans } \Omega \\ \partial_n u &= \lambda u & \text{sur } \Gamma_s \\ \partial_n u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \setminus \Gamma_s. \end{cases} \quad (6)$$

Dans cette situation, on peut montrer que le λ_* correspondant vaut 0. Notre objectif consiste donc à considérer (6) pour $\lambda > 0$. Pour simplifier, nous travaillerons dans le guide sans obstacle $\Omega = \Omega_0 = \mathbb{R} \times I$ avec $\Gamma_s = \mathbb{R} \times \{0\}$.

Question 18. Supposons $f \equiv 0$ dans Ω_0 . Montrer que (6) admet des solutions non-nulles à variables séparées de la forme

$$w_{\pm}(x, y) = e^{\pm i\beta x} \varphi(y)$$

avec $\beta > 0$ et $\varphi \in H^1(I)$. On donnera l'expression de φ et on écrira l'équation caractérisant β .

Correction. En injectant l'expression de $w_{\pm}$ dans le problème, on trouve qu'on doit avoir

$$\varphi''(y) = \beta^2 \varphi(y) \text{ pour } y \in I$$

ainsi que $\varphi'(-1) = 0$. On déduit que φ doit être de la forme, à une constante multiplicative près,

$$\varphi(y) = \cosh(\beta(y+1)).$$

La condition sur Γ_s impose de plus qu'on doit avoir

$$\beta \sinh(\beta) = \lambda \cosh(\beta).$$

Il est facile de vérifier que pour tout $\lambda > 0$, cette équation admet une unique solution $\beta > 0$.

Physiquement, avec une convention de régime harmonique en temps en $e^{-i\omega t}$, w_+ (resp. w_-) correspond à une onde de surface se propageant vers la droite (resp. gauche). Nous allons montrer qu'en raison de l'existence de ces $w_{\pm}$, la forme $d(\cdot, \cdot)$ définie par

$$d(u, v) = \int_{\Omega_0} \underline{\nabla} u \cdot \underline{\nabla} v \, d\Omega - \lambda \int_{\Gamma_s} uv \, d\Gamma, \quad \forall u, v \in H^1(\Omega_0), \quad (7)$$

n'est pas coercive sur $H^1(\Omega_0)$. Introduisons $\zeta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ une fonction de troncature telle que

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x \geq 1 \\ 1 & \text{pour } x \leq 0. \end{cases}$$

Pour $p \in \mathbb{N}$, définissons $\zeta_p \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ la fonction paire telle que $\zeta_p(x) = \zeta(x-p)$ pour $x \geq 0$, et posons

$$u_p(x, y) = \zeta_p(x)(w_+(x, y) + w_-(x, y))/2 = \zeta_p(x) \cos(\beta x) \varphi(y).$$

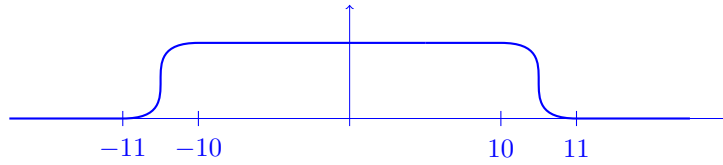


FIGURE 5 – Graphe de ζ_{10} .

Question 19. Faire un dessin de ζ_p pour $p = 10$. En travaillant avec la suite (u_p) montrer que les formes $d(\cdot, \cdot)$ et $-d(\cdot, \cdot)$ ne sont pas coercives sur $H^1(\Omega_0)$.

Correction. La Figure 5 présente une allure de graphe possible pour ζ_{10} .

Un calcul direct conduit à

$$\Delta u_p = g_p \quad \text{avec} \quad g_p(x, y) = \cos(\beta x) \varphi(y) \partial_x^2 \zeta_p - 2\beta \partial_x \zeta_p(x) \sin(\beta x) \varphi(y).$$

Remarquons que g_p est à support dans

$$\mathcal{D}_p := [-p-1; -p] \times [-1; 0] \cup [p; p+1] \times [-1; 0]$$

et qu'il existe $C > 0$ indépendante de p telle que $\|g_p\|_{L^2(\Omega_0)} \leq C$. Multiplions l'équation $\Delta u_p = g_p$ par u_p et intégrons par parties sur Ω_0 . En utilisant que ζ_p ne dépend pas de la variable y et que $\partial_n = \partial_y$ sur Γ_s , on vérifie qu'on a

$$\partial_n u_p = \lambda u_p \text{ sur } \Gamma_s.$$

Cela permet d'obtenir

$$d(u_p, u_p) = - \int_{\Omega_0} \Delta u_p u_p \, d\Omega = - \int_{\Omega_0} g_p u_p \, d\Omega = - \int_{\mathcal{D}_p} g_p u_p \, d\Omega.$$

On déduit

$$|d(u_p, u_p)| \leq \|g_p\|_{L^2(\mathcal{D}_p)} \|u_p\|_{L^2(\mathcal{D}_p)} \leq C \|u_p\|_{L^2(\mathcal{D}_p)} \leq C$$

où $C > 0$ désigne une constante qui change d'une estimation à l'autre mais qui reste indépendante de p . Mais par ailleurs, il est facile de vérifier que

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \|u_p\|_{H^1(\Omega_0)} = +\infty.$$

Cela montre que les formes $d(\cdot, \cdot)$ et $-d(\cdot, \cdot)$ ne sont pas coercives sur $H^1(\Omega_0)$.

On peut établir de façon similaire que l'on n'a pas non plus de coercivité dans $H^1(\Omega)$ pour la forme associée à (6) en présence d'un obstacle. L'idée ici, qui est naturelle physiquement, est qu'il est nécessaire de prendre en compte les ondes $w_{\pm}$, qui n'appartiennent pas à $H^1(\Omega)$, dans le choix de l'espace où l'on cherche la solution de (6). Mais ceci est une autre histoire...